This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

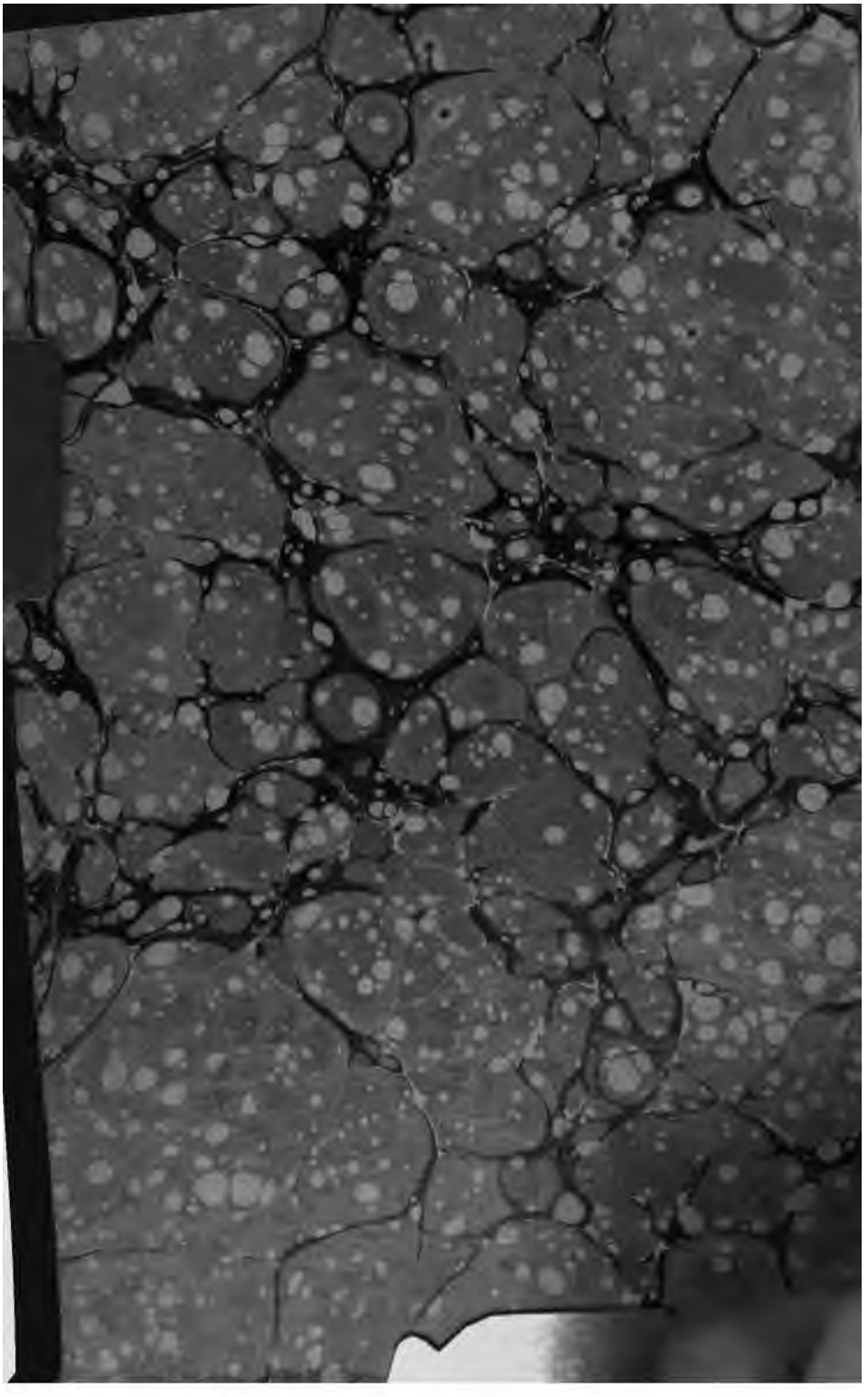
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

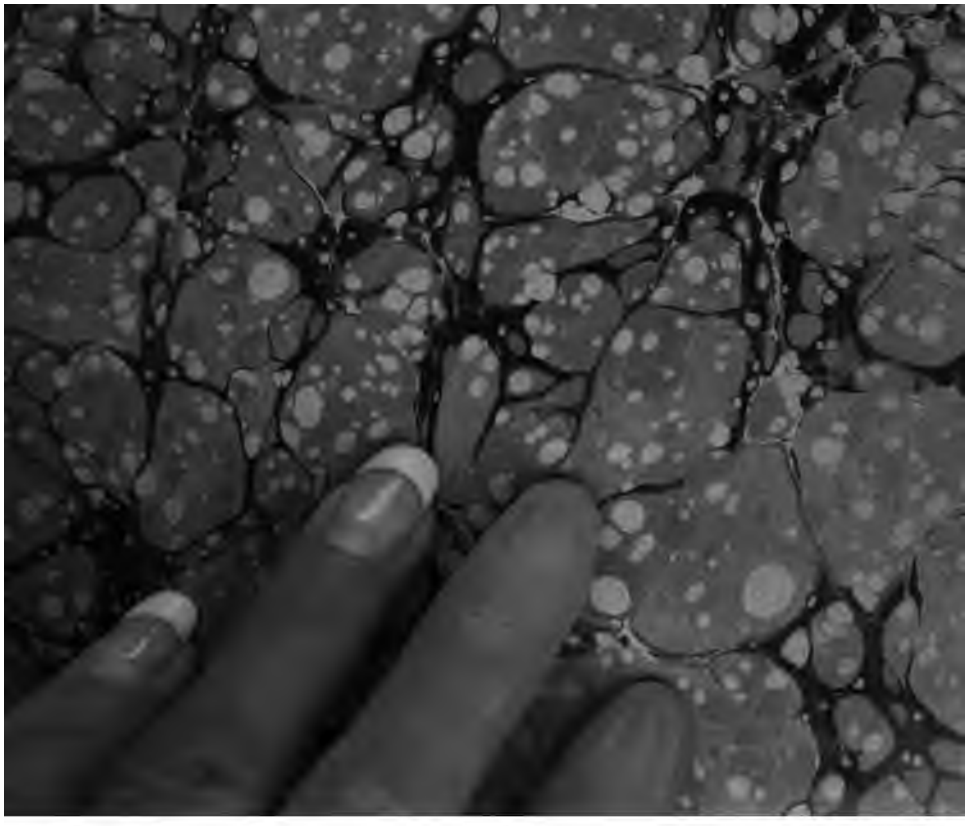
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 000 664 263





A613

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 24.

# ANNALEN
DER
# PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 24.

DER GANZEN REIHE 329. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

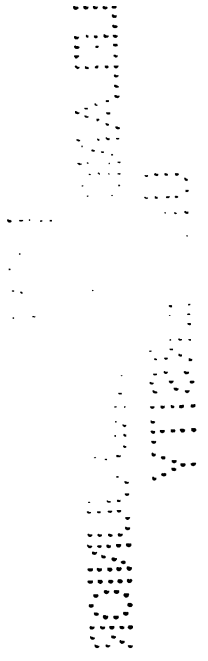
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

LEIPZIG, 1907.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

10% 15



# Inhalt.

## Vierte Folge. Band 24.

### Elftes Heft.


Seite

1. Ernst Müller. Das optische Verhalten der kolloidalen Metalle 1
2. E. Warburg, G. Leithäuser und Ed. Johansen. Über das Vakuumbolometer . . . . . 25
3. Günther Schulze. Über die elektrolytische Ventilwirkung der Metalle Magnesium, Antimon und Wismut . . . . . 43
4. Fritz Weigert. Über chemische Lichtwirkungen. I. Das Phosgengleichgewicht unter dem Einfluß der Bestrahlung . . 55
5. E. Waetzmann. Zur Theorie der Kombinationstöne . . . 68
6. H. Greinacher. Über die thermische Bestimmung der Radioaktivität gewöhnlicher Substanzen . . . . . 79
7. William Miller. Zeemaneffekt an Magnesium, Calcium, Strontium, Zink, Kadmium, Mangan und Chrom . . . . . 105
8. B. Strasser. Der Fizeausche Versuch über die Änderung des Polarisationsazimuts eines gebrochenen Strahles durch die Bewegung der Erde . . . . . 137
9. P. Pringsheim. Versuche über das Minimumpotential von Spitzenentladungen und über den Einfluß erhöhter Temperaturen auf dasselbe . . . . . 145
10. A. Werner. Quantitative Messungen der An- und Abklingung getrennter Phosphorescenzbanden . . . . . 164
11. G. Bakker. Zur Mechanik der Kapillarschicht; Antwort an K. Fuchs . . . . . 191



*Ausgegeben am 8. Oktober 1907.*


### Zwölftes Heft.


1. W. Voigt. Betrachtungen über die komplizierteren Formen des Zeemaneffektes . . . . . 193
2. Carl Barus. Über die Verteilung der Kondensationskerne in staubfreier gesättigter Luft, und über ihre Beobachtungsmethoden . . . . . 225

Seite

3. Fritz Weigert. Über chemische Lichtwirkungen. II. Photochemisch sensibilisierte Gasreaktionen und eine Theorie der katalytischen Lichtwirkung . . . . . 243
4. V. Walfrid Ekman. Über Resonanz durch Strahlung . . . 267
5. W. Voigt. Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Aragonit 290
6. F. Leder. Über die absolute Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Grund der Alkalimetallspektren, über die Strahlung der Hefnerlampe und des Osmiums . . . . . 305
7. J. Herweg. Über die Herabsetzung des Funkenpotentials durch Bestrahlung der Funkenstrecke mit Kathodenstrahlen . 326
8. Paul Cermak. Der Peltiereffekt Eisen–Konstantan und Nickel–Kupfer zwischen 0° und 360° C. . . . . 351
9. P. Boedke. Über den Durchgang des Lichtes durch eine planparallele inhomogene Schicht . . . . . 357
10. Edward C. Franklin. Über den Siedepunkt des flüssigen Ammoniaks . . . . . 367
11. E. Angerer. Ursprung der Wärmeentwickelung bei Absorption von Röntgenstrahlen . . . . . 370
12. G. Bakker. Bemerkung zu der Arbeit von K. Fuchs: „Direkte Ableitung einiger Kapillaritätsfunktionen“ . . . . 381
13. Anna Stettenheimer. Eine absolute Messung des Zeemanphänomens . . . . . 384
14. R. Gans. Zur Cohnschen Elektrodynamik . . . . . 397

*Ausgegeben am 12. November 1907.*

**Dreizehntes Heft.**

1. M. Thiesen. Zur Theorie des geschlossenen Resonators . . 401
2. Mathias Cantor. Zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau und akustische Analogien . . . . . 439
3. K. George Falk. Die Entzündungstemperaturen von Gasgemischen . . . . . 450
4. H. Wommelsdorf. „Eine neue Art von Influenzmaschinen mit allseits in festes Isolationsmaterial eingebetteten Sektoren.“ Zweite Mitteilung . . . . . 483
5. W. Voigt und S. Kinoshita. Bestimmung absoluter Werte von Magnetisierungszahlen, insbesondere für Kristalle . . . 492
6. A. Pflüger. Uber Absorption in lumineszierenden Gasen . 515
7. Heinrich Mache. Zur Physik der Flamme. Zweite Mitteilung . . . . . 527
8. Georg Gehlhoff. Über Kathodengefälle und Spektren einiger zusammengesetzter Gase . . . . . 553

Seite

9. V. Walfrid Ekman. Über die Bedeutung der Resonanz in der Theorie der Spektrallinien . . . . . 579
10. Ludwig Geiger. Über die Begleiterscheinungen des inversen longitudinalen Zeemaneffektes . . . . . 597
11. Albert Wigand. Zum Gesetze von Dulong und Petit (Erwiderung auf die Bemerkungen von R. Laemmel) . . . 601
12. G. Jäger. Die Zustandsgleichung (zur Richtigstellung) . . . 607

*Ausgegeben am 26. November 1907.*

## Vierzehntes Heft.

1. A. Sommerfeld. Über den Wechselstromwiderstand der Spulen . . . . . 609
2. G. A. Schott. Über die Strahlung von Elektronengruppen . 635
3. P. Lasareff. Über das Ausbleichen von Farbstoffen im sichtbaren Spektrum . . . . . 661
4. H. Erfle. Optische Eigenschaften und Elektronentheorie . . 672
5. H. Erfle. Nachtrag zur Berechnung der Loschmidtschen Zahl aus den Konstanten der Dispersionsformel . . . . . 709
6. Egon Ritter v. Schweidler. Studien über die Anomalien im Verhalten der Dielektrika . . . . . 711
7. Max Dieckmann. Über zeitliche Beziehungen von Schwingungen in Kondensatorkreisen . . . . . 771
8. Ludwig Silberstein. Nachtrag zur Abhandlung über „Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung“ . . . . . 783

*Ausgegeben am 17. Dezember 1907.*

## Fünfzehntes Heft.

1. F. A. Schulze. Einige neue Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen höchster hörbarer und unhörbarer Töne. — Anwendung auf die Töne der Galtonpfeife und die Bestimmung der oberen Hörgrenze . . . . . 785
2. A. Becker. Über die innere Reibung und Dichte der Bunsenflamme . . . . . 823
3. A. Becker. Über den Luftwiderstand . . . . . 863
4. Karl Kurz. Die Beeinflussung der Ergebnisse luftelektrischer Messungen durch die festen radioaktiven Stoffe der Atmosphäre . . . . . 890

Seite

5. Paul Tänzler. Das magnetische Verhalten von Luft, Argon und Helium in Beziehung zu Sauerstoff . . . . . 931
6. A. Joffé. Eine Bemerkung zu der Arbeit von E. Ladenburg: „Über Anfangsgeschwindigkeit und Menge der photoelektrischen Elektronen usw.“ . . . . . 939
7. E. Giebe. Messung induktiver Widerstände mit hochfrequenten Wechselströmen. Methode zur Messung kleiner Selbstinduktionskoeffizienten . . . . . 941
8. B. Strasser. Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden . . . . . 960

Namenregister zum Jahrgang 1907 . . . . . 961

*Ausgegeben am 31. Dezember 1907.*

1907. № 11.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 24.

## 1. *Das optische Verhalten der kolloidalen Metalle; von Ernst Müller.*

1. Nachfolgende Arbeit befaßt sich mit der Absorption und Polarisation des Lichtes in den sogenannten kolloidalen Metallösungen. Zieht man die Folgerungen aus der elektromagnetischen Lichttheorie auf das Verhalten der trüben Medien, so kommt man zu verschiedenen Resultaten, je nachdem die trübenden Teilchen Isolatoren oder Leiter der Elektrizität sind. Die bezüglichen Rechnungen sind durchgeführt worden von Lord Rayleigh[1]) für Isolatoren und von J. J. Thomson[2]) für Leiter der Elektrizität. Dabei machen beide die Annahme, daß die kleinen Teilchen Kugeln mit gegen die Lichtwellenlänge kleinem Durchmesser sind. Beide Autoren behandeln das Problem der Zerstreuung des Lichtes durch eine solche kleine Kugel, wenn diese von einer Welle natürlichen Lichtes getroffen wird. Während nun die Rechnung ergab, daß das von einer isolierenden Kugel in einer Ebene senkrecht zum einfallenden Strahl zerstreute Licht vollkommen linear polarisiert ist, und zwar in der durch die betrachtete Zerstreuungsrichtung und den einfallenden Strahl definierten Ebene, daß dagegen die Polarisation abnimmt für das Licht, das unter einem größeren oder kleineren Winkel als 90° gegen den einfallenden Strahl zerstreut wird, zeigte es sich, daß das von einer die Elektrizität leitenden Kugel zerstreute Licht linear polarisiert ist auf einem Kegelmantel,

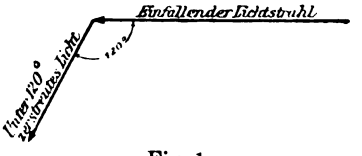



Fig. 1.

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 47. p. 375. 1899.

2) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism. p. 437. 1983.

dessen Achse der einfallende Strahl ist, und dessen Seite den Winkel von 120° mit dem einfallenden Strahl bildet, wobei der Sinn dieses Winkels aus Fig. 1 hervorgeht. Die Lage der Polarisationsebene ist auch hier gegeben durch die Richtung des zerstreuten Lichtes und des einfallenden Strahles.

Soret[1]) hat nachgewiesen, daß, wenn das Licht nicht nur eine einmalige, sondern eine mehrmalige Zerstreuung erleidet, daß dann der Polarisationsgrad vermindert wird, so daß das von trüben Lösungen diffus zerstreute Licht unter 90° bez. 120° gegen den einfallenden Strahl nur mehr teilweise polarisiert ist, die Polarisation aber unter diesen Winkeln ein Maximum besitzt.

Die Thomsonsche Theorie ist durch F. Ehrenhaft[2]) für den Fall erweitert worden, daß die metallischen Partikelchen zwar kleiner als eine Wellenlänge des auffallenden Lichtes sind, aber doch nicht mehr gegen dieselbe vernachlässigt werden können, sondern bereits einen merklichen Bruchteil der Lichtwellenlänge betragen. Ehrenhaft leitet aus seiner theoretischen Untersuchung folgende zusammengehörige Werte von Teilchendurchmesser ($a$) und Lage des Polarisationsmaximums ab ($\lambda$ bedeutet die Wellenlänge des Lichtes):

| Größenverhältnis $a/\lambda$ | 0 | $^1/_{100}$ | $^1/_{20}$ | $^1/_{10}$ | $^1/_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Polarisationsmaximum gegen den einfallenden Strahl | 120° | 120° | 116,5° | 115° | 109° |

Danach würde, je größer die metallischen Teilchen werden, das Verhalten der Trübungen sich in bezug auf Lage des Polarisationsmaximus um so mehr demjenigen der durch isolierende Partikelchen bewirkten Trübungen nähern.

Während nun die Rayleighsche Theorie der Lichtzerstreuung an isolierenden Partikelchen schon oft experimentell geprüft worden ist, liegen über die Polarisation des durch metallische Teilchen zerstreuten Lichtes und insbesondere über die Lage des Polarisationsmaximums erst von zwei Autoren Messungen vor; der erste, Threlfall[3]), hat auf Veranlassung

1) J. L. Soret, Arch. de Genève **20.** p. 429. 1888.
2) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. **114.** p. 1115. 1905.
3) R. Threlfall, Phil. Mag. (5) **38.** p. 446. 1894.

von J. J. Thomson dessen Theorie an einer Reihe von kolloidalen Metallösungen geprüft und ist zu dem Resultat gekommen, daß sich diese genau ebenso verhalten, wie die durch isolierende Partikelchen bewirkten Trübungen; er fand das Maximum der Polarisation unter 90° gegen den einfallenden Strahl. Dieses Resultat ist von Thomson[1]) in Übereinstimmung mit Maxwell und Wien dadurch erklärt worden, daß die Metalle für Wechselströme von der Frequenz der Lichtwellen nicht mehr in dem Sinne, wie es die Thomsonsche Theorie verlangt, als Leiter der Elektrizität aufzufassen sind. Der zweite Beobachter dagegen, F. Ehrenhaft[2]), fand die Thomsonsche Theorie aufs vollkommenste bestätigt; er fand das Polarisationsmaximum bei kolloidalen Gold-, Platin- und Kupferlösungen nahezu unter 120°, bei Silberlösungen unter 110° gegen den einfallenden Strahl. Es erschien wünschenswert, die Ehrenhaftschen Versuche zu wiederholen und zu erweitern, eine Aufgabe, die ich auf gütige Anregung von Hrn. Geheimrat Quincke unternommen habe.

2. Threlfall hat seine kolloidalen Metallösungen auf chemischem Wege dargestellt, Ehrenhaft die seinen auf mechanischem Wege durch Zerstäubung im elektrischen Lichtbogen unter Wasser, nach dem Vorgang von Bredig.[3]) Die letztere Art der Darstellung habe auch ich gewählt. Betreffs der Einzelheiten dieser Art der Darstellung kolloidaler Metallösungen muß auf die Bredigsche Schrift verwiesen werden. Hier sei nur folgendes bemerkt: Um farbenprächtige, filtrierbare und längere Zeit haltbare Lösungen zu gewinnen, ist das Haupterfordernis die Benutzung von reinstem destillierten Wasser (sogenanntem Leitfähigkeitswasser). Weder Wasserleitungswasser, noch das käufliche destillierte Wasser sind, insbesondere für die Darstellung von Au-Lösungen, brauchbar. Ich entnahm ganz frisch destilliertes Wasser dem Destillationsapparat des hiesigen chemischen Universitätslaboratoriums mit gütiger Erlaubnis des Hrn. Geheimrat

1) Phil. Mag. (5) **38**. p. 455. 1894.

2) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. **11**. p. 489. 1903.

3) G. Bredig, Anorganische Fermente. Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1901.

Curtius, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte. Dieses Wasser wurde noch kohlensäurefrei gemacht durch einstündiges Hindurchperlen von kohlensäurefreier Luft (Luft, welche nacheinander Vorlagen mit Kalilauge, Natronkalk, Waschwasser und Watte passiert hatte). Das so behandelte Wasser zeigte eine Leitfähigkeit von $1{,}5 \cdot 10^{-6}$. Ferner empfiehlt es sich, die Stromstärke beim Zerstäuben der Metalle so klein wie möglich zu wählen. (Als Stromquelle diente beim Zerstäuben die Hausbatterie von 75 Volt mit vorgeschaltetem Widerstand.) Als Metalle wurden gewählt reinste Gold- und Silberdrähte von 1 mm Durchmesser, Platindrähte von 2 mm Durchmesser. Man erhält leicht dunkelbraune Pt-Lösungen, und dunkelolivgrüne Ag-Lösungen von schmutzig-grauer Opalescenz. Diese Lösungen sind beliebig lange haltbar, ohne ihre Farbe zu ändern, und ohne Metall abzusetzen. Schwieriger ist die Herstellung der Au-Lösungen. Um filtrierbare Au-Lösungen zu erhalten, muß man dem Wasser eine Spur Alkali zusetzen (auf 100 ccm 1—2 Tropfen konzentrierter, kohlensäurefreier NaOH). Man darf nicht zu viel und nicht zu wenig Alkali nehmen, was erst nach längerer Übung gelingt. Man erhält dann prachtvoll rubinrote Goldlösungen; die Farbe nimmt im Laufe der Zeit, je nach Art der Herstellung nach Tagen, Wochen oder erst nach Monaten, einen Stich ins Bläuliche an. Die roten Au-Lösungen zeigen eine bräunliche Opaleszenz.

3. Die kolloidalen Metallösungen unterscheiden sich von den kolloidalen Lösungen isolierender Substanzen, wie Mastix, kolloidale Kieselsäure, vor allem durch die prachtvolle intensive Färbung. Die letzteren erscheinen im auffallenden Lichte blau, im durchgehenden Licht orange. Die Metallpartikelchen sind mit den stärksten Vergrößerungen im durchgehenden Licht nicht nachweisbar; nur durch das diffus zerstreute Licht verrät sich die optische Inhomogenität der kolloidalen Metallösungen. Dies diffus zerstreute Licht erweist sich bei Untersuchung mit Bravaisscher Doppelplatte und analysierendem Nicol als teilweise geradlinig polarisiert, nicht teilweise elliptisch, wie Stöckl und Vanino[1]) angeben. Dagegen kann man die Partikelchen

1) K. Stöckl u. L. Vanino, Zeitschr. f. phys. Chem. **30**. p. 98. 1899.

durch das Ultramikroskop mit Leichtigkeit sichtbar machen. Siedentopf und Zsigmondi[1]) haben als obere Grenze für den mittleren Teilchendurchmesser gefunden: für Gold 20 bis 80 $\mu\mu$, für Platin 44 $\mu\mu$, für Silber 50—77 $\mu\mu$. Noch kleinere Teilchendurchmesser sind von Ehrenhaft[2]) gemessen worden.

Setzt man den Metallösungen eine Spur eines Elektrolyten zu, so tritt, wie bei den trüben Lösungen[3]), Koagulation ein; doch dauert dies bei den Metallösungen länger als bei jenen. Am schnellsten erfolgt die Koagulation bei Platin; setzt man einer kolloidalen Pt-Lösung einige Tropfen ganz verdünnter Salzsäure zu, so fällt in 1—2 Stunden das Metall aus; länger dauert es bei Silber und am längsten bei dem in bezug auf die Farbe am wenigsten stabilen Gold; setzt man einer roten Au-Lösung eine Spur verdünnter HCl zu, so geht die Lösung ganz allmählich ins Blaue über; nach einigen Stunden ist sie tief indigoblau geworden; aber erst nach etwa 24 Stunden ist das Metall ausgefallen. Diese Farbenänderung und das Ausfallen des Metalles werden verhindert durch eine Spur Gelatine, die man den Lösungen zusetzt. Es ist dies ein Mittel, um die schöne rubinrote Farbe einer frisch hergestellten Goldlösung dauernd zu erhalten (Schutzwirkung).

Ich habe mir die Aufgabe gestellt, den Einfluß der allmählichen Koagulation, sowie den Einfluß, welchen der Zusatz einer Spur Gelatine auf die Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes ausübt, näher zu untersuchen und bin dabei zu merkwürdigen Resultaten gelangt, die ich weiter unten mitteile, deren Deutung mir aber auf Grund des vorliegenden Tatsachenmaterials noch nicht möglich erscheint.

4. Wie bereits bemerkt, besitzen die Metallösungen im durchgehenden Licht viel intensivere Farben als die trüben Lösungen. Die Farbe der letzteren rührt lediglich von der diffusen Zerstreuung des Lichtes her. Da diese nach der Rayleighschen Theorie für die trüben Lösungen und nach

1) R. Zsigmondi, Zur Erkenntnis der Kolloide. Jena, Gustav Fischer. p. 146—147. 1905.

2) F. Ehrenhaft, Wien. Ber. **114.** p. 1115. 1905.

3) Ich bezeichne im folgenden die durch isolierende Partikelchen bewirkten Trübungen kurz als trübe Lösungen, die durch metallisch leitende Teilchen bewirkten Trübungen als Metallösungen.

der Thomsonschen Theorie für die metallischen Trübungen umgekehrt proportional der vierten Potenz der Lichtwellenlänge ist, so müßte die Lichtabsorption in den kolloidalen Metallösungen, wie dies bei den trüben Lösungen der Fall ist, von großen nach kleineren Wellenlängen zunehmen. Im Gegensatz dazu hat Ehrenhaft[1]) bei vielen metallischen Lösungen Maxima der Absorption gefunden und, indem er diese selektive Absorption als durch optische Resonanz bewirkt ansah, aus ihrer Lage im Spektrum auf die Größe der resonierenden Teilchen geschlossen. Er ist dabei zu Größenordnungen gekommen, welche mit den aus ultramikroskopischen Bestimmungen gewonnenen annähernd übereinstimmen. Über die Zulässigkeit dieser Ehrenhaftschen Annahme entspann sich sodann eine Kontroverse zwischen den Herren Ehrenhaft und F. Pockels.[2])

Ich habe die Absorption einer Anzahl kolloidaler Metalllösungen und einer 0,04 proz. Mastixemulsion mit dem König-Martensschen Spektralphotometer[3]) unter Benutzung monochromatischen Lichtes (Hg-Lampe, He-Röhre, H-Röhre) gemessen. Folgende Tabelle enthält die gemessenen Extinktionskoeffizienten $\varepsilon$ (definiert durch $J' = J.10^{-\varepsilon d}$, wo $d$ die Dicke der durchstrahlten Schicht). Die Benennung der Lösungen mit römischen Ziffern (vgl. die weiter unten folgenden Versuche über Polarisation) dient nur zur Orientierung, welche Messungen an den gleichen Lösungen angestellt wurden.

| Extinktionskoeffizienten $\varepsilon$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Wellenlänge in $\mu\mu$ | Ag I | Au I | Au II | Pt I | 0,04 proz. Mastixtrübung |
| 436,0 (Hg) | 0,918 | 0,668 | 0,270 | — | 0,203 |
| 447,1 (He) | 0,819 | 0,653 | 0,295 | 0,681 | 0,192 |
| 486,1 (H) | 0,653 | 0,682 | 0,313 | 0,581 | 0,147 |
| 501,6 (He) | 0,608 | 0,713 | 0,318 | 0,564 | 0,130 |
| 546,1 (Hg) | 0,529 | — | 0,316 | — | — |
| 577,8 (He) | 0,486 | — | — | — | — |
| 587,6 (He) | 0,466 | 0,578 | 0,337 | 0,483 | 0,065 |
| 656,3 (H) | 0,411 | 0,394 | 0,311 | 0,437 | 0,044 |
| 667,8 (He) | 0,406 | 0,363 | 0,307 | 0,429 | 0,039 |

1) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 11. p. 489. 1903.

2) F. Pockels, Physik. Zeitschr. 5. p. 152 u. 460. 1904; F. Ehrenhaft, l. c. p. 887.

3) F. F. Martens u. F. Grünbaum, Ann. d. Phys. 12. p. 948. 1903.

**Bemerkungen:** Ag I. Dunkelolivgrün. Frisch hergestellt.

Au I. Rubinrot mit ganz schwachem Stich ins Blaue. Zusatz einer Spur Gelatine. 12 Tage nach der Herstellung gemessen.

Au II. 11 Wochen nach der mit Alkalizusatz (aber ohne Gelatine) erfolgten Herstellung gemessen. Die Lösung ist tief indigoblau geworden. Beim Filtrieren bleibt auf dem Filter ein Satz zurück. Das Filtrat (auf das sich die obigen Zahlen beziehen) ist indigoblau, etwas heller als ursprünglich, in 12 cm dicker Schicht undurchsichtig.

Pt I. Dunkelbraun. Sofort nach der Herstellung gemessen.

Die 0,04 proz. Mastixemulsion zeigt sehr schön die charakteristische Farbe der trüben Medien: im auffallenden Licht blau, im durchgehenden Licht orange. —

Im Diagramm Fig. 2 ist für die untersuchten Lösungen $\varepsilon$ als Funktion der Wellenlänge aufgetragen. Die Kurven für

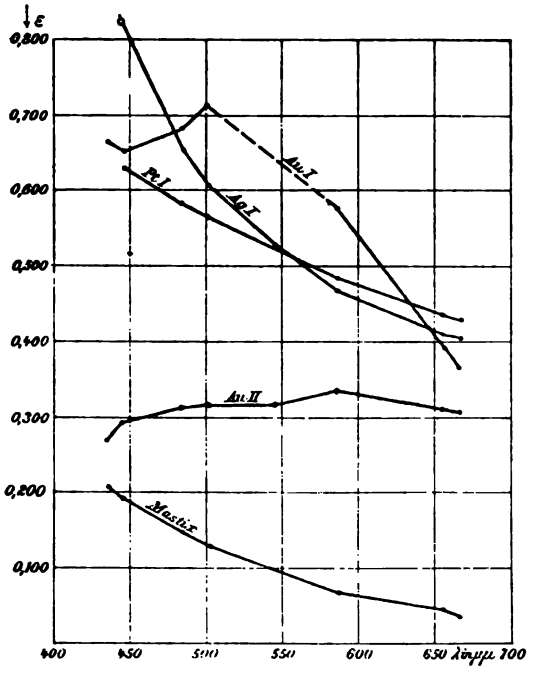



Fig. 2. Extinktionskoeffizient als Funktion der Wellenlänge.

Au I und Au II weisen Maxima auf, doch handelt es sich nicht um scharfe Absorptionsstreifen, sondern um ganz flach verlaufende Maxima. Die Kurven für Ag I und Pt I steigen ebenso wie die von Mastix im ganzen sichtbaren Gebiet gleich-

mäßig an, doch sind die Werte der $\varepsilon$ bei den Metallen bei weitem größer als bei Mastix.

Die Untersuchung der Absorptionsspektra im Ultraviolett (mittels Quarz–Quecksilberlampe, Quarzlinse, Cornuschem Prisma, Quarztrog von 4,7 cm wirksamer Schichtdicke, Bariumplatincyanürschirm) zeigte, wie dies bereits Ehrenhaft gefunden hat, daß die kolloidalen Silberlösungen bei etwa $\lambda = 330\,\mu\mu$ wieder völlig durchlässig sind; hieraus folgt also auch für Ag-Lösungen ein Absorptionsmaximum bei etwa $\lambda = 380\,\mu\mu$. Dagegen habe ich die Angabe von Ehrenhaft hinsichtlich von in Alkohol zerstäubtem Platin, bei dem er im Ultraviolett Durchlässigkeit gefunden hat, und bei dem er ein Absorptionsmaximum bei $\lambda = 480\,\mu\mu$ findet, nicht bestätigen können; Platinlösungen, die ich durch Zerstäubung von Pt sowohl in Wasser als auch in Alkohol dargestellt habe, erwiesen sich auch in ziemlicher Verdünnung für Ultraviolett als völlig undurchlässig. Dagegen kann ich die Angabe von Ehrenhaft bestätigen, daß Au-Lösungen im Ultraviolett deutlich, aber ziemlich schwach absorbieren, so daß die im Blau nach kleineren $\lambda$ hin abnehmende Absorption, wenn man ins Ultraviolett geht, weiter abzunehmen scheint. Zieht man aus der von mir bestimmten Lage des Absorptionsmaximums Schlüsse auf die Größe der Metallteilchen, indem man diese als elektromagnetische Resonatoren auffaßt, so würden die Metalle nach aufsteigender Teilchengröße geordnet in folgender Weise aufeinanderfolgen: Pt, Ag, Au. Eine andere Reihenfolge ergibt sich jedoch aus den weiter unten folgenden Polarisationsbeobachtungen. Dasselbe gilt übrigens auch für die Ehrenhaftschen Messungen; doch weist Ehrenhaft nicht darauf hin.

Mit Sicherheit folgt sowohl aus den Messungen von Hrn. Ehrenhaft als auch aus den meinen, daß die Absorptionskurve bei den kolloidalen Metallen anders verläuft wie bei den trüben Lösungen; die Absorption nimmt nicht einfach mit abnehmender Wellenlänge zu, sondern es treten Absorptionsmaxima auf. Daraus geht mit Sicherheit hervor, daß die Farbe der kolloidalen Metalle *nicht*, wie die der trüben Lösungen, *allein* durch die diffuse Lichtzerstreuung erklärt werden kann, sondern daß die kolloidalen Metalle außerdem eine Eigenfarbe besitzen.

Inwieweit durch Einführung der optischen Konstanten der Metalle in die Thomsonsche Rechnung deren Resultat hinsichtlich der Lage des Polarisationsmaximums gegen den einfallenden Strahl etwa beeinflußt wird, bleibt abzuwarten.

5. Zur Messung der Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes unter verschiedenen Winkeln gegen den einfallenden Strahl bediente ich mich des Martensschen Polarisationsphotometers[1]), und zwar in der in Fig. 3 skizzierten Anordnung,

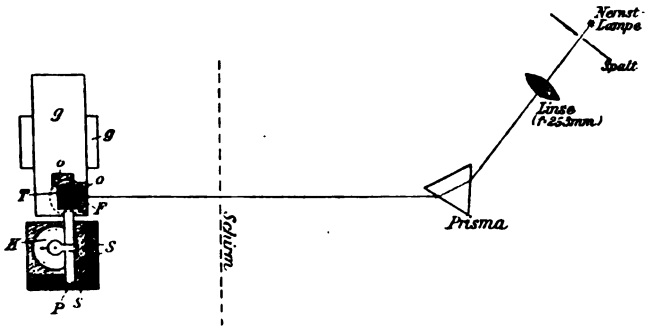



Fig. 3.

über die nur folgendes gesagt zu werden braucht. Als Lichtquelle diente ein äußerst lichtstarker, sogenannter Nernstscher Intensivbrenner (für 220 Volt und 1 Amp.). Die untere der Glasplatten $g$ war auf ein mit drei Stellschrauben versehenes Tischchen fest aufgekittet; auf ihr war die obere durch eine Spur Öl mit harter Gleitung verschiebbar. Auf die obere Glasplatte waren im rechten Winkel zueinander die beiden Objektträger $O\,O$ mit Canadabalsam aufgekittet; es war dadurch leicht möglich, den die zu untersuchenden kolloidalen Metallösungen enthaltenden parallelepipedischen, oben verschlossenen Trog $T$ von $3 \times 3{,}2 \times 10\,\mathrm{cm}^3$, der so ausgesucht war, daß der in der Figur mit einem Bogen bezeichnete Winkel genau gleich $1\,R$ war, um 90° zu drehen. Mit Hilfe dieser Vorrichtungen konnte der ganze Apparat in leicht ersichtlicher Weise so justiert werden, daß 1. die Vorderfläche des Troges und 2. die Polarimeterachse senkrecht zur Richtung des eintretenden Strahles war.

1) F. F. Martens, Physik. Zeitschr. 1. p. 299. 1899—1900.

Das um seine Längsachse drehbare Polarimeter $P$ ist seitlich an einem Konus befestigt, der um die den Teilkreis $K$ und überhaupt das ganze Instrument (wegen der genaueren Montierung und Konstruktion muß auf die Martenssche Abhandlung verwiesen werden) tragende Achse drehbar ist (s. Fig. 3). Um das Polarimeter unter jedem beliebigen Winkel gegen die Seitenfläche des Troges $T$ orientieren und diesen Winkel am Teilkreis $K$ ablesen zu können, wurde das ganze Instrument auf einer doppelten Schlittenverschiebung montiert (in Fig. 3 durch die Schienen $SS$ angedeutet), die eine beliebige Translation mit dem ganzen Instrument vorzunehmen gestattete.

Da sich Licht verschiedener Farbe oft als sehr verschieden polarisiert erwies, so wurden sämtliche Messungen mit gelbgrünem Licht vorgenommen, das durch passende Blenden aus dem spektral zerlegten weißen Licht allein herausgenommen wurde. Der Trog $T$ war gegen fremdes Licht sorgfältig durch Schirme geschützt; einige von ihnen sind in Fig. 3 durch punktierte Linien angedeutet. Das Licht trat durch das rechteckige Fensterchen $F$ ein. An der Beobachtungslupe des Polarimeters war ein doppeltes, lichtundurchlässiges schwarzes Tuch angebracht, unter dem sich der Kopf des Beobachters befand.

6. Über die Benutzung des Polarimeters zur Bestimmung des Schwingungszustandes des auffallenden Lichtes sage ich hier nur das Nötigste, indem ich mich an Martens[1]) anlehne. Das zu untersuchende Licht enthalte die Intensitätsmengen $N$ bez. $P$ natürlichen, bez. geradlinig polarisierten Lichtes. Dann kann man sich, wie Fig. 4 veranschaulicht, das Licht zerlegt denken in zwei Komponenten $N/2$ und $N/2 + P$, welche in zwei zueinander senkrechten Richtungen $os$ und $or$ schwingen. Das auf die zentrische Öffnung des Instrumentes auffallende Licht gelangt durch ein Wollastonprisma zu den beiden Hälften eines Zwillingsprismas, die als Vergleichsfelder dienen. Das

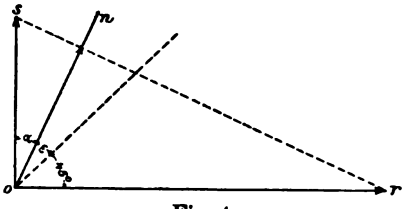


Fig. 4.

1) F. F. Martens, l. c.

von ihnen ins Auge kommende Licht ist in zwei zueinander senkrechten Richtungen linear polarisiert. Der Beobachter kann daher durch Drehen des Analysatornicols in jedem Falle auf gleiche Helligkeit der Vergleichsfelder einstellen. Man stellt nun zunächst bei Eintritt natürlichen Lichtes das Analysatornicol auf gleiche Helligkeit der Vergleichsfelder ein. Läßt man dann das zu untersuchende teilweise geradlinig polarisierte Licht eintreten, und dreht das ganze Photometer bei ungeänderter Stellung des Analysatornicols um seine Längsachse, so gibt es nur vier Stellungen, in denen die beiden Vergleichsfelder gleich hell erscheinen. In diesen vier Stellungen bildet die bekannte Schwingungsebene des vom Analysatornicol durchgelassenen Lichtes mit der gesuchten Schwingungsebene Winkel von 0° oder 90°. Dreht man das ganze Photometer um 45° aus der Gleichheitsstellung heraus, so fallen die Schwingungsrichtungen der beiden photometrischen Vergleichsfelder mit $o\,s$ und $o\,r$ zusammen (Fig. 4). Um die Felder auf gleiche Helligkeit zu bringen, muß man das Analysatornicol um den Winkel $\varepsilon$ drehen, so daß die Schwingungsrichtung $o\,n$ des Nicols mit der Schwingungsrichtung des einen Vergleichsfeldes den Winkel $\alpha$ bildet. Als Polarisationsgrad oder Polarisationsfaktor definieren wir nach Brewster das Verhältnis $\mathfrak{P} = P/(N+P)$ des polarisierten Lichtanteiles zur gesamten Lichtmenge. Da, wie aus Fig. 4 ersichtlich

$$\frac{N/2}{N/2+P} = \mathrm{tg}^2\,\alpha,$$

so folgt:

$$\mathfrak{P} = \frac{\dfrac{N/2+P}{N/2} - 1}{\dfrac{N/2+P}{N/2} + 1} = \cos 2\alpha = \sin 2\varepsilon.$$

7. *Einfluß der Trogwände.* Beim Durchgang des diffus zerstreuten Lichtes durch die Grenzen Wasser–Glas und Glas–Luft findet erstens eine Brechung und zweitens, da das Licht in der Einfallsebene polarisiert ist, eine Depolarisation des Lichtes statt. Sei $\nu$ der Brechungsexponent des Wassers gegen Luft, $n$ derjenige des Glases gegen Luft. In den folgenden Rechnungen ist angenommen: $\nu = 1{,}335$; $n = 1{,}52$. Die Bedeutung der Winkel $\varphi$, $\psi$ und $\varphi'$ geht aus Fig. 5 hervor.

Die folgende Tabelle enthält die zusammengehörigen Werte von $\varphi'$ und $\varphi$, die sich ergeben aus $\sin\varphi = \frac{\sin\varphi'}{\nu'}$.

| $\varphi'$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 45° | 50° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | 0° | 7° 28,4′ | 14° 50,7′ | 21° 59,7′ | 28° 47,0′ | 31° 59,0′ | 35° 1,0 |

Bei den Versuchen wurde $\varphi'$ von 10 zu 10° variiert; dementsprechend ist in den die Resultate enthaltenden Tabellen der einfachen Übersicht wegen stets der Polarisationsfaktor als Funktion von $\varphi'$ angegeben. In den Kurven dagegen ist stets $\mathfrak{P}$ als Funktion von $\varphi$ aufgetragen.

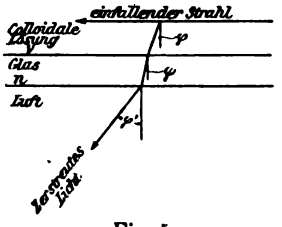


Fig. 5.

Es handelt sich jetzt noch darum, aus dem in Luft gemessenen Wert von $\varepsilon$ die Polarisation im Innern der Lösung zu bestimmen. Die zu diesem Zweck an $\sin 2\varepsilon$ anzubringende Korrektion wird naturgemäß am größten für große $\varphi'$ und kleine $\varepsilon$ und ist deswegen bei Metallösungen, welche, besonders wenn sie frisch hergestellt sind, das Licht oft nicht sehr stark polarisieren, nicht zu vernachlässigen.

Die Komponenten des unter dem Winkel $\varphi$ verlaufenden teilweise polarisierten Lichtes seien in der Lösung $\frac{N}{2}+P$ und $\frac{N}{2}$; dann ist $\mathfrak{P} = \frac{P}{N+P}$. Die entsprechenden Komponenten des unter dem Winkel $\varphi'$ in Luft verlaufenden Lichtes seien $J_\parallel$ und $J_\perp$ (die Zeichen $\parallel$ und $\perp$ zeigen an, daß es sich um parallel, bez. senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht handelt); dann berechnet sich aus den Fresnelschen Formeln:

$$J_\parallel = \left(\frac{N}{2}+P\right)\cdot\frac{\sin 2\varphi\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}\cdot\frac{\sin 2\psi\,.\,\sin 2\varphi'}{\sin^2(\psi+\varphi')} = a\left(\frac{N}{2}+P\right),$$

$$J_\perp = \frac{N}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi\,.\,\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)\cos^2(\varphi-\psi)}\cdot\frac{\sin 2\psi\sin 2\varphi'}{\sin^2(\psi+\varphi')\cos^2(\psi-\varphi')} = b\cdot\frac{N}{2}.$$

Es ist ferner:

$$\sin 2\varepsilon = \frac{J_\parallel - J_\perp}{J_\parallel + J_\perp} = \frac{a\left(\frac{N}{2}+P\right) - b\cdot\frac{N}{2}}{a\left(\frac{N}{2}+P\right) + b\cdot\frac{N}{2}};$$

hieraus folgt:

$$\frac{\frac{N}{2}+P}{\frac{N}{2}}=\frac{b}{a}\,\frac{1+\sin 2\varepsilon}{1-\sin 2\varepsilon}$$

und

$$\mathfrak{P}=\frac{\frac{N/2+P}{N/2}-1}{\frac{N/2+P}{N/2}+1}=\frac{\frac{b}{a}\,\frac{1+\sin 2\varepsilon}{1-\sin 2\varepsilon}-1}{\frac{b}{a}\,\frac{1+\sin 2\varepsilon}{1-\sin 2\varepsilon}+1};$$

darin ist:

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{\cos^2(\varphi-\psi)\cos^2(\varphi'-\psi)};\quad \sin\psi=\frac{\sin\varphi'}{n};\quad \sin\varphi=\frac{\sin\varphi'}{\nu}.$$

Nach diesen Formeln ist die folgende Korrektionstabelle berechnet. Dieselbe enthält die Zahlen, welche zu $\sin 2\varepsilon$ zu addieren sind, wenn $\varphi' \lesseqgtr 0$, um den Polarisationsgrad des unter dem Winkel $\varphi$ verlaufenden Lichtes in der Lösung zu erhalten.

| $2\varepsilon =$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}_{\varphi'=0} = \sin 2\varepsilon =$ | 0,000 | 0,174 | 0,342 | 0,500 | 0,643 | 0,766 | 0,866 | 0,940 | 0,985 | 1,000 |
| $\varphi' = 10°$ | 0,002 | 0,002 | 0,002 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| $\varphi' = 20°$ | 0,008 | 0,007 | 0,007 | 0,006 | 0,004 | 0,003 | 0,002 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| $\varphi' = 30°$ | 0,019 | 0,018 | 0,017 | 0,014 | 0,011 | 0,008 | 0,005 | 0,002 | 0,000 | 0,000 |
| $\varphi' = 40°$ | 0,037 | 0,035 | 0,032 | 0,027 | 0,021 | 0,015 | 0,009 | 0,004 | 0,001 | 0,000 |
| $\varphi' = 45°$ | 0,049 | 0,047 | 0,043 | 0,036 | 0,028 | 0,020 | 0,012 | 0,005 | 0,001 | 0,000 |
| $\varphi' = 50°$ | 0,064 | 0,061 | 0,055 | 0,046 | 0,036 | 0,025 | 0,015 | 0,007 | 0,002 | 0,000 |

Die Messungen des Winkels $\varepsilon$ wurden stets in zwei um 90° verschiedenen Stellungen des Polarimeters vorgenommen. Jeder $\mathfrak{P}$-Wert ist das Mittel aus mindestens vier Einstellungen.

8. *Gold* (vgl. das Diagramm Fig. 6).[1] Eine aus ganz frisch destilliertem und kohlensäurefrei gemachtem Wasser unter Alkalizusatz hergestellte, prachtvoll rubinrote Goldlösung Au III lieferte folgende $\mathfrak{P}$-Werte (Au III, 1):

| $\varphi'$ | −50° | −45° | −40° | −30° | −20° | −10° | 0° | +10° | +20° | +30° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,382 | 0,313 | 0,315 | 0,293 | 0,257 | 0,193 | 0,228 | 0,196 | 0,158 | 0,106 |

1) Über die Bedeutung von $\varphi$ und $\varphi'$ vgl. p. 11 und 12.

Die Lösung wurde nun bis zum nächsten Tage stehen gelassen; sie hatte dann einen Stich ins Bläuliche angenommen, war aber noch schön rubinrot. Folgende Werte ergaben sich (Au III, 2):

| $\varphi'$ | $-40^0$ | $-20^0$ | $0^0$ | $+20^0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,507 | 0,466 | 0,416 | 0,337 |

Es wurde der Lösung nun eine Spur verdünnter HCl zugegeben; nach einer Stunde war die Lösung bläulich-rot, und es ergab sich (Au III, 3):

| $\varphi'$ | $-40^0$ | $-20^0$ | $0^0$ | $+20^0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,545 | 0,523 | 0,435 | 0,314 |

Nach weiteren zwei Stunden ist die Lösung tiefblau, und es beginnt sich bereits ein Bodensatz zu bilden; folgende Werte von $\mathfrak{P}$ werden gemessen (Au III, 4):

| $\varphi'$ | $-40^0$ | $-20^0$ | $-10^0$ | $0^0$ | $+10^0$ | $+30^0$ | $+40^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,451 | 0,668 | 0,742 | 0,755 | 0,692 | 0,489 | 0,406 |

Die Erscheinungen sind also hier folgende: die Polarisation der frisch hergestellten Lösung ist relativ schwach; das gemessene Polarisationsmaximum liegt unter $125^0$ gegen den einfallenden Strahl; altert die Lösung, so nimmt die Polarisation zu; dieser Prozeß wird durch HCl-Zusatz beschleunigt: die Polarisation wächst enorm an, während sich gleichzeitig das Polarisationsmaximum so verschiebt, daß es schließlich unter $90^0$ gegen den einfallenden Strahl liegt. Gleichzeitig war die Intensität des zerstreuten Lichtes sehr stark geworden. Die Au III-Lösung zeigt nunmehr hinsichtlich des Verlaufes der $\mathfrak{P}$-Kurve genau das gleiche Verhalten wie eine trübe Lösung. Zum Vergleich wurde die Polarisation der 0,04 proz. Mastixtrübung (vgl. p. 7), sowie diejenige einer Natriumsilicatlösung (vom spez. Gewicht 1,001), in die ein $CuSO_4$-Krystall geworfen war[1]), und die bereits $2^1/_2$ Jahre alt war,

1) Diese Lösung war von Hrn. Geheimrat Quincke hergestellt worden.

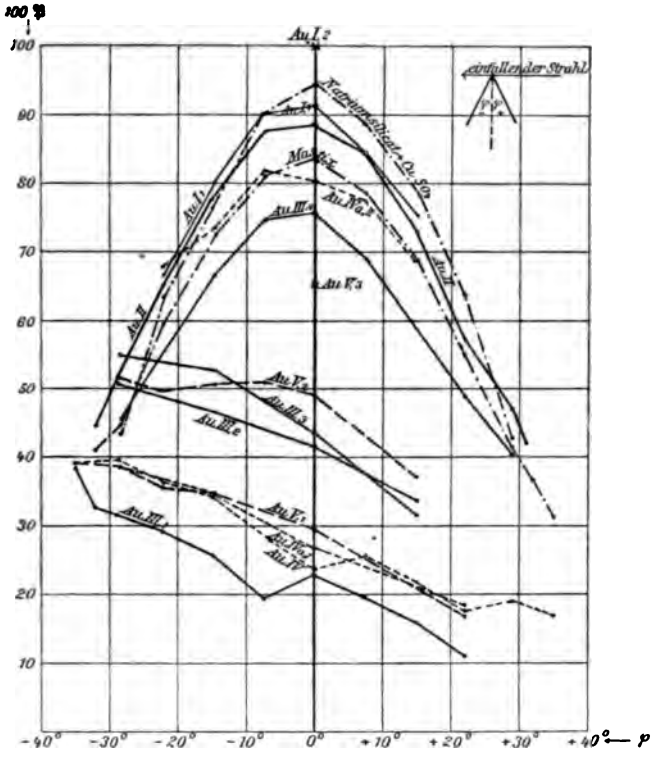



Fig. 6.

gemessen. Beide waren im auffallenden Licht himmelblau. Es ergab sich (vgl. Fig. 6)

0,04 proz. Mastixtrübung:

| $\varphi'$ | −45° | −40° | −30° | −20° | −10° | 0° | +10° | +20° | +30° | +40° | +45° | +50° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % | 0,409 | 0,448 | 0,597 | 0,724 | 0,812 | 0,831 | 0,787 | 0,687 | 0,544 | 0,410 | 0,365 | 0,312 |

Natriumsilicatlösung + $CuSO_4$:

| $\varphi'$ | −40° | −30° | −20° | −10° | 0° | +10° | +20° | +30° | +40° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % | 0,435 | 0,633 | 0,768 | 0,900 | 0,944 | 0,883 | 0,783 | 0,639 | 0,427 |

Ganz ähnlich ist der Verlauf der Polarisationskurve bei der 11 Wochen alten, tief indigoblauen Goldlösung Au II (näheres vgl. p. 7), die folgende $\mathfrak{P}$-Werte ergab:

| $\varphi'$ | $-45°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ | $+40°$ | $+45°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,444 | 0,516 | 0,649 | 0,775 | 0,873 | 0,884 | 0,843 | 0,731 | 0,565 | 0,469 | 0,412 |

Um den Einfluß des Gelatinezusatzes auf die Polarisation beim Altern der Lösung und beim Zusatz von Säure zu studieren, wurden folgende Versuche angestellt: Der Hälfte einer ganz frisch hergestellten roten Au IV-Lösung wurde eine Spur Gelatine (0,01 g auf 100 ccm Lösung) zugesetzt (Au IVa). Beide Lösungen, sofort nach der Herstellung gemessen, ergaben einen ganz ähnlichen Verlauf der Polarisationskurve, und zwar

Au IV:

| $\varphi'$ | $-50°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ | $+40°$ | $+50°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,385 | 0,399 | 0,365 | 0,341 | 0,308 | 0,235 | 0,252 | 0,215 | 0,178 | 0,190 | 0,168 |

Au IVa, 1:

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-20°$ | $0°$ | $+30°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,387 | 0,349 | 0,267 | 0,183 |

Während nun Au IV nach einigen Tagen blau geworden war, behielt Au IVa dauernd ihre tiefrote Farbe. Doch ergaben sich 13 Tage nach der Herstellung folgende Polarisationswerte (Au IVa, 2):

| $\varphi'$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,672 | 0,732 | 0,818 | 0,802 | 0,778 | 0,687 |

*Das enorme Ansteigen der Polarisation und die Verschiebung des Polarisationsmaximums findet also beim Altern der Lösung, wenn der Metallösung Gelatine zugesetzt ist, in gleicher Weise statt wie ohne Gelatine.*

Diese Tatsache erklärt den Verlauf der $\mathfrak{P}$-Kurve bei der ersten von mir untersuchten Goldlösung (Au I). Es war dies eine rubinrote Lösung mit ganz schwachem Stich ins Blaue, mit Gelatinezusatz. Ihre Polarisation wurde erst 12 Tage nach ihrer Herstellung gemessen (vgl. auch p. 7), und infolge-

dessen ergab sich der für gewöhnliche trübe Medien charakteristische Verlauf der $\mathfrak{P}$-Kurve (Fig. 6).

$\mathfrak{P}$-Werte für Au I, 1:

| $\varphi'$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,660 | 0,798 | 0,900 | 0,914 | 0,844 | 0,751 |

In der Folge blieb die rubinrote Farbe der Lösung dauernd erhalten. 10 Tage nach der eben angeführten Messung ergab sich für $\varphi' = 0$: $\mathfrak{P} = 1{,}000$ (Au I, 2 in Fig. 6); das unter 90° gegen den einfallenden Strahl zerstreute Licht war von linear polarisiertem nicht mehr meßbar verschieden. Gleichzeitig war die Intensität des zerstreuten Lichtes sehr schwach geworden.

Eine weitere, frisch hergestellte, rote Au V-Lösung mit Gelatinezusatz lieferte folgende $\mathfrak{P}$-Werte (Au V, 1):

| $\varphi'$ | $-50°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $0°$ | $+20°$ | $+30°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,387 | 0,387 | 0,356 | 0,349 | 0,294 | 0,210 | 0,173 |

Der Verlauf der $\mathfrak{P}$-Kurve ist hier ein ganz ähnlicher wie bei Au IV und Au IVa, 1. Es wurden nunmehr der Au V-Lösung einige Tropfen sehr verdünnter HCl zugesetzt; die Lösung behielt dauernd ihre rote Farbe, doch ergaben sich nach 14 Stunden folgende Werte für die Polarisation (Au V, 2):

| $\varphi'$ | $-50°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,453 | 0,505 | 0,495 | 0,506 | 0,509 | 0,491 | 0,362 |

Nach weiteren 48 Stunden ergab sich für $\varphi' = 0$: $\mathfrak{P} = 0{,}653$ (Au V, 3 in Fig. 6). (Die Intensität des zerstreuten Lichtes war schwach geworden.) *Es findet also auch die Änderung der Polarisationskurve durch Säurezusatz statt, gleichgültig, ob der Lösung Gelatine zugesetzt wird oder nicht.*

Mit diesen Versuchsergebnissen ist die bisherige Erklärung der optischen Eigenschaften der Metallkolloide, nämlich der Lage des Polarisationsmaximums des von ihnen zerstreuten Lichtes gegen den einfallenden Strahl und ihrer Farbe, allein durch die Teilchengröße nicht vereinbar. Es müssen vielmehr für diese Eigenschaften (mindestens) zwei Faktoren maßgebend sein: der eine wird durch den Zusatz einer Spur Gelatine

beeinflußt, der andere nicht. Der eine dieser Faktoren wird wohl in der Teilchengröße zu suchen sein, der andere scheint mir, wenn ich einer Vermutung hier Ausdruck geben darf, in chemischen Vorgängen zu liegen; die Entscheidung dieser Fragen erwarte ich von ultramikroskopischen Versuchen. Sie wird vermutlich auch die Rolle, die das Schutzkolloid (Gelatine) spielt, und die Tatsache aufhellen, daß sich aus meinen, wie auch aus den Ehrenhaftschen Messungen die Größe der Teilchen für verschiedene Metalle in verschiedener Reihenfolge ergibt, je nachdem man sie aus der Lage des Absorptionsmaximums oder aus der Lage des Polarisationsmaximums gegen den einfallenden Strahl bestimmt (unter der Voraussetzung, daß für beide die Teilchengröße allein maßgebend sei, vgl. p. 8).

Auffallend ist das starke Ansteigen der Polarisation bei fortschreitender Koagulation; man könnte geneigt sein, dies auf die bei der Koagulation stattfindende Verringerung der Teilchenzahl im Sinne der Soretschen Theorie (vgl. p. 2) zurückzuführen. In diesem Falle müßte sich aber ein Wachsen der Polarisation auch durch Verdünnung der Lösung erzielen lassen. Nun hat aber Ehrenhaft[1]) bei seinen an kolloidalen Metallösungen angestellten Versuchen gefunden, daß die Polarisation bei zunehmender Verdünnung stark abnimmt. Ich selbst habe eine ziemlich konzentrierte, dunkelolivgrüne Ag-Lösung auf die Abhängigkeit der Polarisation des unter 90° zerstreuten Lichtes von der Konzentration untersucht und teile die Resultate hier mit.

| Konzentration: | 1 | $^1/_2$ | $^1/_4$ | $^1/_8$ | $^1/_{16}$ | $^1/_{32}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,405 | 0,421 | 0,431 | 0,426 | 0,418 | 0,403 |

Die verdünnteste Lösung war mit bloßem Auge von reinem Wasser nicht zu unterscheiden; nur mit Hilfe eines intensiven Lichtbündels erwies sich ihre optische Inhomogenität. Die beobachteten geringen Schwankungen in den $\mathfrak{P}$-Werten können zur Erklärung des in Rede stehenden Phänomens im angedeuteten Sinne in keiner Weise herangezogen werden.

9. *Platin* (vgl. das Diagramm Fig. 7). Ganz ähnliche Resultate wie das kolloidale Gold lieferte kolloidales Platin.

1) F. Ehrenhaft, l. c.

Eine ganz frisch hergestellte tiefbraune Pt-Lösung ergab folgende $\mathfrak{P}$-Werte (Pt I, 1):

| $\varphi'$ | $-50°$ | $-45°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ | $+40°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,236 | 0,234 | 0,243 | 0,248 | 0,237 | 0,217 | 0,222 | 0,201 | 0,176 | 0,115 | 0,103 |

Die ziemlich schwache Polarisation besitzt ein Maximum bei 112°. Die Lösung wurde nun sich selbst überlassen und

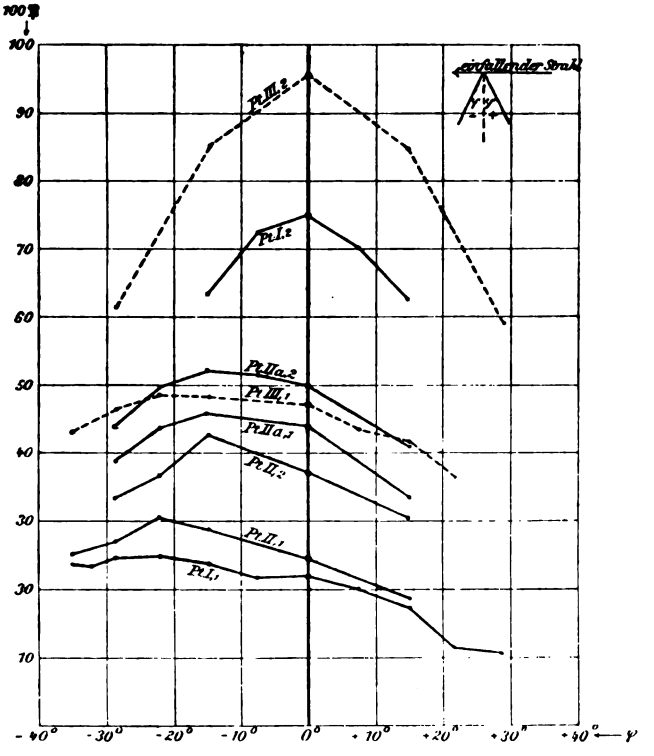



Fig. 7.

nach 17 Tagen wiederum durchgemessen, wobei sich folgende $\mathfrak{P}$-Werte ergaben (Pt I, 2):

| $\varphi'$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,637 | 0,727 | 0,748 | 0,703 | 0,628 |

Die Polarisation ist enorm angestiegen und besitzt jetzt ihr Maximum unter 90° gegen den einfallenden Strahl.

Es wurde nun dieser Lösung eine Spur HCl zugefügt, um ein weiteres Steigen der Polarisation zu konstatieren. Nach einer Stunde war aber alles Platin ausgefallen. Es wurde deswegen eine frische Pt II-Lösung hergestellt, die folgende $\mathfrak{P}$-Werte ergab (Pt II, 1):

| $\varphi'$ | $-50°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $0°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,251 | 0,269 | 0,303 | 0,287 | 0,243 | 0,187 |

Der Verlauf der Kurve ist ähnlich wie der von Pt I, 1. Dieser Lösung wurde nun eine Spur sehr verdünnter HCl hinzugefügt und sofort die Messung wiederholt. Es ergab sich (Pt II, 2):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $0°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,335 | 0,365 | 0,425 | 0,370 | 0,301 |

Die Polarisation ist auf größere Werte, und ihr Maximum von 112° auf 105° gegen den einfallenden Strahl gesprungen.

Eine gelatinehaltige Pt-Lösung lieferte folgende $\mathfrak{P}$-Werte (Pt IIa, 1):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $0°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,389 | 0,435 | 0,457 | 0,439 | 0,533 |

Dieser Lösung wurde eine Spur HCl hinzugefügt; nach Verlauf von 20 Stunden ergaben sich folgende $\mathfrak{P}$-Werte (Pt IIa, 2):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,437 | 0,499 | 0,521 | 0,513 | 0,500 | 0,410 |

Das Ansteigen der Polarisation ist auch hier evident. In noch höherem Maße zeigte es sich bei der folgenden, frisch hergestellten, gelatinehaltigen Pt-Lösung. Diese ergab unmittelbar nach der Herstellung der Lösung folgende $\mathfrak{P}$-Werte (Pt III, 1):

| $\varphi'$ | $-50°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,429 | 0,461 | 0,486 | 0,482 | 0,468 | 0,433 | 0,415 | 0,362 |

20 Tage nach der Herstellung der Lösung wurden folgende $\mathfrak{P}$-Werte gemessen (Pt III, 2):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-20°$ | $0°$ | $+20°$ | $+40°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,618 | 0,853 | 0,958 | 0,846 | 0,592 |

10. *Silber* (vgl. das Diagramm Fig. 8). Das Polarisationsmaximum frisch hergestellter Ag-Lösungen liegt unter 97,5° gegen den einfallenden Strahl. Wo bei den Gold- und Platin-

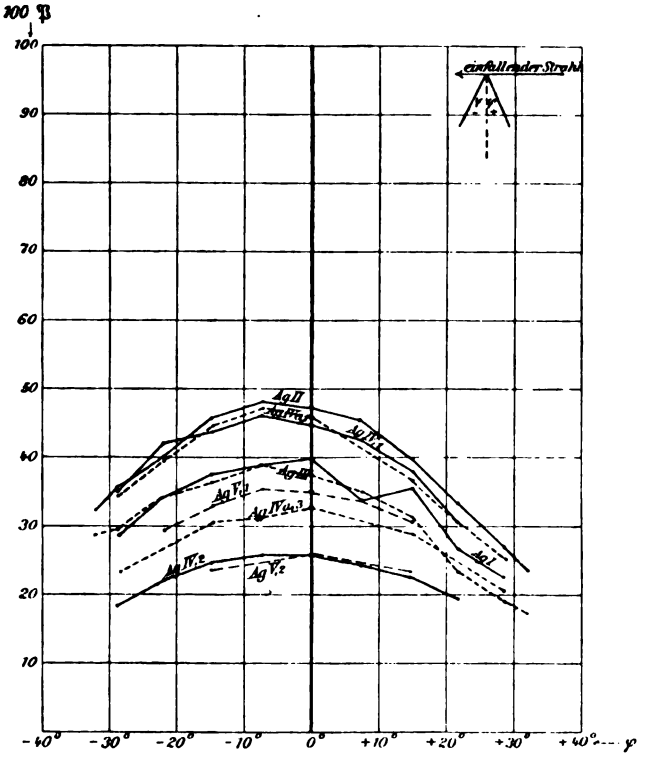



Fig. 8.

lösungen ein Steigen der Polarisation beobachtet wurde, findet bei Silberlösungen ein Abnehmen der Polarisation statt. Sonst sind die Erscheinungen hinsichtlich des Einflusses von Säure- und Gelatinezusatz auf die Polarisation des zerstreuten Lichtes die gleichen wie bei Au und Pt.

Lösung Ag I war eine dunkelbraungrüne und wurde 14 Tage nach ihrer Herstellung durchgemessen, wobei sich folgende Werte ergaben:

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ | $+40°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,282 | 0,337 | 0,374 | 0,387 | 0,399 | 0,338 | 0,359 | 0,267 | 0,226 |

Die olivgrüne Lösung Ag II, drei Tage nach der Herstellung gemessen, lieferte folgende $\mathfrak{P}$-Werte:

| $\varphi'$ | $-45°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ | $+40°$ | $+45°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,324 | 0,360 | 0,399 | 0,455 | 0,478 | 0,467 | 0,452 | 0,398 | 0,330 | 0,267 | 0,232 |

Die sofort nach der Herstellung gemessene Lösung Ag III ergab folgende Werte von $\mathfrak{P}$:

| $\varphi'$ | $-45°$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ | $+40°$ | $+45°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,283 | 0,292 | 0,338 | 0,362 | 0,388 | 0,372 | 0,349 | 0,309 | 0,236 | 0,191 | 0,170 |

Eine frisch hergestellte olivgrüne Ag IV-Lösung wurde in zwei Teile geteilt und der eine Teil mit einer Spur Gelatine versehen (Ag IVa). Die gelatinefreie Lösung lieferte folgende $\mathfrak{P}$-Werte (Ag IV, 1):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,358 | 0,419 | 0,432 | 0,449 | 0,445 | 0,424 | 0,377 | 0,303 |

Nach Zusatz einiger Tropfen verdünnter Salzsäure änderte momentan das diffus zerstreute Licht seine Farbe, indem es von dunkelgrau in ein helles Braun überging; nach einiger Zeit begann auch die Farbe der Lösung im durchgehenden Licht sich zu ändern; nach zwei Stunden war letztere hellbraun geworden, und es ergaben sich folgende Werte für $\mathfrak{P}$ (Ag IV, 2):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ | $+30°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,181 | 0,219 | 0,242 | 0,256 | 0,255 | 0,244 | 0,227 | 0,195 |

Dabei hatte die bei Ag ohnehin sehr große Intensität des zerstreuten Lichtes noch bedeutend zugenommen.

Ganz analoge Resultate lieferte eine 14 Wochen alte olivgrüne Ag V-Lösung, nämlich vor Säurezusatz (Ag V, 1):

| $\varphi'$ | $-30°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+10°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,291 | 0,328 | 0,354 | 0,348 | 0,337 | 0,306 |

und nach Säurezusatz (Ag V, 2):

| $\varphi'$ | $-20°$ | $0°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,239 | 0,259 | 0,233 |

Die $\mathfrak{P}$-Kurve der gelatinehaltigen Ag IVa-Lösung verlief ganz ähnlich wie die der gelatinefreien Ag IV-Lösung, und zwar ergaben sich folgende Werte (Ag IVa, 1):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+20°$ | $+40°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,351 | 0,441 | 0,466 | 0,453 | 0,364 | 0,249 |

Dieser Lösung wurden einige Tropfen verdünnter Salzsäure zugesetzt. Irgendwelche Farbenänderung trat nicht ein. Nach einer halben Stunde ergaben sich folgende Werte für $\mathfrak{P}$ (Ag IVa, 2; in Fig. 8 nicht gezeichnet):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+20°$ | $+40°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,276 | 0,333 | 0,351 | 0,345 | 0,292 | 0,201 |

Nach 22 Stunden wurde die Messung wiederholt; es ergab sich (Ag IVa, 3):

| $\varphi'$ | $-40°$ | $-20°$ | $-10°$ | $0°$ | $+20°$ | $+40°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{P}$ | 0,233 | 0,303 | 0,311 | 0,327 | 0,286 | 0,204 |

Der Einfluß des Säurezusatzes auf die Polarisation des zerstreuten Lichtes ist also auch hier der gleiche, gleichgültig, ob der Lösung Gelatine zugesetzt ist oder nicht.

11. *Zusammenfassung.*

1. Es wurde das optische Verhalten einer Anzahl kolloidaler Metallösungen untersucht und diese in Gegensatz gestellt zu trüben Lösungen, deren trübe Partikelchen aus Isolatoren bestehen.

2. Während das Polarisationsmaximum des zerstreuten Lichtes bei letzteren unter 90° gegen den einfallenden Strahl gemessen wurde, lag dieses Maximum bei frisch hergestellten Au-Lösungen unter 125°, bei Pt unter 112°, bei Ag unter 97,5° gegen den einfallenden Strahl, in Übereinstimmung mit den Ehrenhaftschen Beobachtungen.

Hiernach müßten frisch hergestellte Au-Lösungen die kleinsten, Ag-Lösungen die größten Teilchen enthalten; eine andere Reihenfolge für die Größe der Teilchen würde sich aus der Lage des Absorptionsmaximums ergeben, wenn man die Teilchen als elektromagnetisch resonierende Kugeln auffaßt.

3. Die Farbe, welche die kolloidalen Metalle im durchgehenden Lichte aufweisen, rührt im Gegensatz zu den gewöhnlichen trüben Lösungen nicht nur von der diffusen Zerstreuung des Lichtes her, sondern die Metallösungen besitzen außerdem eine ausgesprochene Eigenfarbe.

4. Läßt man die Metallösungen altern, oder setzt man ihnen Spuren von Säure zu, so ändern die Lösungen im allgemeinen, bevor sie das Metall ausfallen lassen, ihre Farbe, und gleichzeitig wandert das Polarisationsmaximum, und zwar so, daß es unter 90° gegen den einfallenden Strahl zu liegen kommt. Dabei steigt die Polarisation sehr stark bei Au und Pt, sie nimmt ab bei Ag.

5. Der Zusatz einer Spur Gelatine zu den Lösungen verhindert deren Farbenwechsel und das Ausfallen der Metalle, ist aber auf die Änderung der Polarisationsverhältnisse ohne Einfluß.

6. Diese Ergebnisse sind mit der Erklärung der optischen Eigenschaften der kolloidalen Metalle durch die Teilchengröße allein nicht vereinbar.

Zum Schlusse erlaube ich mir, Hrn. Geheimrat Quincke für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie das freundliche Interesse an meinen Untersuchungen meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Heidelberg, Physik. Inst. d. Univ., 24. Juni 1907.

(Eingegangen 10. August 1907.)

## 2. *Über das Vakuumbolometer;* *von E. Warburg, G. Leithäuser und Ed. Johansen.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

§ 1. Daß man Vorteile erreicht, wenn man einen Bolometerstreifen anstatt, wie gewöhnlich, in der Luft, in einem evakuierten Gefäß montiert, ist öfter bemerkt worden. Doch haben die gelegentlichen Angaben über die Wirkung des Evakuierens keine allgemeine Bedeutung. Man betrachte nämlich zwei schmale, über die Temperatur der Umgebung hinaus erwärmte Bolometerstreifen 1 und 2 von gleicher Länge, aber 2 sei doppelt so breit als 1. Dann ist der Wärmeverlust durch Ausstrahlung für 1 halb so groß als für 2, hingegen der Verlust durch Wärmeleitung der Luft für 1 nur wenig kleiner als für 2. Je schmäler also der Streifen gemacht wird, desto größer ist der Verlust durch Luftleitung im Vergleich zu dem Verlust durch Ausstrahlung, desto erheblicher die vorteilhafte Wirkung des Evakuierens, welche bei schmalen Linearbolometern von großer praktischer Bedeutung wird. Der erwähnte Umstand bewirkt außerdem, daß ein Bolometerstreifen in wichtigen Beziehungen sich anders im Vakuum als in der Luft verhält. Deshalb erscheint eine nähere Untersuchung des „Vakuumbolometers“ nicht überflüssig. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf die Benutzung des Bolometers zu Strahlungsmessungen, sind aber auf die anderen vorkommenden Fälle leicht anzuwenden. Die Versuche wurden von den Herren Leithäuser und Johansen gemacht.

### I. Theorie.

§ 2. Der Bolometerwiderstand $W$ bilde wie üblich den einen Zweig einer Wheatstoneschen Brücke (Fig. 1), $W'$ ist ein $W$ nahezu gleicher, neben $W$ montierter Zweig, $W''$ und $W'''$ sind Vergleichswiderstände. Es werde gesetzt

$$W = W_{18}(1 + \alpha u - \beta u^2), \tag{1}$$

wo $W_{18}$ den Widerstand bei der Temperatur 18°, $W$ denselben bei der Temperatur $18 + u$ bedeutet.

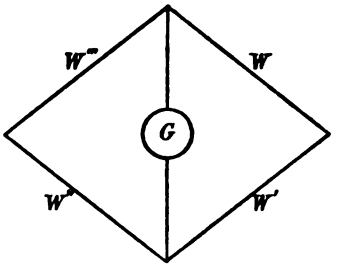


Fig. 1.

Temperaturempfindlichkeit $m$ des Bolometerstreifens heiße der Ausschlag in Skalenteilen, welchen die Temperaturerhöhung $u = 1$ in dem ursprünglich stromlosen Galvanometer hervorbringt. Sind $J_G$ und $G$ Stromstärke und Widerstand des Galvanometerzweiges, so ist

$$(2) \qquad m = \frac{\partial J_G}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial u}\cdot\frac{1}{J_{1G}},$$

wo $J_{1G}$ *den* Wert von $J_G$ bedeutet, welcher einen Ausschlag gleich einem Skalenteil hervorbringt. Wird ein bestimmter Wickelungsraum für das Galvanometer angenommen, so ist

$$(3) \qquad J_{1G} = \frac{1}{c\sqrt{G}},$$

wo $c$ von der Beschaffenheit des Galvanometers abhängt. Die Theorie der Wheatstoneschen Brücke liefert

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial J_G}{\partial W} = \dfrac{J}{W}\cdot\dfrac{1}{\gamma}, \\ \gamma = 1 + \dfrac{G}{W} + \dfrac{G + W''}{W'''}, \end{cases}$$

wo $J$ die Stromstärke im Bolometerzweig bedeutet. Aus (1) bis (4) folgt

$$(5) \qquad m = c\sqrt{G}\cdot\frac{J}{\gamma}\cdot\frac{\alpha - 2\beta u}{1 + \alpha u - \beta u^2}.$$

Die vorteilhafteste Schaltung erhält man, indem man $W' = W$, $W'' = W'''$ und groß gegen $W$, ferner $G = 2W$ macht[1]); sie empfiehlt sich hier gegenüber anderen Schaltungen dadurch, daß bei ihr Thermokräfte am wenigsten stören. Im Grenzfall $W/W'' = 0$ wird $\gamma = 4$ und

$$m = J\cdot\frac{c\sqrt{W}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha - 2\beta u}{1 + \alpha u - \beta u^2}.$$

§ 3. Strahlungsempfindlichkeit $n$ des Bolometerstreifens heiße der Ausschlag, welchen die senkrechte Bestrahlung des

1) Vgl. W. Jäger, Zeitschr. f. Instrumentenk. 26. p. 80. 1906.

Streifens mit der Intensität 1 in dem ursprünglich stromlosen Galvanometer hervorbringt. Es wird im folgenden immer vorausgesetzt, daß das Temperaturgleichgewicht bei der Bestrahlung sich hergestellt hat; ferner daß der Streifen vollkommen schwarz ist. Sei $s$ die auf das Quadratzentimeter pro Sekunde fallende Strahlung in Wärmemaß, so ist

$$n = m \cdot \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{6}$$

§ 4. $\partial u / \partial s$ hängt von den Wärmeverlusten des Streifens durch Leitung und Strahlung ab; doch kommt noch ein anderer Umstand in Betracht. Wenn die Temperatur des Streifens bei der Bestrahlung wächst, so nimmt 1. sein Widerstand $W$ zu, 2. eben deshalb der ihn durchfließende Zweigstrom ab. Diese beiden Wirkungen beeinflussen die Stromleistung $J^2 W$ in entgegengesetztem Sinne; inwieweit sie sich kompensieren, lehrt folgende Betrachtung. Der Streifen habe die Gestalt eines Rechtecks, $l$ cm lang, $b$ cm breit, $d$ cm dick. Die Bedingung des Temperaturgleichgewichtes lautet:

$$J^2 W . 0{,}239 + b l s = V, \tag{7}$$

wo $V$ den Wärmeverlust des Streifens pro Sekunde bedeutet. Daraus folgt

$$0{,}239 \left( J^2 + 2 J W \cdot \frac{\partial J}{\partial W} \right) \frac{\partial W}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + b l = \frac{\partial V}{\partial s}. \tag{8}$$

Nach der Theorie der Wheatstoneschen Brücke kann man setzen

$$\frac{\partial J}{\partial W} = - \frac{J}{W} \cdot \frac{1 - \varphi}{2}. \tag{9}$$

Dadurch wird (8), indem $\partial W / \partial u = W_{18} (\alpha - 2 \beta u)$

$$0{,}239 . J^2 . \varphi . W_{18} . (\alpha - 2 \beta u) \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + b l = \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Sei, indem $1/\varkappa$ der Widerstand in Ohm eines Würfels von 1 cm Seite aus dem Metall des Bolometerstreifens bei 18° bedeutet,

$$j = 0{,}239 \cdot \frac{W_{18}}{l} = 0{,}239 \cdot \frac{1}{\varkappa b d}, \tag{10}$$

d. i. die Stromleistung in Wärmemaß pro Zentimeter. Demnach kann man schreiben

$$J^2 j (\alpha - 2 \beta u) . l . \varphi \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + b l = \frac{\partial V}{\partial s}, \tag{11}$$

oder auch

$$(11a) \qquad \frac{J^2}{b^2}\cdot\frac{0{,}239}{\varkappa d}\cdot(\alpha-2\beta u).\varphi\cdot\frac{\partial u}{\partial s}+1=\frac{1}{bl}\cdot\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Ist die Temperatur längs des Streifens konstant, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}$$

und man erhält

$$(11b) \qquad \frac{\partial u}{\partial s}=\frac{bl}{\partial V/\partial u-J^2 j(\alpha-2\beta u).l.\varphi}.$$

Es ist

$$(12)\quad \frac{1-\varphi}{2}=\frac{(G+W''+W''')(B+W\,W''/W''')+W''(G+W''')}{\begin{array}{l}B[(G+W''+W''')(1+W''/W''')+G(W''+W''')/W]\\ +b\,W''(2+W/W'''+W'''/W)+W''(W+W''')(1+W''/W''')\end{array}},$$

wo $B$ den Batteriewiderstand bedeutet. Für den besonderen Fall $W''=W'''$, $W/W''=0$, $G=2W$ (§ 2) wird

$$\frac{1-\varphi}{2}=\frac{2B+W''}{8B+4W''}=\frac{1}{4}, \qquad \varphi=\frac{1}{2}.$$

In diesem Fall ist $\varphi$, wie in der Regel, positiv und arbeitet die Resultante der beiden besprochenen Wirkungen dem Wärmeverlust an die Umgebung entgegen.

§ 5. Es werde zunächst der Fall so kleiner Strombelastung betrachtet, daß das Newtonsche Abkühlungsgesetz als gültig betrachtet werden kann, die Wärmeleitung im Streifen vorläufig vernachlässigt. Der Streifen sei beiderseits geschwärzt, dann ist der Verlust durch Ausstrahlung an die Umgebung pro Sekunde $2\,b\,l\,A(T^4-T_0^4)$, wo $A$ die Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes, $T_0$ die absolute Temperatur der Umgebung bedeutet; $T=T_0+u$. Ist $u$ klein, so wird der Verlust $8\,b\,l\,A\,T_0^3 u=\sigma\,l.u$, wenn der Verlust pro Zentimeter und $u=1$

$$(13) \qquad \sigma=8\,b\,A.T_0^3$$

gesetzt wird.

Das Gas werde so verdünnt angenommen, daß von Konvektionsströmen abgesehen werden kann.[1]) Dann ist die Wärmeableitung durch dasselbe pro Sekunde

$$(14) \qquad L=4\pi k.C.u,$$

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 156. p. 179. 1875.

wo $k$ das Wärmeleitungsvermögen des Gases, $C$ die elektrostatische Kapazität des Streifens in einer zur Erde abgeleiteten Hülle von der Gestalt des Gefäßes bedeutet. Zur angenäherten Berechnung von $C$ werde es so angesehen, als ob der Streifen die Gestalt einer Ellipse von den Achsen $b$ und $l$ habe. Die Niveauflächen des elektrisch geladenen Streifens sind dann die zu ihm konfokalen Ellipsoide, von denen dasjenige, dessen größte Achse die Länge $4\,l$ hat, von einer Kugel nicht sehr verschieden ist und der Hülle substituiert werde. Dann ist

$$(15)\qquad C = \frac{\frac{1}{2}\,l}{F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-\left(\frac{b}{l}\right)^2}\right) - F\left(\arcsin\frac{1}{4}, \sqrt{1-\left(\frac{b}{l}\right)^2}\right)},$$

wo das Zeichen $F$ nach Legendre das elliptische Integral erster Gattung bedeutet. Solange $l/b > 20$, ist bis auf 1 Proz. genau

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-\left(\frac{b}{l}\right)^2}\right) = \lg\,\mathrm{nat}\,\frac{4\,l}{b},$$

das unvollständige Integral im Nenner merklich unabhängig von $l/b$ und gleich 0,255. Mithin wird nach (14)

$$(16)\ ^{1})\qquad \begin{cases} \dfrac{L}{l} = \lambda \,.\, u, \\ \lambda = \dfrac{2\,\pi\,k}{\lg\,\mathrm{nat}\,\dfrac{4\,l}{b} - 0{,}255}. \end{cases}$$

Es ist für

| $l/b =$ | 20 | 25 | 50 |
|---|---|---|---|
| $\lg\,\mathrm{nat}\left(\frac{4\,l}{b}\right) - 0{,}26 =$ | 4,12 | 4,34 | 5,03 |

Mit zunehmender Breite des Streifens wächst also der Verlust durch Wärmeleitung des Gases nur langsam, während der Verlust durch Strahlung der Breite proportional ist. Daher tritt jener gegen diesen um so mehr hervor, je schmäler der Streifen gemacht wird.

1) Ebenso ergibt sich für einen dünnen Draht vom Radius $r$ und der Länge $l$, indem man denselben wie ein verlängertes Rotationsellipsoid betrachtet und $\left(\frac{\text{Dicke}}{\text{Länge}}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt:

$$\lambda = \frac{2\,\pi\,k}{\lg\,\mathrm{nat}\,\dfrac{l}{r} - 0{,}256}.$$

In dem behandelten Fall wird nach diesen Ergebnissen

$$V = (\sigma + \lambda) . l . u . \tag{17}$$

Zur Berechnung der Temperaturerhöhung $u$ durch die Strombelastung dient (7), indem dort $s = 0$ gesetzt wird. Indem man $\beta u^2$ vernachlässigt, erhält man mittels (17)

$$u = \frac{J^2 j}{\sigma + \lambda - J^2 j \alpha} \tag{18}$$

und (11b) wird

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b}{\sigma + \lambda - J^2 j \alpha . \varphi} . \tag{19}$$

§ 6. Es wird sich um 1 cm lange Bolometerstreifen handeln, bei welchen der Verlust durch innere Wärmeleitung nicht unbeträchtlich ist. Um sie in Rechnung zu ziehen, drücken wir das Wärmegleichgewicht für ein Längenelement $dz$ des Streifens aus, wobei wir die Wärmeleitung durch das Gas nach (16) näherungsweise[1]) mit $L . dz/l$ in Rechnung bringen. So entsteht, indem wir mit $u'$ die längs des Streifens variable Temperatur bezeichnen, die Gleichung

$$J^2 j (1 + \alpha u') + b . s = - k' b d . \frac{d^2 u'}{dz^2} + (\sigma + \lambda) . u'$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 u'}{dz^2} = \varepsilon^2 . u' - Q , \\ \varepsilon^2 = \dfrac{\sigma + \lambda - J^2 j \alpha}{k' b d} , \\ Q = \dfrac{J^2 j + b s}{k' b d} , \end{array} \right. \tag{20}$$

wo $k'$ das kalorimetrisch gemessene Wärmeleitungsvermögen des Streifenmetalles ist. Daraus ergibt sich, wenn der Anfang der $z$ in die Streifenmitte gelegt und angenommen wird, daß die Streifenenden die Temperatur der Umgebung bewahren:

$$u' = \frac{Q}{\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{e^{\varepsilon z} + e^{-\varepsilon z}}{e^{\frac{1}{2}\varepsilon l} + e^{-\frac{1}{2}\varepsilon l}} \right) \tag{21}$$

und die mittlere Temperaturerhöhung $u$

$$u = \frac{Q}{\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2}{\varepsilon l} . \frac{e^{\varepsilon l} - 1}{e^{\varepsilon l} + 1} \right) = \frac{Q}{\varepsilon^2} . f(\varepsilon l) ,$$

1) Diese Gleichung setzt voraus, daß die Oberfläche des Streifens eine isotherme Fläche ist, was in dem jetzt behandelten Falle nicht mehr zutrifft.

oder

$$u = \frac{J^2 j + b s}{\sigma + \lambda - J^2 j \alpha} \cdot f(\varepsilon l). \tag{22}$$

Für $k' = 0$ wird nach (20) $\varepsilon = \infty$, wodurch, wenn $s = 0$ gesetzt wird, $u$ den Wert der Gleichung (18) annimmt.

Aus (22) ergibt sich, indem man die Größe $J^2 j \alpha$ [1]) als klein gegen $\sigma + \lambda$ sowie gegen $\sigma$ behandelt (§ 10) und in Betracht zieht, daß mit $s$ auch $J$ sich ändert (§ 4)

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b}{\sigma + \lambda - J^2 j \alpha \cdot \big(1 - (1 - \varphi) \cdot f(\varepsilon l)\big)} \cdot f(\varepsilon l).$$

Mithin werden die Schlußformeln für kleine Strombelastung, indem $u$ wieder die mittlere Temperaturerhöhung des Streifens durch die Strombelastung bezeichnet:

$$\left\{\begin{aligned}
u &= \frac{J^2 j}{\sigma + \lambda - J^2 j \alpha} \cdot f(\varepsilon l), \\
n &= C \cdot \sqrt{G} \cdot \frac{J}{\gamma} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha u} \cdot \frac{b}{\sigma + \lambda - J^2 j \alpha \cdot \psi} \cdot f(\varepsilon l), \\
f(\varepsilon l) &= 1 - \frac{2}{\varepsilon l} \cdot \frac{e^{\varepsilon l} - 1}{e^{\varepsilon l} + 1}, \\
\varepsilon^2 &= \frac{\sigma + \lambda - J^2 j \alpha}{k' b d}, \\
\sigma &= 8 b A T_0^3, \\
\lambda &= \frac{2 \pi k}{\lg \mathrm{nat} \frac{4 l}{b} - 0{,}255}, \\
j &= 0{,}239 \cdot \frac{W_{18}}{l}, \\
\psi &= 1 - (1 - \varphi) \cdot f(\varepsilon l).
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Der Term $J^2 j \alpha \psi$ kann bei kleinen Strombelastungen, bei welchen $u$ nicht mehr als $2^0$ beträgt, vernachlässigt werden (§ 10), ebenso $\alpha u$ gegen 1. Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich für das Verhältnis der Strahlungsempfindlichkeiten des Vakuum- und Luftbolometers, $n_v$ und $n_L$, bei kleiner Strombelastung

$$\frac{n_v}{n_L} = \frac{\sigma + \lambda}{\sigma} \cdot \frac{f(\varepsilon l)_v}{f(\varepsilon l)_L}. \tag{24}$$

---

1) Diese Größe kommt zwar auch in $s$ vor, aber $\partial s / \partial J$ ist klein von zweiter Ordnung, daher kann $f(\varepsilon l)$ als konstant behandelt werden.

§ 7. Nach (23) ist die Strahlungsempfindlichkeit $n$ bei kleiner Strombelastung $J$ dieser nahezu proportional. Anders verhält es sich erfahrungsgemäß bei höheren Belastungen. Bei den schmalen Vakuumbolometern gelangt man nämlich bei fortgesetzt gesteigerter Stromstärke bald an ein Maximum der Strahlungsempfindlichkeit, jenseits dessen dieselbe wieder sinkt; und zwar wird dieses Maximum erreicht bei einer Belastung, bei welcher die Empfindlichkeit des Luftbolometers noch nicht allzusehr von der Proportionalität mit der Belastung abweicht.

Bei der Erklärung dieses Verhaltens wollen wir von der inneren Wärmeleitung im Streifen absehen. Soll die Empfindlichkeit von der Belastung, also auch von der Streifentemperatur nahezu unabhängig sein, so muß nach (11 b) der Wärmeverlust $V$ der Temperaturerhöhung $u$ proportional, oder $\partial V/\partial u$ von $u$ unabhängig sein. Der Hauptteil von $V$ rührt nun beim linearen Luftbolometer von der Luftleitung her (§ 10) und für diesen Teil ist die genannte Bedingung nahe erfüllt. Dagegen ist der für das Vakuumbolometer maßgebende Verlust durch Strahlung gleich

$$2\,b\,l\,A(T^4 - T_0^4), \quad \text{also} \quad \partial V/\partial u = 8\,b\,l\,A\,T^3,$$

d. h. der dritten Potenz der absoluten Temperatur proportional, außerdem ist für die gleiche Strombelastung die Temperaturerhöhung $u$ beim linearen Vakuumbolometer viel größer als beim Luftbolometer. Es kommt hinzu, daß auch die Temperaturempfindlichkeit $m$ nach § 2 mit wachsender Streifentemperatur abnimmt.

§ 8. Die theoretische Behandlung des Falles hoher Strombelastung wird durch die Notwendigkeit, die innere Wärmeleitung zu berücksichtigen, sehr schwierig. Man pflegt nun die Bolometerstreifen aus einer größeren Tafel von nahezu gleichförmiger Dicke auszuschneiden, wobei besonders die Frage nach dem Einfluß der Breite auf die Strahlungsempfindlichkeit praktisch interessiert. Diese Frage läßt sich für das Vakuumbolometer folgendermaßen beantworten. Man betrachte zwei Streifen 1 und 2 im Vakuum aus demselben Material, von gleicher Länge und Dicke, aber verschiedener Breite; z. B. sei 2 viermal so breit als 1. Man mache die Strombelastung dieser Streifen der Breite proportional und bewerkstellige dies

dadurch, daß man alle Widerstände der Brückenanordnung, den Galvanometerwiderstand einbegriffen, der Breite umgekehrt proportional wählt. Dann verhält sich 2 in allen Beziehungen wie vier nebeneinander liegende Streifen 1, da die im Vakuum allein in Betracht kommenden Verluste durch Ausstrahlung und innere Wärmeleitung der Breite proportional sind.[1]) Deshalb müssen $u$ und $\partial u/\partial s$ für beide Streifen den gleichen Wert haben.

Die allgemein gültigen Gleichungen (5) und (6) ergeben nun

$$\frac{\gamma}{\sqrt{G}} \cdot \frac{n}{b} = C \cdot \frac{J}{b} \cdot \frac{\alpha - 2\beta u}{1 + \alpha u - \beta u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Setzt man

$$\frac{\gamma}{\sqrt{G}} \cdot \frac{n}{b} = y, \quad \frac{J}{b} = x,$$

so ist $y = f(x)$, wo die Funktion $f$, da es sich um Streifen handelt, die sich nur durch die Breite unterscheiden, von $b$ unabhängig ist. Für einen gewissen, von der Schaltung unabhängigen Wert $x$, $x_1$, erreicht $y$ seinen größten Wert $y_1$. Bezeichnet $n_1$ die diesem entsprechende Strahlungsempfindlichkeit, so ist

$$(25) \qquad \begin{cases} n_1 = y_1 \cdot b \cdot \dfrac{\sqrt{G}}{\gamma}, \\ \gamma = 1 + G/W + (G + W')/W''. \end{cases}$$

In dem besonderen Fall $W'' = W'''$, $W/W'' = 0$, $G = 2W$ (§ 2) wird $\gamma = 4$ und

$$(25\,a) \qquad n_1 = \frac{y_1}{2\sqrt{2}} \cdot b \cdot \sqrt{W}.$$

In diesem Hauptfall ist also das Maximum der Strahlungsempfindlichkeit beim Vakuumbolometer der *Quadratwurzel aus der Breite proportional*, da $W$ sich umgekehrt wie die Breite verhält; und es erweist sich praktisch als zulässig, mit der Strombelastung nahe an dieses Maximum hinanzugehen. Beim Luftbolometer wächst die Empfindlichkeit schneller als die Breite, und zwar ist sie der Breite ungefähr proportional (§ 13).

---

1) Für das Luftbolometer trifft dies nicht zu, da der Verlust durch Luftleitung mit der Breite nur wenig sich ändert (§ 5).

## II. Versuche.

§ 9. Die benutzten Bolometer waren nach den Angaben von Lummer und Kurlbaum gebaut. Sie bestanden aus einer kreisförmigen Schieferplatte $R$ (Fig. 2) von 38 mm Durchmesser, die im Innern eine rechteckige Aussparung (10 × 16 mm) besaß. Der zu bestrahlende Zweig $W$ aus geschwärztem Platin befand sich in der Mitte, der gleiche Zweig $W'$ nahe dem Rande der Aussparung. $W'$ war durch ein auf die Schieferplatte aufgekittetes, blank poliertes dünnes Kupferblech gegen Strahlung geschützt. Die Zuleitungen zu den Streifen $W$ und $W'$ bestanden aus 0,5 bis 1 mm dickem Kupferblech, das mit ein wenig Kitt auf dem Schiefer befestigt war und stets bis zur Aussparung heranreichte, so daß die wirksame Länge der Streifen der Länge der Aussparung gleichkam. Ein Ende von $W$ und eines von $W'$ hatten eine gemeinsame Zuleitung, so daß drei Anschlußklemmen an der Schieferplatte genügten. Das Abätzen und Schwärzen der Streifen geschah in bekannter Weise. Die ganze Vorrichtung befand sich in dem Glasapparat $G$, bestehend aus zwei durch einen Schliff $S$ verbundenen Teilen. In den unteren Teil waren drei Glasröhren mit Zuleitungsdrähten eingeschmolzen, der obere Teil kommunizierte mit dem mit Kokosnußkohle gefüllten Gefäß $K$. Die Strahlung fiel durch ein Steinsalz- oder Glasfenster auf den exponierten Streifen $W$. Ein 2 mm dicker Kupfermantel schützte $G$ gegen fremde Strahlung. Zur Herstellung des Vakuums in $G$ wurde, nachdem der Luftdruck durch die Wasserstrahlpumpe auf ungefähr 2 cm Hg erniedrigt war, die Kohle auf die Temperatur der flüssigen Luft abgekühlt. Bei den Messungen stören die an den Verbindungsstellen der Rheostatenwiderstände auftretenden Thermokräfte. Deshalb wurden die Wider-

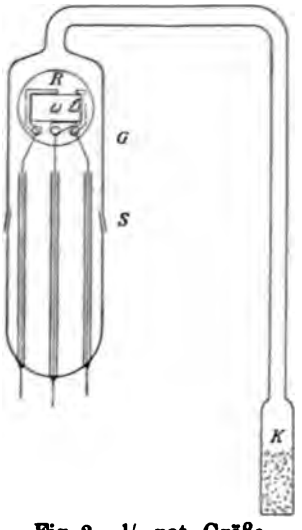



Fig. 2. 1/4 nat. Größe.

stände, welche die beiden Zweige $W''$ und $W'''$ (Fig. 1) bildeten, mittels eines Petroleumbades auf konstanter Temperatur gehalten. Zur genauen Abgleichung der Bäder war zu $W''$ ein fein regulierbarer großer Nebenschlußwiderstand parallel geschaltet. Das benutzte Panzergalvanometer besaß differentiale Wickelung, so daß sein Widerstand mehrfach variiert werden konnte; die Halbschwingungsdauer der Nadel betrug gewöhnlich 8 Sek.

§ 10. Es wurden vier aus derselben Tafel geschnittene Bolometerstreifen der beschriebenen Art benutzt. Tab. 1 gibt die Maße und die nach (23) berechneten Konstanten. Es ist gesetzt:

$$W_t = W_0(1 + 0{,}003966\, t - 58{,}2 \cdot 10^{-8} t^2)\ ^{1}),$$

also

$$W = W_{18}(1 + 0{,}003684\, u - 54{,}3 \cdot 10^{-8} \cdot u^2),$$

$$1/\varkappa = 0{,}108 \cdot 10^{-4}\ \text{Ohm}\ (18^0);$$

also

$$d = 0{,}108 \cdot 10^{-4} \cdot l/b \cdot W_{18},$$

$$k' = 0{,}17\ \frac{g}{\text{cm sec}}\ ^{2}),$$

$$k = 0{,}0000569\,(1 + 0{,}00253\, t)\ ^{3}),$$

also

$$k_{18} = 0{,}0000584,$$

$$A = 0{,}01265 \cdot 10^{-10}\ \frac{15^0\text{-Kal.}}{\text{qcm sec}}\ ^{4}),$$

$$T_0 = 291^0.$$

Tabelle 1.

| Bolometer | $l$ cm | $b$ cm | $d \cdot 10^4$ cm | $W_{18}$ Ohm | $j$ | $\sigma \cdot 10^6$ | $\lambda \cdot 10^6$ | $\lambda/\sigma$ | $(\lambda+\sigma)/\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VI | 1,04 | 0,0195 | 0,560 | 10,3 | 2,364 | 4,863 | 71,84 | 14,8 | 15,7 |
| III | 1,00 | 0,0354 | 0,599 | 5,09 | 1,217 | 8,829 | 82,06 | 9,3 | 10,3 |
| VII | 1,10 | 0,0645 | 0,520 | 3,54 | 0,769 | 16,09 | 92,47 | 5,9 | 6,9 |
| IV | 1,02 | 0,0940 | 0,486 | 2,41 | 0,569 | 23,44 | 104,4 | 4,5 | 5,5 |

Nach der vorletzten Kolumne ist der Wärmeverlust durch Luftleitung bei dem breitesten Streifen IV 4,5mal, bei dem

1) L. Holborn, Ann. d. Phys. 6. p. 251. 1901.
2) W. Jäger u. H. Diesselhorst, Berliner Ber. p. 726. 1899.
3) W. Schwarze, Ann. d. Phys. 11. p. 316. 1903.
4) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 65. p. 746. 1898.

schmalsten VI 14,8 mal so groß als der Wärmeverlust durch Ausstrahlung. Es wurde nun für kleine Strombelastungen das Verhältnis der Strahlungsempfindlichkeiten im Vakuum und in der Luft, d. h. das Verhältnis $n_v/n_L$ einerseits experimentell bestimmt, andererseits aus (24) berechnet. Der Fall des Luftbolometers bezieht sich auf einen Luftdruck von etwa 5 cm Quecksilber, bei welchem die Strahlungsempfindlichkeit für Bolometer VII um etwa 10 Proz. größer war als bei vollem Luftdruck; der kleinere Druck ist gewählt, um den Voraussetzungen der Theorie gemäß die Konvektionsströme zu vermeiden. Es ist angenommen, daß die Wärmeleitung der Luft in dem mit der gekühlten Kokosnußkohle hergestellten Vakuum vernachlässigt werden kann. Tab. 2 enthält die Ergebnisse zugleich mit den nach (23) berechneten Hilfsgrößen und mittleren Temperaturerhöhungen $u$ der Streifen.

Tabelle 2.

| Bol. | $J \cdot 10^3$ | $J^2 j 10^6$ | $J^2 j \alpha \cdot 10^6$ | $(sl)_L$ | $(sl)_v$ | $f(sl)_L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VI | 0,256 | 15,49 | 0,06 | 21,14 | 5,29 | 0,905 |
| III | 0,505 | 31,05 | 0,11 | 15,88 | 4,92 | 0,874 |
| VII | 0,500 | 19,23 | 0,07 | 15,17 | 5,83 | 0,868 |
| IV | 1,50 | 127,1 | 0,5 | 13,09 | 5,55 | 0,847 |

| Bol. | $f(sl)_v$ | $u_L$ | $u_v$ | $n_v/n_L$ | $n_v/n_L$ beob. |
|---|---|---|---|---|---|
| VI | 0,626 | 0,18 | 2,02 | 10,9 | 10,3 |
| III | 0,597 | 0,30 | 2,13 | 7,03 | 7,0 |
| VII | 0,659 | 0,15 | 0,79 | 5,12 | 5,39 |
| IV | 0,643 | 0,84 | 3,56 | 4,14 | 4,42 |

$\varphi$ war bei diesen Versuchen etwa 0,5, das Glied $J^2 j \alpha \psi$ in (23) ist also im Vergleich zu $\sigma$ ganz zu vernachlässigen. Es ist auch ersichtlich, daß die Strombelastungen hinlänglich klein waren, nämlich nur kleine Temperaturerhöhungen hervorbrachten. Die innere Wärmeleitung setzt die Strahlungsempfindlichkeit bei den Luftbolometern um etwa 15 Proz., bei den Vakuumbolometern um etwa 38 Proz. herab. Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werten von $n_v/n_L$ ist im allgemeinen befriedigend, die Abweichungen sind wohl darauf zurückzuführen, daß dem rechteckigen Streifen ein elliptischer substituiert ist (§ 5).

§ 11. Nunmehr wurden für die Bolometer VI, III, VII die Strahlungsempfindlichkeiten $n$ im Vakuum bis zu den höchsten Belastungen bestimmt, bei welchen die Ruhelage des Galvanometers sich noch hinreichend konstant erwies. Bei den verschiedenen Reihen ist die Einheit der Empfindlichkeit eine verschiedene. Um die Beobachtungen auf dasselbe Maß zu reduzieren, berechnet man das *Verhältnis* der Empfindlichkeiten zweier Bolometer $B'$ und $B$ für die kleinsten angewandten Stromstärken nach den Formeln (23), deren Voraussetzungen hier zutreffen. Da $\sigma/b$ von $b$ unabhängig, $\lambda = 0$ und $J^2 j \alpha \varphi$ zu vernachlässigen ist, so ergibt sich

$$\frac{n'}{n} = \frac{J' . \sqrt{G'} . f(s\,l)' \gamma . (1 + \alpha u)}{J . \sqrt{G} . f(s\,l) . \gamma' (1 + \alpha u')} .$$

Tab. 3 enthält die Daten für die Berechnung. So ergibt sich für $J = 0{,}256 . 10^{-3}$ bei VI und $0.68 . 10^{-3}$ bei III

$$\frac{n^{III}}{n^{VI}} = \frac{0{,}68 . 0{,}597 . 4{,}74}{0{,}256 . 0{,}626 . 9{,}4} = 1{,}278 .$$

Setzt man also für VI und $J = 0{,}256 . 10^{-3}$ $n = 46{,}2$, so ergibt sich für III und $J = 0{,}68 . 10^{-3}$ $n = 46{,}2 . 1{,}278 = 59{,}0$. Daher sind die bei III beobachteten $n$-Werte mit 59,0/51,5 zu multiplizieren. Ebenso findet man für VII und $J = 0{,}5 . 10^{-3}$

$$\frac{n^{VII}}{n^{VI}} = \frac{0{,}5 . 0{,}659 . 4{,}74 . 1{,}007}{0{,}256 . 0{,}626 . 13{,}35 . 1{,}003} = 0{,}733 .$$

Daraus folgt für VII und $J = 0{,}5 . 10^{-3}$ $n = 46{,}2 . 0{,}733 = 33{,}9$ und mithin für VII der Reduktionsfaktor 33,9/21,2.

Es handelt sich darum, die Theorie des § 8 zu prüfen. Zu diesem Zweck sind die Werte

$$y = \frac{n}{b} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{G}} \quad \text{und} \quad x = \frac{J}{b}$$

berechnet worden. Die folgende Tab. 3 enthält die Ergebnisse. Auch die Temperaturerhöhungen $u$ der Bolometerstreifen sind aufgenommen, berechnet aus den beobachteten Streifenwiderständen, indem $W/W_{18} - 1 = \alpha u - \beta u^2$. Die Fälle maximaler Empfindlichkeit sind durch wagrechte Striche gekennzeichnet.

Tabelle 3.

| Bolometer VI | $J.10^3$ | $n$ | $n$ red. | $W$ | $\gamma$ | $B$ | $\varphi$ | $y=\frac{n\gamma}{b\sqrt{G}}$ | $x=\frac{J}{b}$ | $u$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b = 0{,}0195$ | | | | | | | | | | |
| $l = 1{,}04$ | 0,256 | 46,2 | 46,2 | — | 4,74 | 3560 | 0,53 | 2250 | 0,131 | 2 |
| $d.10^4 = 0{,}56$ | 0,512 | 91,2 | 91,2 | 10,5 | 4,70 | 1760 | 0,52 | 4400 | 0,263 | 5,4 |
| $W'' = 100$ | 1,025 | 149,2 | 149,2 | 11,0 | 4,59 | 850 | 0,50 | 7020 | 0,526 | 18,9 |
| $W''' = 95$ | 1,54 | 165,8 | 165,8 | 12,0 | 4,40 | 550 | 0,47 | 7480 | 0,790 | 45 |
| $G = 25$ | 2,05 | 156,0 | 158,0 | 13,3 | 4,20 | 395 | 0,44 | 6720 | 1,050 | 79,2 |
| $W_{18} = 10{,}3$ | | | | | | | | | | |
| $f(s\,l) = 0{,}626$ | | | | | | | | | | |
| **Bolometer III** | | | | | | | | | | |
| $b = 0{,}0354$ | 0,68 | 51,5 | 59,0 | — | 9,4 | 140 | 0,50 | 3130 | 0,192 | 2,1 |
| $l = 1{,}00$ | 1,36 | 92,2 | 105,7 | 5,3 | 9,22 | „ | 0,49 | 5500 | 0,384 | 10,8 |
| $d.10^4 = 0{,}599$ | 2,03 | 125 | 143,3 | 5,5 | 9,05 | „ | 0,48 | 7330 | 0,574 | 21,6 |
| $W'' = W''' = 10$ | 2,78 | 139,2 | 159,5 | 5,8 | 8,81 | „ | 0,47 | 7940 | 0,785 | 38,2 |
| $G = 25$ | 3,44 | 138,2 | 158,4 | 6,2 | 8,53 | „ | 0,45 | 7630 | 0,972 | 60,2 |
| $W_{18} = 5{,}09$ | | | | | | | | | | |
| $f(s\,l) = 0{,}597$ | | | | | | | | | | |
| **Bolometer VII** | | | | | | | | | | |
| $b = 0{,}0645$ | 0,5 | 21,2 | 33,9 | — | 13,33 | 198 | — | 1400 | 0,0775 | 0,8 |
| $l = 1{,}10$ | 1,82 | 71,0 | 113,4 | 3,65 | 13,14 | 48 | 0,49 | 4620 | 0,282 | 8,1 |
| $d.10^4 = 0{,}520$ | 3,61 | 113,5 | 181,3 | 3,88 | 12,73 | 48 | 0,47 | 7160 | 0,560 | 27,0 |
| $W'' = 6$ | . | | | . | | | | | . | . |
| $W''' = 5{,}86$ | . | | | . | | | | | . | . |
| $G = 25$ | . | | | . | | | | | . | . |
| $W_{18} = 3{,}54$ | 5,10 | | | 4,07 | | | | | 0,791 | 40,9 |
| $f(s\,l) = 0{,}659$ | | | | | | | | | | |

Es war nicht möglich, die Schaltungen genau den Annahmen des § 8 entsprechend einzurichten. Um diesen Annahmen möglichst nahe zu kommen, wählte man die Widerstände so, daß $\varphi$ überall nahezu denselben Wert 0,5 erhielt. Alsdann ist bei gleichem $J/b$ die linke Seite von (11a) und annähernd auch die rechte von $b$ unabhängig. Für Bol. VII konnte auf diese Weise das Maximum der Empfindlichkeit nicht erreicht werden, da das Galvanometer zu unruhig wurde. Um wenigstens die von der Schaltung unabhängige Strombelastung für das Maximum der Empfindlichkeit zu bestimmen, machte man $W'' = W''' = 100$, wobei das Galvanometer noch hinreichend ruhig stand.

In der Fig. 3 ist für Bol. VI $y$ als Funktion von $x$ durch eine Kurve dargestellt. Die Endpunkte der den verschiedenen $x$ entsprechenden $y$ sind für Bol. III durch Kreuze, für Bol. VII durch Kreise bezeichnet und sollten in die Kurve hineinfallen. Bei der Beurteilung der Abweichungen muß man bedenken, daß Gleichförmigkeit der einzelnen Streifen in bezug auf Dicke,

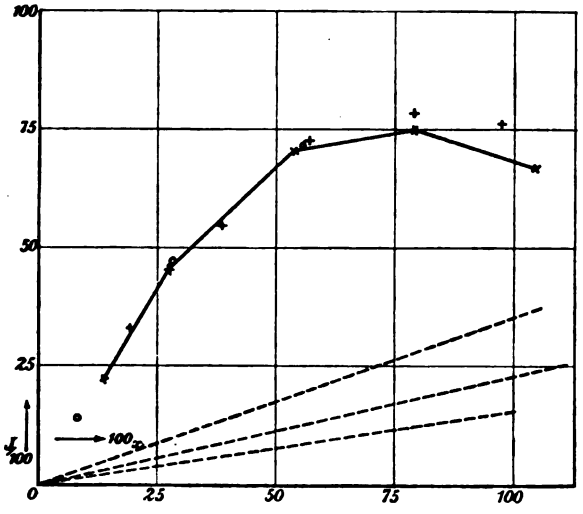



Fig. 3.

Breite, Schwärzung nicht erwartet werden kann; auch ist die Voraussetzung gleicher Länge und Dicke der verschiedenen Streifen nicht genau erfüllt. Die den Maximalempfindlichkeiten entsprechenden Werte von $x$ zeigen befriedigende Übereinstimmung; die zugehörige Temperaturerhöhung $u$ ergibt sich für die benutzten, ungefähr 0,5 $\mu$ dicken Streifen im Mittel gleich 41,4°.

§ 12. Für das Luftbolometer ist $y$, als Funktion von $x$ betrachtet, nicht, wie beim Vakuumbolometer, von der Breite unabhängig, sondern wächst mit der Breite. Dies ist eine Folge des mehrfach erwähnten Gesetzes, nach welchem die durch Luftleitung einem schmalen Streifen entzogene Wärme nicht der Breite proportional ist, sondern mit der Breite nur langsam wächst. Um diesen charakteristischen Unterschied

näher zu beleuchten, berechnen wir zuerst die Strahlungsempfindlichkeit des Luftbolometers für kleine Belastungen nach (23), 2. Schreibt man diese Gleichung, indem man $\alpha u$ und $J^2 j \alpha \psi$ vernachlässigt

$$\frac{n}{b} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{G}} = C \cdot \frac{J}{b} \cdot \frac{b}{\sigma + \lambda} \cdot f(\varepsilon l),$$

oder

$$y = C \cdot x \cdot \frac{b}{\sigma + \lambda} \cdot f(\varepsilon l),$$

so ist für dasselbe $x$

$$y_L = y_v \cdot \frac{\sigma}{\sigma + \lambda} \cdot \frac{f(\varepsilon l)_L}{f(\varepsilon l)_v}, \tag{26}$$

$$\frac{y'_L}{y_L} = \frac{b'}{b} \cdot \frac{\sigma + \lambda}{\sigma' + \lambda'} \cdot \frac{f(\varepsilon l)'_L}{f(\varepsilon l)_L}. \tag{27}$$

Für Bol. VI und $x = 0{,}131$ ist $y$ in den gewählten Einheiten 2250, daher

$$y_L = 2250 \cdot \frac{4{,}86}{76{,}70} \cdot \frac{0{,}905}{0{,}626} = 206{,}3.$$

Die Erfahrung lehrt, daß die Strahlungsempfindlichkeit des Luftbolometers bis zu dem der Maximalempfindlichkeit des Vakuumbolometers entsprechenden Wert $x = 0{,}79$ sich nicht allzusehr von der Proportionalität mit $x$ entfernt. Nehmen wir diese Proportionalität hier, da es sich nicht um eine genaue Darstellung handelt, als erfüllt an, so folgt für Bol. VI und $x = 1$ $y = 1574$. Daraus berechnet man nach (27) mittels der oben gegebenen Werte von $b$, $\sigma$, $\lambda$, $f(\varepsilon l)$ für Bol. III und VII für $x = 1$ bzw. $y = 2329$ und 3528. Hiernach sind in der Fig. 3 die gestrichelten Linien gezogen, welche für die Luftbolometer VI, III, VII $y$ als Funktion von $x$ darstellen. Man sieht, daß die drei Kurven, welche für die Vakuumbolometer in eine zusammenfallen, für die Luftbolometer auseinandergehen, so daß den breiteren Bolometern größere Werte von $y$ entsprechen. Da in Wirklichkeit die Empfindlichkeit der Luftbolometer bei den höheren Belastungen etwas hinter den getrichelten Linien zurückbleibt, so erhält man aus der Figur die Empfindlichkeit des Vakuumbolometers relativ zu der des entsprechenden Luftbolometers hier etwas zu klein.

§ 18. Mit Hilfe dieser Figur wollen wir die Strahlungsempfindlich $n$ selbst als Funktion von $J/b$ für den normalen

Fall $W'' = W'''$, $W/W'' = 0$, $G = 2W$ darstellen. Dazu hat man die $y$-Werte mit $\sqrt{b}$ zu multiplizieren. Fig. 4 gibt diese Darstellung, wobei wieder die nur in roher Annäherung gültigen Werte für die Luftbolometer gestrichelt gezeichnet sind. Für

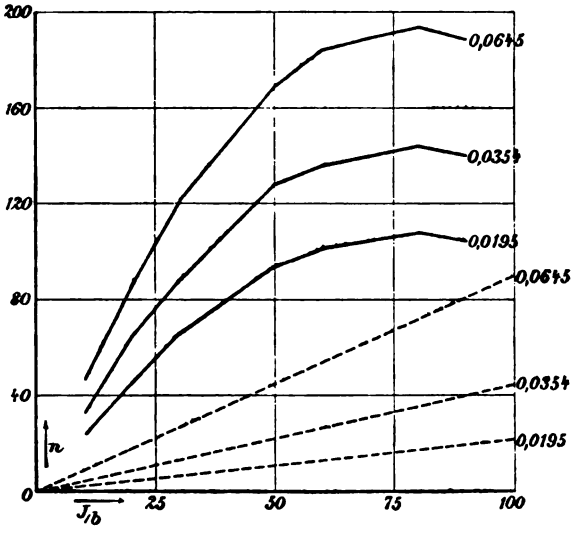



Fig. 4.

dieselbe Stromdichte ist in diesem Fall die Strahlungsempfindlichkeit gleich dicker Streifen im Vakuum der Quadratwurzel aus der Breite, in der Luft ungefähr der Breite selbst proportional.

§ 14. Für die Praxis fragt es sich, in welchem Verhältnis die Strahlungsempfindlichkeiten im Vakuum und in der Luft stehen, wenn die Strombelastung jedesmal auf den höchsten zulässigen Wert gebracht wird. Unter diesem höchsten Wert ist derjenige zu verstehen, bei welchem das Galvanometer noch hinreichend ruhig steht; daraus folgt, daß die gestellte Frage einer scharfen Beantwortung nicht fähig ist. Immerhin sind diesbezügliche Versuche gemacht worden. Die folgende Tab. 4 enthält in der vierten Kolumne die Verhältnisse der Strahlungsempfindlichkeiten im Vakuum und in der Luft bei den in den beiden vorhergehenden Kolumnen verzeichneten Höchstwerten der Stromstärken $J_v$ und $J_L$; $J_L$ bezieht sich wieder auf Luft

von etwa 5 cm Hg Druck. Aus dem oben angegebenen Grunde sind diese Verhältnisse etwas größer als die aus Fig. 4 zu entnehmenden. Zum Vergleich sind in die letzte Kolumne noch jene Verhältnisse für sehr kleine Strombelastung aufgenommen.

Tabelle 4.

| Bolometer | Breite cm | $J_v \cdot 10^2$ | $J_L \cdot 10^2$ | $\frac{\text{Vak.}}{\text{Luft}}$ max. | $\frac{\text{Vak.}}{\text{Luft}}$ kl. |
|---|---|---|---|---|---|
| VI | 0,0195 | 1,5 | 2,2 | 4,9 | 10,3 |
| III | 0,0354 | 3,0 | 3,4 | 3,7 | 7,0 |
| VII | 0,0645 | 4 | 4 | 3,8 | 5,4 |
| IV | 0,102 | 4,5 | 6 | 3,3 | 4,4 |

Die vierte Kolumne zeigt den durch das Vakuumbolometer zu erzielenden Vorteil. Derselbe ist besonders groß für sehr schmale Bolometerstreifen, wie sie zur Erzielung einer sehr hohen spektralen Auflösungskraft im Ultrarot gebraucht werden.

Charlottenburg, 9. August 1907.

(Eingegangen 12. August 1907.)

## 3. *Über die elektrolytische Ventilwirkung der Metalle Magnesium, Antimon und Wismut;* von *Günther Schulze.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die Untersuchung der elektrolytischen Ventilwirkung des Tantales[1]) hatte zu der Vermutung geführt, daß diese eigentümliche Erscheinung noch bei manchen anderen Metallen auftreten könnte. Als Bedingung war angegeben, daß das Metall als Anode im Elektrolyten schwer löslich sei und mit ihm eine schwer lösliche nichtleitende Verbindung bilden könne. Versuche, die zunächst mit Cr, Sn, Bi, Sb angestellt wurden, ergaben, daß die Ventilwirkung bei Wismut und Antimon in ähnlichem Maße vorhanden ist, wie bei Aluminium. Dagegen wurde bisher bei Chrom und Zinn keine wesentliche Ventilwirkung wahrgenommen.

Ferner hatte sich bei der Untersuchung der Tantalelektroden ergeben, daß sie sich im allgemeinen ähnlich wie Aluminiumelektroden[2]) verhielten, daß jedoch die Kapazitäten der Flächeneinheit nicht gleich groß waren, wenn beide Metalle bis zu gleichen Spannungen formiert wurden. Es mußten also bei gleicher Spannung entweder die Dicken der wirksamen Schichten, oder ihre Dielektrizitätskonstanten verschieden sein. Da sich aus den Kapazitäten bei Annahme eines bestimmten Wertes für die Dielektrizitätskonstante die Dicken der wirksamen Schicht leicht berechnen lassen und ein viel übersichtlicheres Bild ergeben als die Kurve der Kapazitäten, so war in den bisherigen Arbeiten stets die Kurve der Dicke $\delta$ der wirksamen Schicht als Funktion der Formierungsspannung $e$ angegeben, indem $\varepsilon = 1$ gesetzt war. Diese Kurve, welche also nicht $e = f(\delta)$, sondern $e = f(\delta/\varepsilon)$ darstellt, möge im folgenden Kurve der „Sperrfähigkeit" heißen. „Sperrfähigkeit" ist

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. **23.** p. 226. 1907.
2) G. Schulze, Ann. d. Phys. **21.** p. 929. 1906; **22.** p. 543. 1907.

also die Fähigkeit der wirksamen Schicht, bei einer bestimmten Kapazität eine bestimmte Spannung auszuhalten. Wenn die Sperrfähigkeit groß ist, so ist entweder die Dielektrizitätskonstante groß, oder die Dicke der wirksamen Schicht klein.

Um nun die Kurve der Sperrfähigkeit für möglichst viele Metalle zu erhalten, wurde auch noch Magnesium untersucht, dessen Ventilwirkung schon seit langer Zeit bekannt ist.

Die zu den Untersuchungen benutzten Zellen und die Versuchsanordnungen waren dieselben wie bei der Untersuchung des Aluminiums. Die Metalle wurden in Form von Stäben von ca. 4 mm Durchmesser und 40 mm freier Länge, also ungefähr 5 qcm freier Oberfläche benutzt. Es wurde Wert gelegt auf gute Politur, Einführung der Stäbe in den Elektrolyten von unten her, sorgfältige Abdichtung mit Gummiringen, Ermittelung des dielektrischen Widerstandes bei den Kapazitätsmessungen und Eliminierung des durch ihn bedingten Fehlers.

Der Schwerpunkt der Untersuchungen lag in den Kurven der Sperrfähigkeit.

### I. Magnesium.

Die Ventilwirkung des Magnesiums wurde unter anderen untersucht von Neyreneuf[1]), Campetti[2]) und Maresca.[3])

Campetti erhielt in NaOH von der Dichte 1,06 Spannungsabdrosselung bis 75 Volt.

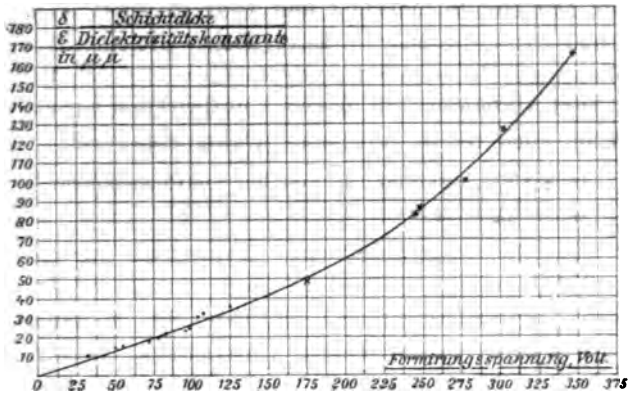
Maresca erhielt viel bessere Abdrosselung und vor allem größere Unempfindlichkeit gegen Ausschalten in $K_2CO_3$ von der Dichte 1,40. Er erreichte damit 100 Volt und maß auch die Sperrfähigkeit. Da er aber das Magnesium von oben her eintauchte, die Messungen nach ballistischer Methode, also mit einer einzigen Entladung anstellte und dabei noch den dielektrischen Widerstand vernachlässigte, sind seine Werte nicht sehr genau und weichen von den weiter unten angegebenen erheblich ab.

Die gute Brauchbarkeit von $K_2CO_3$ fand sich bei meinen Versuchen bestätigt. In gesättigter Lösung ließen sich 120 Volt

1) F. Neyreneuf, Journ. de Phys. **11**. p. 7. 1888.
2) A. Campetti, Atti R. Acc. Sc. Torino **36**. 1901.
3) S. Maresca, Il nuovo Cimento p. 155. Sept. 1906.

erreichen, während beim Verdünnen der Lösung gerade umgekehrt wie beim Aluminium und Tantal die Maximalspannung sank und die Abdrosselung unsicher wurde. In gesättigter $K_2CO_3$-Lösung ging der Reststrom bis auf 0,000005 Amp./qcm hinunter und der Einfluß des Ausschaltens war gering.

Nun ist außer $K_2CO_3$ noch $Na_2HPO_4$ ein gutes Fällungsmittel für Magnesium, und die Fällung wird durch Zusatz von $NH_3$ noch wirksamer. Deshalb wurden diese Substanzen als Elektrolyte benutzt. In $Na_2HPO_4$ allein war die Ausbildung der Ventilwirkung unsicher, trat aber sofort ein, wenn $NH_3$ im Überschuß zugesetzt wurde. Wenn die $Na_2HPO_4$-Lösung gesättigt war, so ließen sich Spannungen bis 350 Volt abdrosseln bei einem Reststrome von der Größenordnung




• Mg in $K_2CO_3$. × Mg in $Na_2HPO_4 + NH_3$.

Fig. 1. Kurve der Sperrfähigkeit des Magnesiums $[e = f(\delta/\varepsilon)]$. $t = 0°$ C.

0,0002 Amp./qcm. Bei höheren Stromdichten trat das bei Al und Ta stets beobachtete lebhafte Spiel feiner Fünkchen auf, das in $K_2CO_3$ niemals wahrgenommen wurde. Leider ist die Empfindlichkeit gegen Ausschalten in $Na_2HPO_4 + NH_3$ viel größer als in $K_2CO_3$, so daß die Ermittelung der Sperrfähigkeit nicht so sichere Werte liefert wie in $K_2CO_3$.

Die Kurve der Sperrfähigkeit ist in vorstehender Fig. 1 angegeben. Sie zeigt denselben Charakter wie die des Aluminiums, liegt jedoch wesentlich höher.

Die Empfindlichkeit der Ventilwirkung gegen Erwärmung, also auch gegen Erwärmung bewirkende Überlastungen ist beim Magnesium in allen untersuchten Elektrolyten sehr groß. Man muß die Zellen dauernd überwachen, wenn man ihren plötzlichen Niederbruch vermeiden will. Deshalb scheinen sie zur Gleichrichtung von Wechselströmen gänzlich ungeeignet zu sein.

Die Untersuchung der Sperrfähigkeit eines allerdings nur 4 Proz. Magnesium enthaltenden Magnaliumstabes ergab eine Kurve, die mit der des Aluminiums vollständig zusammenfiel.

### II. Antimon.

Über die Ventilwirkung des Antimons fand ich in der Literatur nur eine Bemerkung und zwar in einer Arbeit von Šebor und Šimek[1]) über elektrolytische Gleichrichtung von Wechselstrom. Bei Untersuchungen über den Einfluß, den Zusätze zum Aluminium auf dessen Ventilwirkung haben, untersuchten sie auch reines Antimon. Dabei ergab sich:

In $K_2Cr_2O_7$ gesättigt 48 Volt bei 0,0015 Amp./qcm
„ $(NH_4)_2HPO_4$ molar 65 „ „ 0,0070 „

Die Ventilwirkung zeigt sich aber nicht nur in diesen beiden Elektrolyten, sondern in noch vielen anderen. Die Ergebnisse der Untersuchungen darüber sind zusammen mit denen am Wismut in der Tab. I niedergelegt. Die Versuche wurden in der Weise angestellt, daß mit konstanter Stromdichte von ca. 0,005 Amp./qcm so lange formiert wurde, bis die Spannung der Zelle nicht weiter stieg. Dann wurde untersucht, ob die so erreichte Spannung in weiteren Grenzen von der Stromdichte unabhängig war, also die wirkliche Maximalspannung darstellte.

Da die Maximalspannung bei Antimon überall mit zunehmender Verdünnung des Elektrolyten steigt, und der Gehalt der Lösungen nicht gemessen wurde, so haben die Zahlen nur orientierenden Wert. Die Angabe „stark verdünnt" bedeutet eine so große Verdünnung, daß der Widerstand des Elektrolyten in der Zelle ungefähr 200 $\Omega$ betrug.

1) J. Šebor u. L. Šimek, Zeitschr. f. Elektrochemie **13**. p. 113. 1907.

## Tabelle I.

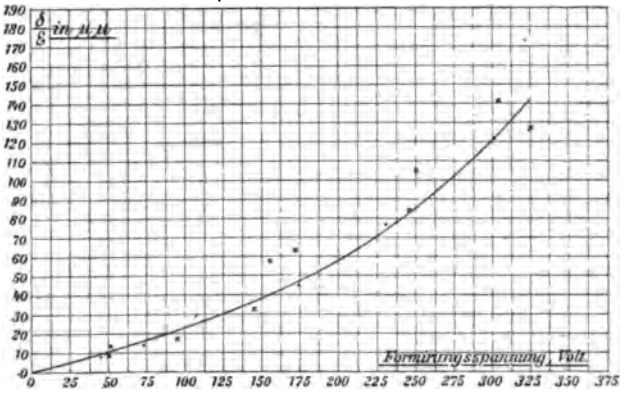
**Maximalspannungen an Antimon und Wismut in verschiedenen Elektrolyten bei 0° C.**

| Elektrolyt | Konzentration | Maximalspannung an Antimon | Maximalspannung an Wismut |
|---|---|---|---|
| KOH | verdünnt | 500 Volt | 500 Volt |
| | stark verdünnt | 600 „ | 600 „ |
| $(NH_4)OH$ | „ „ | 370 „ | 270 „ |
| $Ba(OH)_2$ | „ „ | 350 „ | 130 „ |
| HCl | „ „ | 250 „ | 10 „ |
| KCl | „ „ | über 700 „ | 15 „ |
| $KClO_3$ | „ „ | 0 „ | 0 „ |
| KJ | „ „ | 200 „ | 100 „ |
| NaBr | „ „ | 250 „ | 90 „ |
| LiF | „ „ | 400 „ | 60 „ |
| $H_2SO_4$ | „ „ | 220 „ | 300 „ |
| $KAl(SO_4)_2$ | „ „ | 300 „ | 300 „ |
| $HNO_3$ | „ „ | 0 „ | 0 „ |
| $KNO_3$ | „ „ | 0 „ | 0 „ |
| $H_3PO_4$ | „ „ | 300 „ | 310 „ |
| $K_2HPO_4$ | „ „ | 350 „ | 300 „ |
| $(NH_4)_2HPO_4$ | „ „ | 240 „ | 360 „ |
| $H_3AsO_4$ | „ „ | 500 „ | 420 „ |
| $KH_2AsO_4$ | „ „ | 500 „ | 450 „ |
| $KMnO_4$ | „ „ | 60 „ | 40 „ |
| $H_2CrO_4$ | verdünnt | 40 „ | 250 „ |
| $K_2Cr_2O_7$ | stark verdünnt | 90 „ | 100 „ |
| $Na_2MoO_4$ | „ „ | 300 „ | 250 „ |
| $Na_2B_2O_4$ | „ „ | 500 „ | — |
| $(NH_4)_2B_2O_4$ | „ „ | — | 350 „ |
| $(NH_4)_2HBO_3$ | „ „ | — | 350 „ |
| $KH_2BO_3$ | „ „ | 500 „ | 350 „ |
| KCN | „ „ | 400 „ | 100 „ |
| Essigsäure | „ „ | 300 „ | 30 „ |
| Na-Acetat | „ „ | 220 „ | 20 „ |
| $K_2CO_3$ | „ „ | 500 „ | 300 „ |
| $NaHCO_3$ | „ „ | 500 „ | 250 „ |

Die Tabelle zeigt, daß die Ventilwirkung in $KClO_3$, $HNO_3$ und $KNO_3$ gar nicht eintritt. In $KMnO_4$, $H_2CrO_4$ und $K_2Cr_2O_7$ ist sie nur schwach ausgebildet. Die Ammonsalze sind weniger geeignet als die anderen Alkalisalze. Bei weitem die höchste Maximalspannung gibt KCl. In vielen Elektrolyten, z. B. den Ammonsalzen, KCl, $Na_2B_2O_4$ u. a., wird die Lösung allmählich weißlich getrübt, anscheinend dadurch, daß etwas Antimon erst in Lösung geht und dann wieder ausfällt.

Die Empfindlichkeit der Ventilwirkung gegen Erwärmung ist bei Antimon wesentlich geringer als beim Magnesium.

Dagegen ist die Empfindlichkeit gegen Ausschalten sehr groß. Einen Moment nach dem Ausschalten sind Dicke der




× Sb in $K_2HPO_4$. • Sb in KCl.

Fig. 2. Kurve der Sperrfähigkeit des Antimons [$e = f(\delta/\varepsilon)$]. $t = 0°$ C.

wirksamen Schicht und dielektrischer Widerstand annähernd konstant, dann nehmen sie außerordentlich schnell ab. Eine Minute nach dem Ausschalten des Stromes ist in fast allen Elektrolyten die Ventilwirkung vollständig verschwunden. Dabei bleibt die feste Haut anscheinend unverändert bestehen. Eigentümlich ist, daß trotz dieser rapiden Abnahme der Ventilwirkung nach dem Ausschalten doch der Reststrom recht gering ist. Er betrug z. B. in KCl nach 6stündiger Formierung mit 240 Volt noch 0,00015 Amp./qcm. Das deutet darauf hin, daß das Verschwinden der wirksamen Schicht nach

dem Ausschalten nicht auf einem Vorgange beruht, der sich dauernd abspielt und nur durch den Reststrom kompensiert wird, sondern daß sich nach dem Ausschalten neue Erscheinungen ausbilden und mit der Zeit schnell zunehmen.

Da nun der dielektrische Widerstand von vornherein nicht sehr hoch ist ($1.10^5 - 7.10^5$ Ohm/qcm gegenüber $1.10^6 - 5.10^6$ bei Magnesium), so sind die Kapazitätsmessungen mühsam und wenig genau.

Sie wurden zunächst mit $K_2HPO_4$ als Elektrolyt angestellt und lieferten wenig befriedigende Werte. Wesentlich besser verhielt sich KCl. Die einzelnen Messungen stimmten besser überein und die für den dielektrischen Widerstand anzubringenden Korrektionen waren erheblich geringer.

Deshalb wurde die in Fig. 2 angegebene Kurve der Sperrfähigkeit vorwiegend nach den mit KCl erhaltenen Punkten gezeichnet. Sie fällt annähernd mit der des Magnesiums zusammen.

### III. Wismut.

Die Ventilwirkung des Wismuts scheint noch gänzlich unbekannt gewesen zu sein. Gestreift ist indes die Angelegenheit in einer Veröffentlichung von W. Holtz.[1]) Er stellt zwei Elektroden, eine von 600, die andere von 3 qm/m einander gegenüber und gibt an, daß er dann bei Verwendung von Fe, Pb, Ni, Sb, Bi in 1 Proz. $H_2SO_4$ und von Cu in $CuSO_4$, $CuCl_2$ Ventilwirkungen erhält, die der des Aluminiums nahe kommen.

Offenbar ist hier aber die ungleiche Elektrodengröße das Maßgebende und es treten ähnliche Erscheinungen wie beim Wehneltunterbrecher auf. Von einer wirklichen Ventilwirkung kann z. B. bei Fe, Pb, Ni in $H_2SO_4$ und Cu in $CuSO_4$ natürlich keine Rede sein.

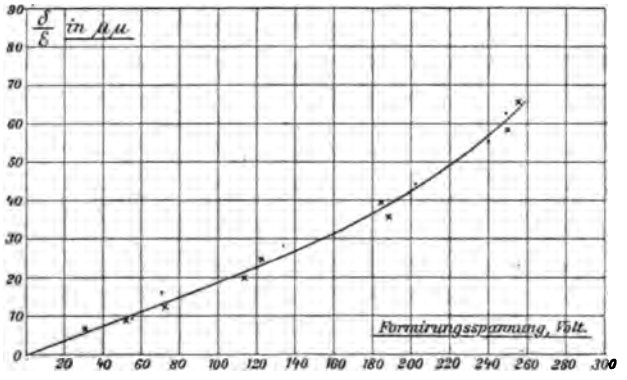
Daß die Ventilwirkung des Wismuts noch nicht bekannt war, ist auffällig. Denn wie die Tab. I angibt, ist die Ventilwirkung in vielen Elektrolyten stark ausgeprägt. Sie fehlt in $KClO_3$, $HNO_3$, $KNO_3$ und ist in LiF, NBr, KJ, $KMnO_4$ und Essigsäure nur in geringem Grade vorhanden, während KOH und $KH_2AsO_4$ besonders hohe Maximalspannungen ergeben, die allerdings die höchsten des Antimons nicht erreichen.

1) W. Holtz, Physik. Zeitschr. 6. p. 480. 1905.

Die angegebenen Maximalspannungen sollen ebenso wie beim Antimon nur zur Orientierung dienen, da auch beim Wismut die Maximalspannung mit zunehmender Verdünnung steigt.

Die Empfindlichkeit der Ventilwirkung gegen Erwärmung ist noch geringer als die des Antimons, wenn sie auch nicht so gering ist wie die des Aluminiums in $(NH_4)_2HBO_3$. Immerhin werden bei 90° C. und der Stromdichte 0,0035 Amp./qcm in stark verdünnter KOH noch 300 Volt ausgehalten.

Die Empfindlichkeit des Wismuts gegen Ausschalten ist in einigen Elektrolyten, besonders in $K_2CO_3$ sehr gering. Kapazitätsmessungen an einer in $K_2CO_3$ bis 250 Volt formierten Elektrode ergaben unmittelbar nach dem Ausschalten




× Bi in $K_2CO_3$. • Bi in $KH_2BO_3$.

Fig. 3. Kurve der Sperrfähigkeit des Wismuts [$e = f(\delta/e)$]. $t = 0°$ C.

$\delta/\varepsilon = 58\ \mu\mu$ und den dielektrischen Widerstand $15 \cdot 10^6$ Ohm/qcm bei 0° C. Nachdem die Zelle 2 Tage bei Zimmertemperatur gestanden hatte, war bei 0° C. $\delta/\varepsilon = 49\ \mu\mu$ und der dielektrische Widerstand $5 \cdot 10^5$ Ohm/qcm.

Diese Beständigkeit der wirksamen Schicht und die schon erwähnte geringe Empfindlichkeit gegen Erwärmen lassen die Verwendung des Wismuts zum Gleichrichten von Wechselströmen aussichtsvoll erscheinen.

Die Sperrfähigkeit des Wismuts wurde in $K_2CO_3$ und in $KH_2BO_3$ gemessen. Die Ergebnisse der Messungen sind in vorstehender Fig. 3 zusammengestellt.

Die einzelnen Punkte liegen nicht so gut, wie nach der Genauigkeit der Kapazitätsmessungen zu erwarten wäre. Anscheinend kommen im Verhalten der Sperrfähigkeit hier Unregelmäßigkeiten vor, deren Ursache noch nicht festgestellt werden konnte.

Auch hier zeigt sich, wie bei allen bisher untersuchten Metallen, Unabhängigkeit der Sperrfähigkeit vom Elektrolyten.

Tabelle II.

**Sperrfähigkeiten des Mg, Sb, Bi, Al, Ta in Abhängigkeit von der Formierungsspannung. $t = 0°$ C.**

| Formierungsspannung | Sperrfähigkeit in $\mu\mu$ des | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Mg | Sb | Bi | Al | Ta |
| 50 Volt | 12,7 | 11,0 | 9,2 | 4,8 | 3,5 |
| 100 „ | 26,3 | 23,8 | 18,7 | 10,3 | 7,1 |
| 150 „ | 41,4 | 38,7 | 29,1 | 16,1 | 11,6 |
| 200 „ | 60,1 | 58,0 | 42,0 | 22,3 | 17,0 |
| 250 „ | 86,0 | 84,4 | 60,8 | 29,3 | 22,9 |
| 300 „ | 120,5 | 119,4 | — | 37,1 | 28,8 |
| 350 „ | 165,5 | — | — | 46,6 | 34,6 |
| 400 „ | — | — | — | 58,0 | 40,3 |
| 450 „ | — | — | — | 71,0 | 45,0 |
| 500 „ | — | — | — | 85,9 | 49,1 |

In nachstehender Fig. 4 sind noch einmal sämtliche bisher gemessenen Sperrfähigkeiten, also die des Ta, Al, Bi, Sb und Mg zusammengestellt, und Tab. II gibt die den Kurven entsprechenden Zahlenwerte. Die Figur zeigt, daß die Sperrfähigkeit von Metall zu Metall wechselt.

Nach der bei der Untersuchung des Verhaltens von Aluminiumelektroden angenommenen Erklärung der Ventilwirkung, nämlich, daß die wirksame Schicht eine Gashaut sei, war dieses Resultat zunächst nicht zu erwarten, sondern vielmehr zu vermuten, daß die Sperrfähigkeit auch vom Metall unabhängig und nur durch die Substanz der Gashaut bedingt sei.

Nun wird die Dielektrizitätskonstante nicht nur durch die Substanz des Gases, sondern auch durch die der festen Haut bedingt. Da aber die chemische Zusammensetzung der festen Haut mit dem Elektrolyten wechselt, $\delta/\varepsilon$ jedoch vom Elektolyten unabhängig ist, so war angenommen worden, daß die

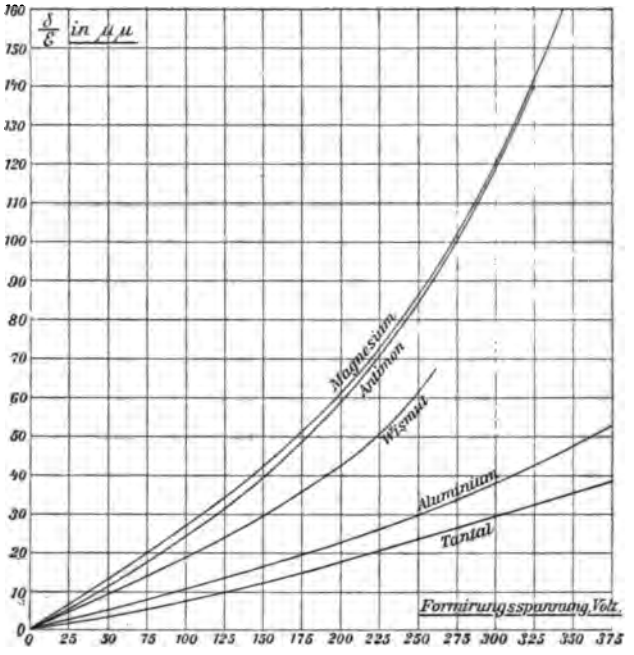



Fig. 4. Kurve der Sperrfähigkeit $[e = f(\delta/\varepsilon)]$ des Mg, Sb, Bi, Al, Ta. $t = 0°$ C.

wirksame Schicht ganz überwiegend aus einer Gashaut besteht und das Porengerüst der festen Haut nur einen geringen Bruchteil des gesamten Volumens ausmacht, so daß die Dielektrizitätskonstante fast nur durch die Substanz der Gashaut bedingt wird.

Es wäre aber auch folgendes denkbar: Die feste Haut bildet zwar einen wesentlichen Teil der wirksamen Schicht, so daß sie die Dielektrizitätskonstante erheblich beeinflußt, aber sie besteht innerhalb der wirksamen Schicht stets aus dem gleichen Oxyde des als Anode dienenden Metalles und ver-

wandelt sich erst, wenn sie aus der wirksamen Schicht herauswächst, in die durch den Elektrolyten bedingte chemische Verbindung, aus der die gewöhnliche feste Haut besteht.

Dieses würde dadurch hervorgerufen werden, daß das den Strom transportierende Anion des Elektrolyten an der Grenze der wirksamen Schicht, wo es einen hohen Widerstand findet, oder vielleicht überhaupt nicht passieren kann, den nur leicht gebundenen Sauerstoff abspaltet, der mit der Ladung durch die wirksame Schicht hindurch zum Metalle wandert und dort, unelektrisch geworden, entweder die Gashaut oder die Oxydhaut verstärkt. Der zurückgebliebene Rest reagiert mit der an der äußeren Grenze der wirksamen Schicht befindlichen Oxydhaut und bildet die betreffende chemische Verbindung der gewöhnlichen festen Haut. Das würde erklären, warum $\delta/\varepsilon$ vom Elektrolyten unabhängig ist und mit dem Anodenmetall sich ändert.

Da die Werte der Dielektrizitätskonstanten für die in Frage kommenden Metalloxyde nicht bekannt sind, so läßt sich nicht entscheiden, ob der Gang der Sperrfähigkeit $\delta/\varepsilon$ von Metall zu Metall dem $\varepsilon$ der betreffenden Metalloxyde entspricht, wie es nach der obigen Annahme der Fall sein müßte, wenn $\delta$ selbst als unabhängig vom Anodenmetall angenommen wird.

## Zusammenfassung.

1. Magnesium zeigt außer in KOH und $K_2CO_3$ noch Ventilwirkung in $Na_2HPO_4 + NH_3$, worin bis 350 Volt ausgehalten wurden. Die Empfindlichkeit der Ventilwirkung gegen Ausschalten ist in KOH und $K_2CO_3$ gering, die Empfindlichkeit gegen Erwärmung sehr groß.

2. Antimon ergibt die Ventilwirkung in fast allen Elektrolyten. Die höchste Spannung (über 700 Volt) wurde ausgehalten in stark verdünntem KCl. Die Empfindlichkeit gegen Erwärmen ist geringer wie die des Magnesiums, die gegen Ausschalten sehr groß.

3. Wismut zeigt ebenfalls in fast allen Elektrolyten Ventilwirkung. Die höchste Spannung wurde in stark verdünnter KOH erreicht, nämlich 600 Volt. Die Empfindlichkeit gegen Erwärmen und Ausschalten ist gering.

4. Die Kurve der „Sperrfähigkeit“ $\delta/\varepsilon$ hat für jedes der bisher untersuchten Metalle eine andere Lage.

5. Die bisherige Erklärung, daß die Ventilwirkung durch eine Gashaut in den Poren der festen Haut bewirkt werde, ist dahin abzuändern, daß die feste Haut innerhalb der wirksamen Schicht stets aus dem Oxyd des Anodenmetalles besteht und sich erst beim Verlassen der wirksamen Schicht in die gewöhnliche feste Haut (Verbindung des Metalles mit dem Anion des Elektrolyten) verwandelt.

(Eingegangen 29. August 1907.)

## 4. *Über chemische Lichtwirkungen. I. Das Phosgengleichgewicht unter dem Einfluß der Bestrahlung;*
*von Fritz Weigert.*

Die bis jetzt bekannten chemischen Reaktionen, welche durch das Licht beeinflußt werden, lassen sich nach Helmholtz[1]) ganz allgemein in zwei große Gruppen einteilen:

1. in solche, bei denen die Reaktion in derselben Weise stattfindet, als wenn das System nicht bestrahlt wäre, d. h. der von selbst verlaufende Vorgang wird durch das Licht beschleunigt oder verzögert. Das Licht hat in diesen Fällen einen ähnlichen Einfluß, wie ein zugesetzter Katalysator;

2. in solche, bei denen das Licht den chemischen Kräften entgegenwirkt. Die strahlende Energie wird in chemische Energie umgewandelt und kann in Form von Wärme oder irgendeiner anderen Energieform aus dem System wieder gewonnen werden. Es sind dies die für die Erkenntnis der Theorie der photochemischen Prozesse ungleich wichtigeren umkehrbaren photochemischen Reaktionen.[2])

Beispiele der ersten Gruppe sind in großer Anzahl bekannt. Es sei nur an die bei dem Ausbleichen der sogenannten unechten Farbstoffe sich abspielenden Reaktionen, an die Chlorierungen der organischen Stoffe im Sonnenlicht[3]), an die Zersetzung des Chlorwassers im Licht[4]) und an die beiden klassischen Gasreaktionen, die Bildung von Salzsäure aus Chlorknallgas[5]) und von Phosgen aus Kohlenoxyd und Chlor[6]) bei der Bestrahlung erinnert.

1) H. v. Helmholtz, Erhaltung der Kraft p. 25. 1847.

2) R. Luther u. F. Weigert, Zeitschr. f. phys. Chem. **51.** p. 298. 1905. Vgl. dort auch die Literaturangabe.

3) R. Luther u. E. Goldberg, Ztschr. f. phys. Chem. **56.** p. 43. 1906.

4) Wittwer, Pogg. Ann. **94.** p. 598. 1855.

5) R. Bunsen und H. E. Roscoe, Pogg. Ann. **100.** p. 43. 1857; Klassiker der exakt. Wissensch. Nr. 34 u. 38. Leipzig 1892.

6) Davy, Phil. Trans. p. 144. 1812; M. Wildermann, Zeitschr. f. phys. Chem. **42.** p. 257. 1903; G. Dyson u. A. Harden, Trans. Chem. Soc. **83.** p. 201. 1903.

Den wichtigsten Fall der zweiten Gruppe stellt unzweifelhaft die Assimilation der Kohlensäure in den grünen Blättern der Pflanzen im Lichte dar. Näher untersucht wurden u. a. die Spaltung des Chlorsilbers in Silbersubchlorid und Chlor[1]), in chemisch homogenen Systemen die Polymerisation des Anthracens zu Dianthracen[2]), und die Gasreaktionen: Sauerstoff: Ozon, Zersetzung des Ammoniaks, des Stickoxyds, Stickoxyduls[3]) und des Schwefeltrioxyds.[4]) Die zuletzt genannten Gasreaktionen werden, den Absorptionsgebieten der verschwindenden Stoffe entsprechend, nur durch das äußerste ultraviolette Licht hervorgerufen, während die erste durch sichtbares Licht und die zweite durch diejenigen ultravioletten Strahlen bewirkt wird, die noch von gewöhnlichem Glase durchgelassen werden.

Die Gase, welche unter Aufnahme von Energie entstanden sind: Ozon, $SO_2 + O_2$, welche den bei gewöhnlicher Temperatur instabilen Teil der Systeme darstellen, zeigen nun auch die Eigenschaften der ersten Gruppe, unter dem Einfluß bestimmter ultravioletter Strahlensorten, die von ihnen absorbiert werden, in die stabilen Gase $O_2$ und $SO_3$ überzugehen.

Es war nun von Interesse zu untersuchen, wie sich die Reaktionen der ersten Gruppe beim Gleichgewicht verhielten. Die Tatsache nämlich, daß sie in großer Entfernung vom Gleichgewicht in der Richtung nach demselben mit einer durch die Bestrahlung veränderlichen Geschwindigkeit verliefen, konnte ihren Grund in einer mehr oder weniger starken katalytischen Beeinflussung durch das Licht oder in einer Veränderung des Potentials haben. Es soll dies an dem Beispiel der Salzsäurebildung ganz kurz ausgeführt werden: Wenn die Reaktionsgeschwindigkeit dieser Reaktion, die Zunahme der Salzsäurekonzentration pro Zeiteinheit, durch die Gleichung

$$\frac{dc}{dt} = k_1 (H_2)(Cl_2) - k_2 (HCl)^2$$

ausgedrückt wird, so kann sich die Geschwindigkeit der stets nur gemessenen ersten Teilreaktion mit dem Geschwindigkeits-

1) R. Luther, Zeitschr. f. phys. Chem. **30.** p. 140. 1893.

2) R. Luther u. F. Weigert, l. c. und Zeitschr. f. phys. Chem. **53.** p. 385. 1906.

3) E. Regener, Ann. d. Phys. **20.** p. 1033. 1906.

4) A. Coehn, Zeitschr. f. Elektrochemie **13.** p. 545. 1907.

faktor $k_1$ dadurch verändern, daß $k_1$ und $k_2$ in gleicher Weise von der Bestrahlung beeinflußt werden, oder daß es in verschiedener Weise geschieht. Im ersteren Falle würde der Quotient dieser beiden Faktoren $K = k_1/k_2$, die Gleichgewichtskonstante, unverändert bleiben, die Wirkung wäre eine katalytische, im letzteren Fall würde sie sich ändern. Es entspricht dies einer Veränderung des Potentials, und da es nicht wahrscheinlich ist, daß sich die thermischen Daten und die „chemischen Konstanten“ [1]) der einzelnen Reaktionsteilnehmer im Licht ändern, so würde dies einschließen, daß die Reaktion im bestrahlten System mit einer anderen Wärmetönung verläuft, als im Dunkeln. Nur eine Untersuchung des *Gleichgewichtes* einer solchen Reaktion im Licht könnte hierüber Klarheit schaffen. Bis jetzt lagen noch keine Versuche in dieser Richtung vor.

Der ursprüngliche Plan, die hier als Beispiel erwähnte Salzsäuredissoziation im Lichte zu studieren, mußte aus technischen Gründen aufgegeben werden, da bei den hohen Temperaturen, ca. 1600°, bei welchen die Dissoziation erst einen merkbaren Betrag erreicht, die Einführung von Strahlung in die Platingefäße sehr schwierig erschien. Dieselbe müßte stärker sein, als die der Temperatur entsprechende schwarze Strahlung, welche bei der thermodynamischen Ableitung der Beziehung zwischen Temperatur und Gleichgewicht schon inbegriffen ist.

Brauchbarer erwies sich aber die andere photochemische Gasreaktion: $CO + Cl_2 = COCl_2$. Durch Versuche, welche im Physikalisch-Chemischen Institute der Universität Berlin von Dunant gemeinschaftlich mit Bodenstein ausgeführt waren und welche demnächst veröffentlicht werden, war festgestellt worden, daß die Dissoziation des Kohlenoxychlorids bei 500° ungefähr 67 Proz. betrug. Falls das Gleichgewicht durch die Bestrahlung verschoben wird, mußte der Effekt in diesem Gebiet mit empfindlichen Methoden nachzuweisen sein. Es wurde erwartet, daß die Dissoziation des Phosgens, welches als farbloser Körper nur sehr wenig Licht absorbiert, durch die Bestrahlung

1) W. Nernst, Nachrichten der Ges. der Wissensch. zu Göttingen. Math. phys. Klasse 1906, Heft I; vgl. ferner W. Nernst, Theoretische Chemie. 5. Aufl. p. 705.

zurückgedrängt wurde. Wildermann entwickelte die Formeln für eine solche Verschiebung aus reinen Geschwindigkeitsmessungen bei tiefer Temperatur, ohne einen einzigen Versuch in der Nähe des Gleichgewichtes auszuführen.[1]) Es soll schon das Resultat der Untersuchung vorweggenommen werden, daß eine Verschiebung des Gleichgewichtes durch Licht *nicht* stattfindet.

Da die Versuche bei einer Temperatur von 450—500° stattfinden mußten, so war es nötig, einen Ofen zu konstruieren, in dem das Gasgemisch bei konstanter Temperatur bestrahlt werden konnte. Die Temperaturen waren zu hoch, um irgendwelche durchsichtigen Heizflüssigkeiten oder Dämpfe zu verwenden. Es war daher nur die elektrische Heizung möglich. Der Ofen sei hier beschrieben, weil es mit demselben ermöglicht wird, photochemische Reaktionen bei beliebig hohen Temperaturen zu untersuchen.

Der eigentliche Heizkörper, Fig. 1, bestand aus einem käfigartigen Gestell aus Porzellan, welches man sich zweckmäßig aus zwei Filterplatten von ca. 7 cm Durchmesser herstellt, welche in der Mitte ein Loch von 2—3 cm haben. Die beiden Platten werden durch fünf starke Nickeldrähte, welche durch die Löcher der äußeren Lochreihe gesteckt sind, verbunden. Über die Drähte sind 20 cm lange, nicht zu dünnwandige Porzellanröhren gezogen, welche feucht mit einer Schicht von Asbestpapier überzogen wurden. Man erhält so ein fünfseitiges Prisma, von dem vier Seiten mit dünnem Asbestpapier bedeckt wurden, während die fünfte frei blieb. Alsdann wurde das Gestell mit reinem Nickeldraht in Windungen von 5 mm Abstand umwickelt, wie er für Widerstandsöfen allgemein im Gebrauch ist. Für höhere Temperaturen muß der Nickeldraht durch Platindraht ersetzt werden. Die Enden des Heizdrahtes werden mit dickeren Drahtstücken verbunden und gut isoliert herausgeführt.

Fig. 1.

1) M. Wildermann, l. c. Auch in einer neueren Untersuchung (Zeitschr. f. physik. Chem. 59. p. 553, 703; 60. p. 70. 1907) liefert Wildermann keinen experimentellen Beweis für die Anwendbarkeit seiner theoretisch abgeleiteten Gleichgewichtsformeln auf die im homogenen System stattfindende Phosgenreaktion.

Die vier bedeckten Seiten des Prismas werden auf der Außenseite gleichfalls mit Asbest bekleidet, die fünfte bleibt zur Bestrahlung des Innenraumes frei. Die dünnen Drähte werfen keinen merklichen Schatten. Mit entsprechend ausgeschnittenen Stücken von starker Asbestpappe wird der Heizkörper in einen Aluminiumzylinder eingesetzt, der einen 3 cm breiten Schlitz hat. Der Zylinder ist seinerseits mit Asbestringen in ein weites Becherglas aus Jenaer Geräteglas, dessen Boden abgesprengt ist, eingesetzt. Die Enden des Heizkörpers, der 5 cm kürzer ist als das Glas, werden durch ringförmige Hohlkörper aus Asbest gehalten, die mit kleinen Stücken aus demselben Material ausgefüllt sind. Das Glas, welches außen und

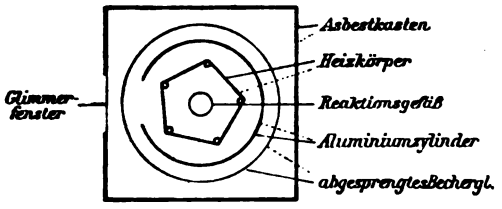



**Fig. 2. Stellt die Anordnung im Durchschnitt dar.**

innen bis auf die Bestrahlungsseiten mit Asbestpapier überzogen ist, ist in einem Kasten aus starker Asbestpappe eingebaut, welcher ein mit einer Glas- oder Glimmerplatte verschlossenes Fenster hat. Für die hier beschriebenen Versuche genügte die Verwendung von gewöhnlichem Glas. Für andere photochemische Reaktionen wird Uviolglas oder Quarz vorzuziehen sein.

Die Wärmeisolierung des Ofens geschieht nur durch Luft, er arbeitet daher nicht so ökonomisch wie die gewöhnlichen Widerstandsöfen mit Magnesiawärmeschutz, jedoch konnte mit einem Stromverbrauch von 40 Volt und 5 Amp. stundenlang eine Temperatur von ca. 500° konstant erhalten werden. Ein Vorteil seiner kleinen Wärmekapazität ist sein schnelles Anwärmen und Abkühlen, ein Nachteil die starke Veränderung der Temperatur bei geringen Stromschwankungen. Nachdem sich automatische Temperaturregulatoren als zu träge erwiesen hatten, wurde der Strom durch feines Regulieren eines Vorschaltwiderstandes mit der Hand und Beobachten eines

empfindlichen Voltmeters, welches die Spannung an den Enden des Ofendrahtes anzeigte, in völlig ausreichender Weise konstant gehalten.

Die Versuche wurden nach der statischen Methode ausgeführt und zwar so, daß in einem mit einem Manometer verbundenen Gefäß aus der Veränderung des Druckes der Fortgang der Dissoziation bestimmt wurde. Da Kohlenoxyd und Chlor bei hohen Temperaturen Quarz und einige Glassorten angreifen, so waren nur wenige Gläser für die Versuche brauchbar. Die Einwirkung, die beim Quarz in einer oberflächlichen Tridymitbildung, bei den Gläsern in einer leichten Anätzung besteht[1]), stört gewöhnliche chemische Reaktionen nur wenig, photochemische werden aber durch die Trübung der Gefäßwände unausführbar. Brauchbar erwiesen sich Thüringer Thermometerglas, welches allerdings nicht sehr hoch erhitzt werden darf, und vor allem das Jenaer Borosilikatglas 59 III, das sich ja in so vieler Hinsicht als ein außerordentlich brauchbares Material erwiesen hat. Die Versuchsanordnung ist in Fig. 3 schematisch wiedergegeben. Die Bestrahlungsgefäße *A*

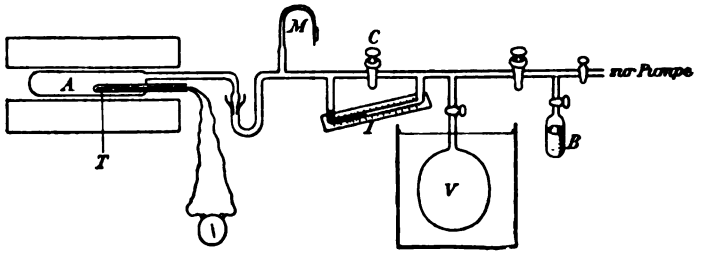



Fig. 3.

waren 2 cm weite Röhren, in die ein 5 mm weites Rohr zur Aufnahme eines Eisen–Konstantan-Thermoelement *T* eingeschmolzen war und die in eine enge Kapillare endigten, welche einen Schliff trug, um die Verbindung mit den übrigen Teilen des Apparates zu vermitteln. Ein Glasmanometer *M* nach Ladenburg war zur Druckmessung angeschmolzen.

1) Bei hohen Temperaturen entstehen Siliciumchloride, deren Bildung besonders bei Gegenwart des reduzierenden Kohlenoxyds begünstigt wird.

Gummiverbindungen waren vollständig vermieden. Als Lichtquellen wurden elektrische Bogenlampen und Quecksilberdampflampen aus gewöhnlichem, Uviol- und Quarzglas verwendet. Zwischen Lampe und Ofen war eine wasserdurchflossene planparallele Küvette von 5 cm Dicke eingeschaltet, welche sich als ein ausreichender Wärmeschutz erwies. Die Abblendung des Lichtes mußte zwischen Lampe und Küvette geschehen, da jede Änderung der Strahlungsverhältnisse in der Nähe des Ofens bei seiner kleinen Wärmekapazität sich sofort in deutlichen Temperaturänderungen in dem Beobachtungsgefäß geltend machte.

Die Füllung des Gefäßes geschah so, daß es zunächst mit der Wasserpumpe unter Zwischenschaltung von Phosphorpentoxydgefässen möglichst evakuiert und dann aus dem Vorratsgefäß *B* mit Phosgen gefüllt wurde. Dasselbe wurde fünf- bis sechsmal wiederholt und alsdann das Phosgen bis auf einen Druck von ca. 200 mm ausgepumpt. Der Druck war dann bei der hohen Versuchstemperatur ca. 1 Atmosphäre. Bis 450° verhielt sich das Gas in dem Gefäß wie ein gewöhnliches, nicht dissoziierendes Gas. Bei dieser Temperatur begann es zu dissoziieren, wobei der Druck schnell seinen Endwert erreichte.[1]) Wenn sich bei konstantem Heizstrom der Druck nicht mehr änderte, wurde das Gefäß bestrahlt. Bei Anwendung aller Vorsichtsmaßregeln konnte hierbei keine Änderung des Druckes beobachtet werden.

Da mit dem Ladenburgschen Manometer, besonders infolge von Störungen durch Erschütterungen, die Ablesung nicht genauer, als auf 1 mm Hg ausgeführt werden konnte, wurde die Beobachtung durch die Angaben eines Schwefelsäurefadens *I* in einer engen Kapillare verfeinert. Der Faden war in der in der Fig. 3 angegebenen Weise mit dem Bestrahlungsgefäß verbunden. Das letztere kommunizierte durch ein Hahnrohr *C* und durch die Kapillare mit einem Glaskolben *V* von 0,5 l Inhalt, welcher sich in einem großen Wasserbad befand. Bei geöffnetem Hahn *C* wurde das ganze System mit Phosgen gefüllt und dann das Bestrahlungsgefäß auf die Tem-

1) Wie auch gleichzeitig von Dunant nachgewiesen wurde, scheint sich bei der Reaktion ein Autokatalysator, sehr wahrscheinlich das Chlor, zu bilden.

peratur von 480° gebracht. Wenn das Gleichgewicht erreicht war, was man durch momentanes Schließen des Verbindungshahnes kontrollieren konnte — der Index mußte dann stehen bleiben —, wurde bei geschlossenem Hahn bestrahlt. Es konnte dann bei peinlichster Einhaltung aller Vorsichtsmaßregeln keine Verschiebung des Schwefelsäurefadens beobachtet werden. Da das Volumen des Beobachtungsgefäßes 30 ccm betrug und da 1 cm der Kapillare 0,03 ccm entsprach, so hätte eine noch gut zu beobachtende Verschiebung des Fadens um 1 mm einer Volumveränderung um 0,0001 entsprochen. Da der Druck in dem gegen das Bestrahlungsgefäß großen Kolben $V$ konstant ca. 1 Atmosphäre war, so hätte jene Volumdifferenz eine Druckveränderung von ca. 0,08 mm Hg ausgemacht. Gleichzeitig ergab sich das Resultat, daß die Temperatur des Ofens während der Zeit der Beobachtung auf weniger als 0,075° konstant gewesen war. Falls also tatsächlich eine Gleichgewichtsverschiebung durch die Bestrahlung stattgefunden hat, so muß sie weniger als 0,01 Proz. betragen haben. Dasselbe wurde bei 480, 500 und 510° gefunden, wo die Dissoziation nach Dunant 60, 67 und 70 Proz. beträgt.

Trotz dieses negativen Resultates wäre es dennoch möglich, daß das Potential der Reaktion durch das Licht verändert wird, wie aus folgenden Überlegungen hervorgeht. Es ist eine charakteristische Eigenschaft der photochemischen Reaktionen, daß ihr Temperaturkoeffizient ein kleiner ist. Reine chemische Reaktionen haben dagegen einen hohen Temperaturkoeffizienten. Der erstere ist 1—1,4 und der zweite 2—3 für eine Temperatursteigerung von 10°. Es geht hieraus hervor, worauf auch Plotnikow[1]) hingewiesen hat, daß eine Reaktion, die im Dunkeln mit meßbarer Geschwindigkeit verläuft und gleichzeitig durch das Licht beschleunigt wird, bei höheren Temperaturen einen immer kleiner werdenden Einfluß des Lichtes erkennen läßt, als bei niederen. Zuletzt verschwindet der Lichteinfluß vollständig. Wenn wir uns in diesem Gebiete bei unseren Versuchen schon befinden, so ist es allerdings unmöglich, eine Verschiebung des Gleichgewichtes experimentell auf die obige Weise nachzuweisen.

---

1) J. Plotnikow, Zeitschr. f. phys. Chem. 48. p. 214. 1907.

Es war daher die Untersuchung nötig, ob bei den hohen Temperaturen in der Nähe des Gleichgewichtes überhaupt noch eine Beschleunigung der Vereinigung von Kohlenoxyd und Chlor zu Phosgen nachzuweisen war. In dem bisher benutzten Apparat war dies nicht gut möglich, da die Dissoziation, wenn sie einmal eingeleitet war, so schnell verlief, daß keine exakten Geschwindigkeitsmessungen bei den starken Nachwirkungen des Glasmanometers durchgeführt werden konnten. Die weiteren Versuche wurden daher in einem Differentialapparat ausgeführt (Fig. 4).

Der oben beschriebene Ofen wurde in der Mitte durch eine Asbestscheidewand, welche genau für die Dicke der Wand des Becherglases ausgeschnitten war, in zwei Teile geteilt, von denen ein jeder ein kleineres Bestrahlungsgefäß mit eingeschmolzenem Rohr für das Thermoelement enthielt (in der Figur fortgelassen). Die Gefäße hatten 13,5 und 14 ccm Inhalt. Die Verschiedenheit konnte durch wechselseitiges Bestrahlen eliminiert werden. Beide waren durch Schliffe mit einem Kapillarsystem verbunden, welches aus der Figur zu ersehen ist. Beide Gefäße konnten gemeinsam durch den Dreiweghahn mit der Pumpe verbunden, evakuiert und gefüllt werden. War der Hahn geschlossen, so kommunizierten sie durch das mit dem Schwefelsäureindex gefüllten kapillare Verbindungsrohr. Da beide gegeneinandergeschalteten Gefäße nur ein kleines Volumen hatten, so war die Empfindlichkeit dieser Methode absolut viel geringer als die zuletzt besprochene. Sie zeigte aber alle typischen Vorteile der Differentialmethoden und eine große Unabhängigkeit von kleinen Temperaturschwankungen, da diese in demselben Ofen beide Gefäße in gleicher Weise beeinflußten. Die mittlere Scheidewand des Ofens wurde vor demselben durch ein Aluminiumblech bis zur Wasserküvette fortgesetzt und ebenso die letztere selbst geteilt. Die Bestrahlung geschah durch eine Heraeussche Hochspannungsquecksilber-

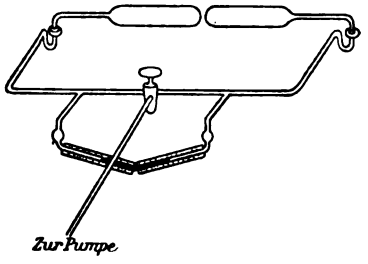



Fig. 4.

dampflampe, welche bei 180 Volt eine Lichtstärke von 3000 Kerzen haben soll. Für die leihweise Überlassung dieser Lampe spreche ich Hrn. Prof. Rubens meinen Dank aus. Die Abblendung der einen Hälfte der Anordnung geschah in der vorher erwähnten Weise zwischen Lampe und Wasserküvette.

Die Versuche wurden so angestellt, daß der Ofen zunächst auf eine Temperatur von 450° erwärmt wurde, bis Druckkonstanz eingetreten war. Dann wurde der Strom verstärkt, wie es die zu erreichende Temperatur verlangte. Während sich nun das Phosgengas erwärmte und dabei dissoziierte, wurden die beiden Bestrahlungsgefäße abwechselnd bestrahlt und verdunkelt. Die Wanderung des Index deutete dann an, daß stets in dem bestrahlten Gefäß die Dissoziation schneller vor sich ging, als in dem verdunkelten. Je mehr sich das Gasgemisch dem Gleichgewicht näherte, um so kleiner wurden die Änderungen und verschwanden zuletzt völlig. Ein Einfluß der Erwärmung durch die Strahlung, welcher dieselbe Erscheinung hervorrufen müßte, ist nicht vorhanden. Beim Abkühlen wurde beobachtet, daß die Vereinigung der Gase in dem bestrahlten Gefäß schneller vor sich ging, als in dem dunkeln.

Die Versuche sind bis jetzt mehr qualitativer Natur, sind aber, wie aus den folgenden Betrachtungen hervorgeht, zur

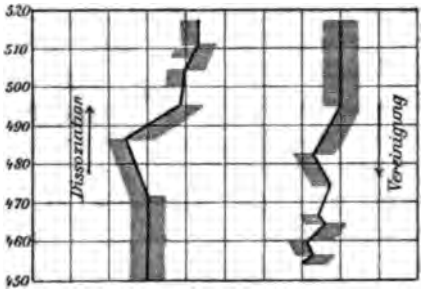



Fig. 5. Fig. 6.

Erklärung der Erscheinungen ausreichend. In den folgenden Figuren sind die am Schwefelsäureindex beobachteten Verschiebungen graphisch aufgetragen. Die gebrochene Linie in den Figg. 5 und 6 bedeutet die Verschiebung des Index mit veränderlicher Temperatur, und zwar ist das eine Gefäß auf der rechten Seite, das andere auf der linken Seite der Figur

gedacht. Während der Ofen sich langsam erwärmte (durch einen aufwärts gerichteten Pfeil angedeutet; Fig. 5) oder abkühlte (Pfeil nach abwärts gerichtet; Fig. 6), d. h. während

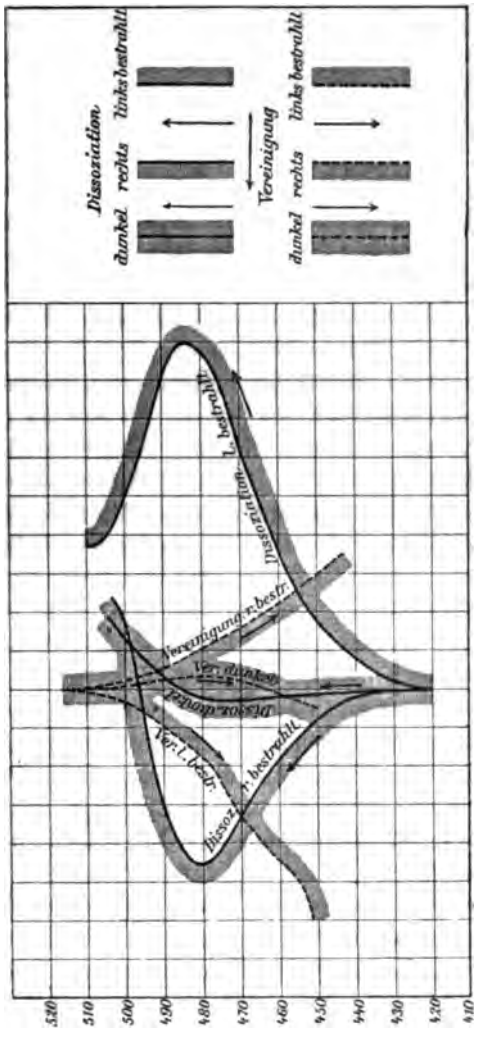



Fig. 7.

*Versuche bei konstanten Bestrahlungsverhältnissen.*

das Gasgemisch dissoziierte oder sich vereinigte, wurden die Gefäße in verschiedener Weise bestrahlt oder verdunkelt. Die Temperaturen, welche während des Verlaufes am Thermo-

element abgelesen wurden, sind auf der Ordinate aufgetragen, auf der Abszissenachse bedeutet 0,1 Teilstrich eine Verschiebung des Index um 1 mm pro Minute. Die schraffierten Felder rechts und links von der gebrochenen Linie bedeuten, welches der Bestrahlungsgefäße zwischen zwei bestimmten Temperaturen verdunkelt war. Wenn z. B. bei der *Dissoziation* das rechte Gefäß bestrahlt wurde, nahm in demselben der Druck schneller zu als in dem verdunkelten, der Index wanderte nach links; wenn bei der *Vereinigung* dasselbe Gefäß belichtet wurde, nahm der Druck schneller ab, der Index wanderte also nach rechts. Dieselben Bestrahlungsverhältnisse wurden für gewöhnlich 2 Min. konstant belassen. Aus den Figuren ersieht man außer den schon erwähnten Erscheinungen, daß bei der Dissoziation das linke Gefäß stets etwas wirksamer ist als das rechte. Es hat dies wahrscheinlich seinen Grund darin, daß das erstere ein um $^1/_2$ ccm größeres Volumen hatte, als das letztere, und außerdem aus einem älteren, schon viel gebrauchten Gefäß hergestellt war, während das rechte neu war, so daß auch die katalytischen Eigenschaften im Dunkeln stärkere waren. Wenn man den Versuch derartig anstellte, daß während der Erwärmung oder Abkühlung die Bestrahlungsverhältnisse die gleichen blieben, so konnten die in der Fig. 7 wiedergegebenen Erscheinungen beobachtet werden. Falls bei der *Dissoziation* das rechte Gefäß andauernd bestrahlt wurde, wanderte der Index zunächst nach links, erreichte dort einen äußersten Punkt und kehrte dann allmählich wieder nach der Mitte zurück. Wenn das Gleichgewicht nicht verschoben wird, deutet dies an, daß das Gasgemisch in dem belichteten Gefäß demselben schneller zustrebt. Wenn der Druck in diesem schon konstant geworden ist, dehnt sich das Gasgemisch in dem verdunkelten Gefäß noch weiter aus und treibt den Schwefelsäurefaden wieder nach rechts. Bei der umgekehrten Bestrahlung findet das Entgegengesetzte statt.[1]) Bei der *Vereinigung* im Lichte verläuft die Erscheinung in dem hier nur zur Beobachtung gelangenden Anfangsstadium so, daß stets

1) Man kann dieses Zurückgehen im Sinne von Trautz (Zeitschr. f. wissensch. Phot. 4. p. 351. 1906) vielleicht rein äußerlich eine photochemische Verzögerung nennen. Dieselbe verschwindet natürlich, wenn man von gleichen Gaszusammensetzungen in beiden Gefäßen ausgeht.

der Index sich nach der bestrahlten Seite zu bewegt. Die Erscheinung verlief im Sonnenlicht in genau derselbe Weise. Eine Erwärmung des Gefäßes war bei der verwendeten Anordnung, bei der das Sonnenlicht an einem Wintertage durch mehrere Spiegel in den Beobachtungsraum hineinreflektiert wurde, ausgeschlossen.

Wenn wir das experimentelle Ergebnis der vorliegenden Untersuchung zusammenfassen, so geht daraus hervor, daß auch bei den hohen Temperaturen von ca. 500°, bei denen das Gleichgewicht der umkehrbaren Reaktion

$$CO + Cl_2 \rightleftharpoons COCl_2$$

untersucht wurde, ein sehr merkbarer beschleunigender Einfluß des Lichtes auf *beide* Einzelreaktionen, sowohl die Vereinigung von Kohlenoxyd und Chlor zu Phosgen, als auch die Dissoziation desselben, selbst mit einem ziemlich unempfindlichen Differentialapparat beobachtet werden konnte. Daß das Gleichgewicht selbst nicht verschoben wurde, wurde bei drei verschiedenen Temperaturen mit einer sehr empfindlichen Anordnung zur Messung des Dissoziationsdruckes nachgewiesen.

Es geht also hieraus hervor, daß das Licht auf die Phosgenreaktion rein katalytisch wirkt, und daß das Potential nicht verändert wird. Der Versuch einer Erklärung für diese Erscheinung, sowie einige Folgerungen, welche sich daraus ergeben, sollen in einer folgenden Mitteilung wiedergegeben werden.

(Eingegangen 31. Juli 1907.)

## 5. *Zur Theorie der Kombinationstöne; von E. Waetzmann.*

Erklingen gleichzeitig zwei Primärtöne, so hört man außer ihnen und ihren Obertönen in der Regel noch eine ganze Reihe anderer Töne, die sogenannten Kombinationstöne. Dieselben existieren nur dann schon außerhalb des Ohres, wenn die Primärtöne einen gemeinsamen Entstehungsort haben; man sieht das daraus, daß sie nur in diesem Fall passend abgestimmte Resonatoren zum Mittönen bringen. Bei getrennten Erregungsstellen der Primärtöne lassen sich die Kombinationstöne im Luftraum außerhalb des Ohres nicht nachweisen, können also erst im Ohr selbst entstehen. Man pflegt sie deshalb als „subjektiv" zu bezeichnen, im Gegensatz zu den erstgenannten „objektiven" Kombinationstönen. Ich möchte die Bezeichnung „subjektiv" und „objektiv" ganz vermeiden, weil sie leicht zu Mißverständnissen führen kann, nämlich zu der Vorstellung, daß der Unterschied zwischen beiden Arten kein rein physikalischer sei.

Kombinationstöne, welche Resonatoren erregen können, kommen zustande in der mehrstimmigen Sirene, dem Harmonium und dem Appunschen Zungenkasten; natürlich auch noch überall da, wo dieselben Bedingungen herrschen wie in einem der genannten Instrumente. So erhielt ich sie z. B. an einer Klappentrompete, wo die einzelnen Töne durch schwingende Zungen verschiedener Eigenperiode hervorgebracht wurden. Besonders erwähnen möchte ich, daß hierbei die Kombinationstöne um so stärker waren, je stärker die Primärtöne angegeben wurden. Die für den Fall dieser Instrumente von Helmholtz gegebene Ableitung[1]) der Kombinationstöne wird wohl allgemein als richtig anerkannt.

1) H. v. Helmholtz, Tonempfindungen, Beilage XVI.

Dagegen ist die für den Fall getrennter Primärtöne von Helmholtz aufgestellte Theorie[1]) vielfach angegriffen worden. Die Bedenken, die gegen sie geltend gemacht werden, hat meines Wissens L. Hermann[2]) am schärfsten präzisiert. Die Theorie behauptet, Kombinationstöne müssen überall da entstehen, wo das von den beiden Primärtönen erregte Medium so heftige Schwingungen ausführt, daß die elastische Kraft nicht nur von der ersten, sondern auch von höheren Potenzen der Elongation abhängt. Die Schwingungsgleichung für einen Massenpunkt, auf den die beiden Primärtöne einwirken, lautet dann:

$$(1) \qquad \frac{m\,d^2x}{dt^2} + a\,x + b\,x^2 + f\sin p\,t + g\sin q\,t = 0.$$

Helmholtz integriert diese Gleichung, indem er

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots \\ f = \varepsilon f_1 \\ g = \varepsilon g_1 \end{cases}$$

setzt, und nun die mit gleichen Potenzen von $\varepsilon$ multiplizierten Glieder einzeln gleich Null setzt. Hermann glaubt, daß diese Art der Integration zu Widersprüchen mit experimentellen Tatsachen führt. Er sagt nämlich, es werde dabei die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß in Gleichung (1) das Glied $b\,x^2$ im Vergleich mit den übrigen Gliedern so klein sei, daß es in erster Annäherung vernachlässigt werden könne. Daraus würde aber folgen, daß die Amplituden der Kombinationstöne verschwindend klein gegen die der Primärtöne seien. Dieses Resultat stehe im Widerspruch mit der leicht zu beobachtenden Tatsache, daß man unter Umständen bei verklingenden Primärtönen Differenztöne außerordentlich stark und deutlich hört.

Mir scheint die Grundlage des Hermannschen Einwandes, nämlich die Behauptung, daß in der Helmholtzschen Integration implicite die Voraussetzung stecke, $b\,x^2$ sei gegenüber den übrigen

---

1) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. **49.** p. 497. 1856. Tonempfindungen, Beilage XII.

2) L. Hermann, Pflügers Archiv **49.** p. 499. 1891.

Gliedern der Gleichung (1) verschwindend klein, nicht richtig zu sein. Hermann verlangt zu viel, wenn er fordert, die Helmholtzsche Reihe solle, trotzdem man doch bei einem bestimmten Gliede abbrechen muß, die volle Grundgleichung befriedigen. Wenn die Reihe z. B. mit dem dritten Gliede abgebrochen wird, so kann sie nur der Differentialgleichung ohne Vernachlässigung genügen, welche durch Addition der drei ersten Gleichungen, in welche die Grundgleichung zerfällt, entsteht, also der Gleichung:

$$m\left(\frac{d^2(\varepsilon x_1)}{dt^2} + \frac{d^2(\varepsilon^2 x_2)}{dt^2} + \frac{d^2(\varepsilon^3 x_3)}{dt^2}\right) + a(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3)$$
$$= -\varepsilon f_1 \sin pt - \varepsilon g_1 \sin qt - b\varepsilon^2 x_1^2 - 2b\varepsilon^3 x_1 x_2,$$

nicht aber der Grundgleichung selber. Damit ist durchaus nicht gesagt, daß Glieder mit höheren Potenzen von $x$ gegen solche mit niederen vernachlässigt werden müssen. Übrigens möchte ich bemerken, daß jeder weitere Beweis gegen die Helmholtzsche Ableitung überflüssig wäre, wenn sie wirklich diese Voraussetzung enthielte. Dann wäre nämlich in Wirklichkeit die Grundgleichung nicht vom zweiten Grade, sondern linear. Eine lineare Differentialgleichung ergibt aber stets ungestörte Superposition der Grundperioden; es lassen sich aus ihr also nie Kombinationstöne herleiten.

Ein Bedenken mathematischer Art liegt gegen die Helmholtzsche Theorie allerdings insofern vor, als der Konvergenzbeweis für die zur Integration benutzte Reihe fehlt. Man darf wohl aber rückwärts aus der im großen ganzen guten Übereinstimmung der theoretisch gefundenen Resultate mit dem Experiment schließen, daß Helmholtz im Rechte war, wenn er sich über diese mathematische Schwierigkeit hinwegsetzte. Übrigens berührt die Frage nach der Konvergenz die Hermannsche Argumentation nicht.

Als inkorrekt muß man auch folgenden Punkt in der Helmholtzschen Ableitung bezeichnen: In der Grundgleichung für die Schwingungsbewegung des Massenpunktes $m$ fehlt das Dämpfungsglied, d. h. der Dämpfungsfaktor ist gleich Null angenommen. Trotzdem werden die Glieder mit dem Eigenton des Massenpunktes vernachlässigt, d. h., es wird eine ziemlich starke Dämpfung angenommen. Diese Inkorrektheit läßt sich

aber leicht beseitigen, denn die Gleichung ist auch dann noch ohne weiteres nach der Helmholtzschen Methode integrierbar, wenn ein Dämpfungsglied $k(dx/dt)$ eingefügt wird.[1]) Man erhält dann für $x_1$ und $x_2$ folgende Werte:

$$x_1 = A e^{-\frac{kt}{2m}} \sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} + c\right)$$
$$+ \frac{f_1}{m\sqrt{\left(\frac{a}{m} - p^2\right)^2 + p^2\frac{k^2}{m^2}}} \sin(pt - \chi)$$
$$+ \frac{g_1}{m\sqrt{\left(\frac{a}{m} - q^2\right)^2 + q^2\frac{k^2}{m^2}}} \sin(qt - \psi),$$

wo $\chi$ gegeben ist durch den Ausdruck:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{pk}{m\left(\frac{a}{m} - p^2\right)}$$

und $\psi$ durch den Ausdruck:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{qk}{m\left(\frac{a}{m} - q^2\right)}.$$

Hier darf nun wirklich das erste Glied der rechten Seite gleich Null gesetzt werden, da infolge der Dämpfung der Eigenton des schwingenden Massenpunktes schnell verschwindet. Setzt man noch

$$\frac{f_1}{m\sqrt{\left(\frac{a}{m} - p^2\right)^2 + p^2\frac{k^2}{m^2}}} = \varrho$$

und

$$\frac{g_1}{m\sqrt{\left(\frac{a}{m} - q^2\right)^2 + q^2\frac{k^2}{m^2}}} = \sigma,$$

so erhält man:

$$x_1 = \varrho\sin(pt - \chi) + \sigma\sin(qt - \psi),$$

wo $\varrho$ und $\sigma$ Amplituden, $\chi$ und $\psi$ Phasenkonstanten bedeuten.

1) Wie mir Hr. Prof. E. R. Neumann in Marburg mitteilt, hat er diese Korrektion schon früher angebracht, ohne sie jedoch zu veröffentlichen.

Mit diesem Werte von $x_1$ ergibt sich:

$$x_2 = -\frac{b}{2a}(\varrho^2+\sigma^2) + \frac{b\varrho^2\cos(2pt-\chi')}{2m\sqrt{\left(\frac{a}{m}-4p^2\right)^2+4p^2\frac{k^2}{m^2}}} + \frac{b\sigma^2\cos(2qt-\psi')}{2m\sqrt{\left(\frac{a}{m}-4q^2\right)^2+4q^2\frac{k^2}{m^2}}} - \frac{b\varrho\sigma\cos\left((p-q)t-\chi''\right)}{m\sqrt{\left(\frac{a}{m}-(p-q)^2\right)^2+(p-q)^2\frac{k^2}{m^2}}} + \frac{b\varrho\sigma\cos\left((p+q)t-\psi''\right)}{m\sqrt{\left(\frac{a}{m}-(p+q)^2\right)^2+(p+q)^2\frac{k^2}{m^2}}},$$

worin $\chi'$, $\psi'$, $\chi''$ und $\psi''$ Phasenkonstanten sind.

Die hier gefundenen Ausdrücke unterscheiden sich von den Helmholtzschen nur dadurch, daß die Faktoren, welche die Amplituden bedeuten, komplizierter geworden sind.[1])

Die Tatsache, daß man Kombinations-, wenigstens Differenztöne unter Umständen auch bei schwächster Primärtongebung ausgezeichnet hören kann, ist noch nicht notwendig ein Widerspruch gegen die Helmholtzsche Theorie. Nach ihr sind die Amplituden der Kombinationstöne proportional dem Produkt der Amplituden der Primärtöne, womit aber noch nicht gesagt ist, daß, wenn letztere klein sind, die ersteren kleine Größen höherer Ordnung sind. Es könnte ja noch die Proportionalitätskonstante eine wesentliche Rolle spielen. In ihr stecken die Konstanten $a$ und $b$, d. h. die elastischen Eigenschaften des schwingenden Massenpunktes; diese können natürlich stark variieren. Das besagt aber, zwei Primärtöne von bestimmter Intensität bringen vielleicht in einem Körper, auf den sie beide einwirken, nur recht schwache Kombinationstöne hervor, während sie — bei gleicher Intensität — einen anderen elastischen Körper zu Schwingungen erregen, in denen die Kombinationstöne mit verhältnismäßig großen Amplituden vertreten sind. Nach der Theorie darf man nur verlangen, daß bei ein und demselben

1) In der an anderer Stelle vom Verf. gegebenen Ableitung finden sich einige Vorzeichenfehler, bzw. Inkorrektheiten im Ausdruck, die eventuell zu Mißverständnissen führen könnten.

schwingenden Medium mit wachsenden Amplituden der Primärtöne die Amplituden der Kombinationstöne in stärkerem Maße ansteigen. Soweit meine Erfahrung reicht, scheint diese Forderung auch stets erfüllt zu werden. Daß Kombinationstöne unter Umständen gerade bei verklingenden Primärtönen besonders gut zu hören sind, zuweilen so stark, daß sie die Primärtöne überdecken, wie man in der Literatur mehrfach angegeben findet, ist mit dieser Forderung wohl vereinbar.

Ausführlicher hat sich mit der Frage nach der Stärke der Kombinationstöne F. Krüger[1]) beschäftigt. Er gibt an, niemals einen Kombinationston beobachtet zu haben, der an Stärke den Primärtönen gleich oder nahe gekommen wäre. Bei einigen Beobachtungen, die ich mit einem Satz Königscher Stimmgabeln von 1024 bis 4096 Schwingungen anstellte, hörte ich den Differenzton erster Ordnung zuweilen aber auch so laut, daß ich Mühe hatte, die Primärtöne aus dem Gesamtklange deutlich herauszuhören. Dieser Fall trat aber gerade nur bei sehr starken Primärtönen ein. Es wurden auch tiefere Stimmgabeln auf Resonanzkästen (128 bis 900 Schwingungen) als Primärtonquellen benutzt. Hierbei traten allerdings bei ganz geringer Intensität der Primärtöne die Differenztöne zuweilen überraschend deutlich hervor. Trotzdem braucht nicht einmal ihre *physiologische* Intensität ebenso groß oder gar größer gewesen zu sein als bei lauten Primärtönen. Wie ich nämlich in zahlreichen Fällen konstatierte, wurden sie von ungeübten Beobachtern in der Regel nicht gehört, während diese bei starken Primärtönen auch die Differenztöne sofort auf das deutlichste hörten. Mir scheint die Bemerkung F. Krügers, daß, wie Helmholtz die relative Stärke der Kombinationstöne unterschätzte, sie neuerdings meistens überschätzt wird, vollkommen richtig zu sein.

Vor allem aber ist es ja überhaupt vollkommen unzulässig, aus der Intensitäts*empfindung* rückwärts auf die *physikalische* Intensität der Töne zu schließen, die doch allein für die Beantwortung der Frage, ob die Theorie die Erscheinungen richtig wiedergibt, in Betracht kommt. Selbst wenn man also eventuell Kombinationstöne bei schwachen Primärtönen besser

1) F. Krüger, Wundts Philos. Studien **16.** p. 307—379 und p. 568 bis 664. 1900; **17.** p. 185—309. 1901.

hört als bei starken, ist das noch kein Beweis gegen das Helmholtzsche Resultat. Denn man weiß nicht, wie die physiologische oder richtiger vielleicht psychologische Intensität eines Tones von seiner physikalischen abhängt, zumal in Zusammenklängen, wo die gegenseitige Überdeckung und Verschmelzung eine große Rolle spielt. Sind beide Primärtöne sehr hoch, so wird im allgemeinen der viel tiefere Differenzton erster Ordnung auch bei kleiner Amplitude neben den Primärtönen gut zu hören sein. Tiefe Töne werden durch hohe nämlich fast gar nicht überdeckt, während das Umgekehrte sehr stark der Fall ist. Besonders frappant tritt diese Tatsache übrigens bei zwei Tönen hervor, von denen der eine die Oktave des anderen ist, weil hier noch die sogenannte Verschmelzung hinzukommt. Wird die höhere Oktave sehr leise angegeben im Verhältnis zur tiefen, so ist sie aus dem Zusammenklange überhaupt nicht herauszuhören, während die tiefe auch bei schwächster Tongebung stets sehr deutlich zu erkennen ist. Noch komplizierter wird der Vorgang, wenn man es mit mehr als zwei Grundtönen zu tun hat. Aus einem Dreiklang z. B. ist in der Regel der mittlere Ton am schwersten herauszuhören, wenn alle drei annähernd gleich stark sind, wovon ich mich durch zahlreiche Versuche auch mit anderen Versuchspersonen überzeugt habe. Wenn z. B. der Versuchsperson die Aufgabe gestellt wurde, die Reihenfolge der Intensitäten der drei Töne anzugeben, so wurde fast durchweg als stärkster Ton der tiefste genannt, dann der höchste und an letzter Stelle der mittlere. Eine unmusikalische Person war ferner nicht imstande, die Tonhöhe des mittleren Tones richtig anzugeben, während sie die der beiden äußeren Töne vollständig richtig angab. Jedenfalls scheint es mir hiernach unberechtigt zu sein, die Helmholtzsche Theorie auf Grund von Urteilen, welche das Ohr über die Stärke der Kombinationstöne abgibt, zurückzuweisen.

Der zweite Punkt, den Hermann für bedenklich hält, ist die von der Theorie geforderte unsymmetrische Elastizität des schwingenden Mediums. Weil die Kombinationstöne bei getrennten Primärtonquellen im Außenraum bisher nicht nachgewiesen werden konnten, verlegte schon Helmholtz ihre Entstehung in das Ohr, vornehmlich in das Trommelfell und

das Hammer-Amboßgelenk. Hermann macht hiergegen geltend, daß eine Unsymmetrie in den Schwingungsamplituden des Trommelfelles oder des Hammer-Amboßgelenkes erst bei sehr großen Amplituden eintreten könnte, während man die Kombinationstöne doch auch bei sehr geringer Intensität der Primärtöne vorzüglich höre; ferner höre man Kombinationstöne auch dann, wenn beide Ohren fest mit Watte verstopft sind, obwohl hierdurch gerade das Trommelfell in seinen Schwingungen stark behindert würde. Preyer[1]) gibt allerdings an, daß bei zugestopften Ohren Kombinationstöne nicht zu hören seien. Jedoch konnte ich sie in den meisten Fällen auch vorzüglich hören. Sie schienen mir beim Zustopfen der Ohren um so mehr geschwächt zu werden, je höher die Primärtöne sind. In einigen Fällen konnte ich hier Kombinationstöne überhaupt nicht hören, obwohl sie, wenn die Ohren nicht verstopft waren, ganz besonders stark zu hören waren. Vielleicht ist die sonst kaum verständliche Angabe Preyers damit zu erklären, daß er sehr hohe Primärtöne zu seinen Versuchen gewählt hat.

Mir scheinen die eben besprochenen Versuche, ebenso wie die anderweitig festgestellte Tatsache, daß auch Personen ohne Trommelfell Kombinationstöne zu hören vermögen, gegen den Grundgedanken der Helmholtzschen Theorie nichts zu beweisen. Daß Helmholtz gerade das Trommelfell als Entstehungsort angibt, ist nur von sekundärer Bedeutung. Es können ebensogut irgendwelche Teile des inneren Ohres dafür in Betracht kommen; z. B. darf man kaum annehmen, daß das Labyrinthwasser bei der Einwirkung von tiefen Tönen, wobei es als Ganzes schwingt, symmetrische Schwingungen ausführt. Daß ich bei sehr hohen Primärtönen die Kombinationstöne mit zugestopften Ohren nur schwer oder gar nicht vernehmen konnte, läßt sich vielleicht so deuten, daß für sehr hohe Töne die Bewegung des Labyrinthwassers und anderer eventuell in Betracht kommender Teile sich schon der molekularen Bewegung nähert, wo von Unsymmetrie der Schwingungen dann nicht mehr die Rede sein kann.

Die Annahme einer unsymmetrischen Elastizität des schwingenden Mediums scheint mir nicht nur unbedenklich,

1) W. Preyer, Wied. Ann. 38. p. 131. 1889.

sondern zur Erklärung mancher Erscheinungen direkt notwendig zu sein. Bei unsymmetrisch elastischen Körpern genügen schon sehr kleine Amplituden, um höheren Potenzen der Elongation Einfluß auf die rücktreibende Kraft zu verschaffen. Somit wird hierdurch die vorhin entwickelte Ansicht gestützt, daß zur Entstehung der von Helmholtz theoretisch erschlossenen Kombinationstöne durchaus keine großen Amplituden der Primärtöne erforderlich sind. Woher kommt es nun aber, daß es noch nicht gelungen ist, Kombinationstöne bei getrennten Primärtonquellen direkt im Luftraum nachzuweisen, auch nicht bei sehr starken Primärtönen? Die relative Kleinheit der Amplituden im Verhältnis zu der ganzen schwingenden Luftmasse scheint mir zur Erklärung dieser Tatsache nicht recht auszureichen. Denn auch wenn eine abgeschlossene Luftmasse zu starken Schwingungen erregt wurde, indem zwei laut tönende Stimmgabeln auf Resonanzkästen in einem kleinen Kasten zum Tönen gebracht wurden, in welchen durch eine Öffnung ein Resonator eingeführt war, sprach derselbe nicht an. Ebenso wurden vergeblich entsprechende Versuche in Glockentürmen, ganz in der Nähe der Glocken, wo die Luftschwingungen äußerst stark sind, angestellt. Hier setzt nun sehr erwünscht die von der Theorie geforderte unsymmetrische Elastizität des schwingenden Mediums ein. Die Luftschwingungen scheinen in sehr weitem Maße symmetrisch vor sich zu gehen; daher die vergeblichen Bemühungen, im Luftraum selber den Kombinationstönen entsprechende Schwingungen nachzuweisen, wenn die Primärtöne voneinander getrennt sind.

In neuerer Zeit ist es auch verschiedentlich gelungen, positiv zu zeigen, daß in unsymmetrisch schwingenden Körpern Kombinations-, wenigstens Differenztöne entstehen, wenn die Körper gleichzeitig durch zwei Töne zu Schwingungen erregt werden. Empfindliche Flammen [1]), Membranen [2]) und der Flammenbogen einer singenden Bogenlampe [3]), sie alle ergeben Differenztöne, die Resonatoren zum Mittönen bringen. Es wäre interessant, wenn man entsprechende Versuche mit leisen

1) Belas u. Barrett, Sc. Proc. Roy. Dublin Soc. N. S. **10.** June 1905.

2) K. L. Schaefer, Ann. d. Phys. **17.** p. 572. 1905; E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **20.** p. 837. 1906.

3) E. Waetzmann, Physik. Zeitschr. **10.** p. 346. 1907.

Primärtönen an genau symmetrisch schwingenden Membranen anstellen könnte; es dürfte aber nicht leicht sein, ganz homogene, wirklich symmetrisch elastische Membranen herzustellen.

Die Summationstöne außerhalb des Ohres nachzuweisen, ist bedeutend schwieriger. Abgesehen von ihrer geringen Stärke, welche jede Art der Beobachtung sehr schwierig macht, gibt es zunächst noch gar keinen Beweis, daß ihnen wirklich eine selbständige Bedeutung neben den Differenztönen höherer Ordnung zukommt. Man kann sich den Ton von der Schwingungszahl $p + q$ zustande kommend denken durch Addition von $p$ und $q$, aber auch als Differenzton zwischen z. B. $2p$ und $p - q$. Mit der in der oben zitierten Arbeit beschriebenen Versuchsanordnung, mit Hilfe deren ich eine dem Differenzton erster Ordnung entsprechende Komponente in der Schwingung einer von zwei Primärtönen gleichzeitig erregten Seifenlamelle nachgewiesen habe, gelingt es leicht, auch eine solche Komponente nachzuweisen, deren Schwingungszahl gleich der Summe der Schwingungszahlen der Primärtöne ist. Um zu entscheiden, ob diese Komponente nicht einem Differenzton höherer Ordnung entspricht, dessen Schwingungszahl gleich $p + q$ ist, könnte man daran denken, nach dem Vorschlage K. L. Schaefers[1]) sämtliche in Betracht kommenden Obertöne der beiden Primärtöne der Reihe nach durch Interferenz zu vernichten. Das dürfte aber experimentell sehr schwierig sein. Bei meinen Versuchen benutzte ich als Primärtonquellen Königsche Stimmgabeln; diese erregten entsprechend abgestimmte Luftresonatoren und diese ihrerseits wieder gleichabgestimmte Luftresonatoren. So konnte in einiger Entfernung von den Tonquellen gearbeitet werden, wo die Primärtöne noch genügend stark, ihre Obertöne aber zum mindesten sehr schwach waren, da sie in den Resonatoren nicht mitverstärkt werden. Die auf die Seifenlamelle auftreffenden Primärtöne konnten deshalb mit einiger Wahrscheinlichkeit als praktisch obertonfrei angesehen werden. Weitere Versuche, die Obertöne mit größerer Sicherheit zu beseitigen, wurden nicht angestellt, weil ich auf folgendes prinzipielle Bedenken stieß: Selbst wenn es auf irgendeine Weise ge-

1) K. L. Schaefer, Nagels Handbuch d. Physiol. des Menschen 3. p. 525.

lingen sollte, vollkommen obertonfreie Primärtöne herzustellen und nachzuweisen, daß in der Schwingungsform eines von zwei solchen Primärtönen erregten Körpers eine Komponente enthalten ist, deren Schwingungszahl gleich der Summe der Schwingungszahlen der Primärtöne ist, so wäre damit die besprochene Frage doch noch nicht entschieden. Wird nämlich ein Körper durch einen obertonfreien Primärton zu Schwingungen von endlicher Größe erregt, so hängt die elastische Kraft, die den Körper in seine Gleichgewichtslage zurücktreibt, nicht nur von der ersten, sondern auch von höheren Potenzen der Elongation ab; d. h. aber, es entstehen jetzt Obertöne in dem Körper. Deshalb wird sich die obige Frage mit den bisher bekannten Methoden schwerlich vollkommen einwandfrei entscheiden lassen.

Für die Helmholtzsche Theorie scheint sie mir aber auch belanglos zu sein. Diese entscheidet nicht, wie der Ton von der Schwingungszahl $p + q$ zustande kommt; ob er aus den Primärtönen selber entsteht, oder aus einem Oberton und einem Differenzton. Sie fordert doch wohl nur, daß eben ein Ton von dieser Schwingungszahl entsteht, ohne daß mathematisch schon etwas darüber ausgesagt wird, *wie* er physikalisch zustande kommt. An sich bleibt die Frage natürlich bestehen, nur darf nicht so ohne weiteres behauptet werden, es wäre ein Widerspruch gegen die Helmholtzsche Theorie, wenn die sogenannten Summationstöne keine selbständige Existenz neben den Differenztönen höherer Ordnung hätten.

Ein Bedenken sehr weitgehender Art, welches man gegen die Helmholtzsche Theorie geltend machen könnte, ist das, daß sie ja nur für einen diskreten Massenpunkt abgeleitet ist, und daß für einen Körper, der ein System von Massenpunkten darstellt, die Verhältnisse sich doch ganz anders gestalten können. Wir werden trotzdem gut tun, an der Helmholtzschen Ableitung festzuhalten, bis wirklich unwiderlegliche Beweise gegen sie erbracht sind. Im großen ganzen scheint sie mir die experimentellen Ergebnisse in befriedigender Weise wiederzugeben, wenn auch nicht geleugnet werden soll, daß gewisse Schwierigkeiten vorliegen.

Breslau, Physik. Institut, August 1907.

(Eingegangen 13. August 1907.)

## 6. *Über die thermische Bestimmung der Radioaktivität gewöhnlicher Substanzen;* von *H. Greinacher.*

§ 1. *Einleitung.* Die Zahl der radioaktiven Substanzen, die wir kennen, ist bis heute trotz eifrigen Suchens eine ziemlich beschränkte geblieben. Wohl hat sich unsere Kenntnis durch die Auffindung und Charakterisierung einer großen Zahl von radioaktiven Umwandlungsprodukten beträchtlich erweitert, die Zahl der Stammsubstanzen hat sich jedoch schon seit einer Reihe von Jahren nicht mehr vermehrt. Im Gegenteil, während man seinerzeit sieben solche zählte, ist ihre Anzahl durch die Identifizierung des Radiotellurs mit dem Polonium bez. dem Radium *F* und des Emaniums mit dem Aktinium auf vier zusammengeschmolzen. Von der Durchmusterung der *bekannten* Elemente blieben sogar nur zwei, die korpuskulare Strahlung zeigten, das Uran und das Thor. Da dies die Elemente mit dem höchsten uns bekannten Atomgewicht sind, und Frau Curie auch für das Radium den hohen Wert 225 fand, so lag die Anschauung nahe, daß nur die hochatomigen Elemente nennenswerte Radioaktivität zeigen. Nach der Zerfallstheorie ließ sich dies etwa dadurch erklären, daß man die schweren Atome als besonders instabil und daher vorzugsweise dem Zerfall unterworfen ansah.

Es fehlte zwar nicht an Stimmen, welche die Radioaktivität nicht als Vorzugseigenschaft gewisser Atomgruppen gelten lassen wollten, sondern dieselbe als universelle Eigenschaft der Materie erklärten. Wenn zunächst auch keine experimentelle Stützen für diese Auffassung vorhanden waren, so konnte man doch immerhin auf Analogien hinweisen, so etwa auf die Eigenschaft des Magnetismus. Hat man diese doch früher nur den wenigen Elementen der Eisengruppe zugeschrieben, bis man fand, daß die anderen Körper sich ebenso, wenn auch in viel schwächerem Grade, magnetisch verhielten. Auch die Einteilung der Körper in elektrische Leiter und

Nichtleiter ist eine rein praktische, da eine elektrische Leitfähigkeit ja allen Substanzen zukommt und der Unterschied wieder nur ein gradueller ist. In ähnlicher Weise nun ließ sich die Radioaktivität als *allgemeine* Eigenschaft auffassen, indem man etwa die Aktivität der gewöhnlichen Substanzen als unmerklich klein im Vergleich zu derjenigen der eigentlichen Radioelemente ansah.

Damit kam man dann zur Auffassung, daß alle Atome in kürzerer oder längerer Zeit einmal zerfallen werden, und daß, sofern nicht ein Wiederaufbau des Atoms stattfinde, schließlich alle Materie sich in ihren Urstoff auflöse. So bedeutungsvoll auch eine solche einheitliche Grundanschauung vom Bau und Werdegang der Materie war, so mußten doch erst experimentelle Untersuchungen über die Radioaktivität gewöhnlicher Substanzen solche Auffassungen rechtfertigen.

In dieser Hinsicht waren die Versuche von Mc Lennan und Burton[1]) von besonderem Interesse, die zum Ergebnis gelangten, daß auch von gewöhnlichen Metallen positiv geladene Teilchen — also wahrscheinlich $\alpha$-Partikel — ausgehen. Ferner fand Strutt[2]), daß die Ionisierung in einem geschlossenen Gefäß eine dauernde ist und von der Natur der Gefäßwand abhängt. Diese und ähnliche Effekte sind wiederholt beobachtet und untersucht worden.[3]) Sie lassen sich darauf zurückführen, daß die betreffenden Substanzen in geringem Maße radioaktiv waren.

Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß die Deutung solch kleiner Ionisierungen bereits nicht unwesentlich dadurch erschwert werden kann, daß die Luft infolge der stets vorhandenen Emanation und der $\gamma$-Strahlung des in der Erdrinde enthaltenen Radiums[4]) zum voraus schon etwas ionisiert ist. Auch brauchen kleine Ionisationseffekte nicht notwendigerweise auf eine Radioaktivität der betreffenden Substanzen zurück-

1) Mc Lennan u. Burton, Phil. Mag. **6.** p. 343. 1903; Physik. Zeitschr. **4.** p. 553. 1903.

2) R. J. Strutt, Phil. Mag. 5. p. 680. 1903.

3) A. Wood, Phil. Mag. **9.** p. 550. 1905; Norman Campbell, Phil. Mag. **9.** p. 545. 1905 u. **11.** p. 206. 1906; Jahrb. d. Radioakt. **2.** p. 434. 1905.

4) A. S. Eve, Phil. Mag. **12.** p. 189. 1906; Beibl. **31.** p. 160. 1907.

geführt zu werden. Es können auch anderweitige Veränderungen an der *Oberfläche* der Substanz, etwa eine allmähliche Oxydation, ähnliche Wirkungen ausüben, wie die Becquerelstrahlen. So kann man offenbar aus der photographischen Einwirkung von Metallen, von Holz und Papier etc. nicht ohne weiteres auf eine Radioaktivität dieser Substanzen schließen.

Von der störenden Einwirkung solcher Oberflächeneffekte kann man sich dadurch frei machen, daß man die Radioaktivität einer Substanz nicht durch die von der Oberfläche ausgehende Strahlung, sondern durch einen Volumeffekt feststellt. So läßt sich die Radioaktivität eines Körpers nach der in der Zeiteinheit von ihm produzierten Wärme bemessen. Diese ist im wesentlichen gleich der kinetischen Energie der $\alpha$-Strahlen, welche die gesamte Substanz liefert und die zum größten Teil infolge ihrer geringen Durchschlagkraft im Körper selbst absorbiert werden.[1])

An Stelle einer kalorimetrischen Methode kann etwa eine thermometrische treten, indem man z. B. die Temperaturerhöhung einer Substanz gegen die Umgebung feststellt. So fanden Curie und Laborde[2]) für ein Radiumpräparat von einigen Dezigrammen, das zur Wärmeisolation in ein Dewargefäß gebracht wurde, eine Temperaturdifferenz von 1—3° gegen die Umgebung. Pegram und Webb[3]) haben in analoger Weise versucht, auch den Temperaturüberschuß von Thoriumoxyd zu bestimmen. Entsprechend der viel geringeren Aktivität des Thors brachten sie 3 kg der Substanz in das Dewargefäß. Als Temperaturdifferenz fanden sie 0,4°.

Wenn es danach auch möglich scheint, selbst für schwach radioaktive Substanzen wie Thor und Uran bei größeren Mengen noch erhebliche Temperaturdifferenzen zu messen, so mußte andererseits doch die Methode zur Messung an gewöhnlichen Substanzen ziemlich aussichtslos erscheinen. Zwar stand hier ja der Verwendung größerer Substanzmengen nichts im Wege, auch konnten bei geeigneten Versuchsbedingungen noch viel kleinere Temperaturdifferenzen festgestellt werden.

1) E. Rutherford u. H. T. Barnes, Phil. Mag. **9**. p. 621. 1905.

2) P. Curie u. A. Laborde, Compt. rend. **136**. p. 673. 1903.

3) G. Pegram u. H. Webb, New York Acad. April 1904; Fortschr. d. Physik **60**. p. 271. 1904.

Allein die „elektrische Methode" zeigte, daß die Radioaktivität der gewöhnlichen Materie so ungeheuer viel kleiner sein mußte, als selbst die schwach aktiven Elemente Uran und Thor, daß ein solcher Nachweis kaum möglich erscheinen konnte.

Erst neuere Versuche haben nun gezeigt, daß aus der Ionisierung, die ein radioaktiver Körper hervorruft, keineswegs auf die vermutliche Wärmeabgabe dieser Substanz zu schließen ist. Aus den Messungen Braggs[1]) u. a. geht hervor, daß die ionisierende Kraft der $\alpha$-Teilchen nach dem Durchlaufen einer gewissen Luftstrecke (Reichweite, Ionisierungsbereich) plötzlich abbricht. Nach Rutherford[2]) ist dies dann der Fall, wenn die Geschwindigkeit der $\alpha$-Teilchen durch die Bremswirkung der durchlaufenen Materie (Luft, Metall) unter einen gewissen Wert gesunken ist. Diese Geschwindigkeit bestimmt Rutherford zu etwa $^1/_{20}$ von der des Lichts. Es ist dies ein Wert, der nur verhältnismäßig wenig unterhalb der Anfangsgeschwindigkeit der $\alpha$-Teilchen liegt. Ein Körper, dessen $\alpha$-Teilchen also von vornherein nur diese kritische Geschwindigkeit haben, im übrigen aber ebensoviele Teilchen pro Sekunde aussendet, als das Radium, würde nach der elektrischen Methode als inaktiv befunden. Er würde aber trotzdem eine dem Radium vergleichbare Wärmemenge produzieren, da die kinetische Energie seiner $\alpha$-Partikel von derselben Größenordnung ist.

Unter diesem Gesichtspunkt lassen sich die sogenannten „strahlenlosen" Umwandlungsprodukte, wie das Ra *D*, Th *A* und Akt. *A*, dann auch das Thor und Aktinium selbst, auffassen. Wenn diese Körper keine ionisierende Wirkung ausüben, so kann das daran liegen, daß sie zwar ebensogut wie die anderen radioaktiven Substanzen $\alpha$-Teilchen aussenden, daß letztere aber nicht die zur Ionisierung erforderliche Geschwindigkeit besitzen. Auch den Zerfallsprodukten, die wie das Uran *X*[3]), das Ra *B* und *E* nur $\beta$-Strahlen zeigen, müßte

---

1) W. H. Bragg, Phil. Mag. 8. p. 719. 1904.

2) E. Rutherford, Phil. Mag. 10. p. 163. 1905.

3) Neuerdings berichtet Hess (Wiener Anzeiger, Jan. 1907; Beibl. 31. p. 486. 1907) in der Tat über die Auffindung sehr weicher $\alpha$-Strahlen am Uran *X*.

man dann konsequenterweise $\alpha$-Strahlen unterhalb der kritischen Geschwindigkeit zuschreiben.

Des weiteren ergibt sich nun auch die Möglichkeit, daß manche von unseren bekannten Elementen in lebhaftem Zerfall begriffen sind, aber durchaus keine Becquerelstrahlen zeigen. Gleichwohl wäre, falls der Körper eine kleine Halbierungskonstante und $\alpha$-Strahlen von annähernd kritischer Geschwindigkeit besitzt, eine beträchtliche Wärmeentwickelung zu erwarten, vergleichbar etwa mit der des Radiums. Es schien daher von Interesse, die gewöhnlichen Substanzen auch von diesem Gesichtspunkt aus nochmals auf ihre Radioaktivität durchzuprüfen. Ich habe im folgenden versucht, dies durch Messung von Temperaturdifferenzen nach Art des Curie-Labordeschen Versuches auszuführen. Bis jetzt sind jedoch nur wenige Körper zur Untersuchung gelangt, da vorliegende Arbeit abgeschlossen werden mußte. Doch glaube ich immerhin bei der Aktualität der Frage meine Versuchsresultate bereits veröffentlichen zu sollen.

§ 2. *Vorversuche.* Zunächst wurden einige Vorversuche gemacht. Zwei zylindrische, versilberte Dewargefäße wurden nebeneinander in Watte gesteckt. In das eine Gefäß wurden 10—20 g kristallinisches Zinksulfat, in das andere ebensoviel Magnesiumsulfat gebracht, worauf man die Gefäße durch Korke verschloß. Jedes Gefäß enthielt ein Thermoelement Eisen–Konstantan. Die Drähte, die durch passende Einschnitte in den Korken gingen, führten über einen Kommutator mit Hg-Näpfchen zu einem astatischen Nadelgalvanometer. Dieses gab für 1° Temperaturunterschied je nach seiner Astasierung und dem Widerstand der Thermoelemente 100—200 mm Doppelausschlag (Skalenabstand 1,87 m). Nachdem nun die Dewargefäße nebst den nächsten Zuleitungsdrähten in Watte gepackt waren, wurde die Temperaturdifferenz der Lötstellen nach verschiedenen Zeitintervallen gemessen. Es zeigten sich wohl Temperaturunterschiede, doch bald im einen, bald im anderen Sinne. Die Messungen wurden zu sehr durch die Schwankungen der Zimmertemperatur beeinflußt, als daß sich kleinere Temperaturdifferenzen (0,01°) hätten nachweisen lassen. Jedenfalls war ersichtlich, daß die verwendeten Salze. wie $ZnSO_4$, $MgSO_4$, $CdSO_4$, $Pb(NO_3)_2$, $UO_2(NO_3)_2$, $Th(NO_3)_4$ keine größeren Temperaturunterschiede gegeneinander aufwiesen.

§ 3. *Versuchsanordnung.* Es ergab sich daher die Notwendigkeit, die Versuchsanordnung empfindlicher und zuverlässiger zu gestalten. Im folgenden sei die endgültig verwendete Anordnung beschrieben. Der hauptsächliche Unterschied bestand darin, daß die Außenwand der Dewargefäße durch Eintauchen derselben in Eis auf möglichst konstanter

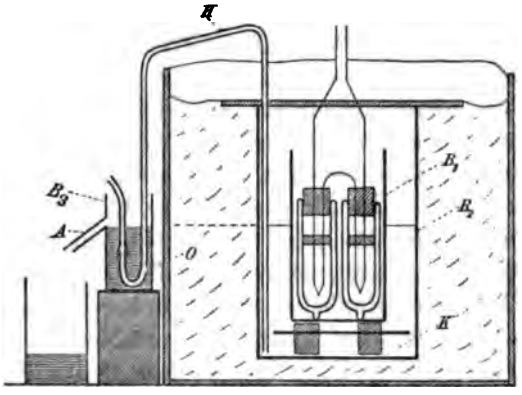



Fig. 1.

Temperatur gehalten wurde. Zu diesem Zwecke kamen die Dewargefäße nebeneinander in eine Blechbüchse $B_1$ (Fig. 1), die mit Eis aufgefüllt wurde. Diese Büchse befand sich ihrerseits wieder in einem zweiten größeren Blechzylinder $B_2$. Der kleinere stand dabei auf drei durch Metallstängelchen miteinander verbundenen Korken $K$ (in der Figur sind nur zwei gezeichnet). Der äußere Zylinder war ebenfalls mit Eis aufgefüllt. Der dadurch entstehende Eismantel um $B_1$ verhinderte ein rasches Schmelzen im inneren Gefäß. Um ein zu rasches Schmelzen auch im äußeren Zylinder zu vermeiden, war derselbe in eine Kiste mit Holzwolle gestellt. Bei dieser Anordnung betrug die in 24 Stunden schmelzende Eismenge etwa 1 kg. Um diese zu ersetzen, wurde morgens und abends das noch vorhandene Eis auf den Boden eingestampft, worauf man mit neuem entsprechend nachfüllte. Verwendet wurde Kunst-

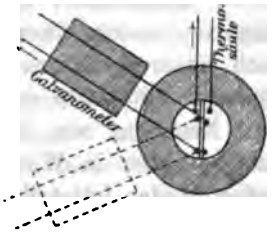


Fig. 1a.

eis. Um das sich bildende Wasser kontinuierlich zu entfernen und einen konstanten Wasserspiegel zu haben, wurde ein Glasheber $H$ in $B_3$ eingeführt. Dieser mündete andererseits in eine Blechbüchse $B_3$ mit Ausflußrohr $A$. Zum bequemen Ansaugen war der Heber unten nochmals umgebogen und mit einem Kautschukschlauch verbunden. Der Ausfluß aus dem Heber geschah dabei durch eine seitlich in der Röhre angebrachte Öffnung $O$. Der Blechzylinder $B_1$ kommunizierte seinerseits durch zwei in der Nähe des Bodens diametral angebrachte Löcher mit $B_2$. Man konnte daher das Wasserniveau in $B_1$ durch entsprechendes Einstellen von $B_3$ nach Wunsch regulieren. $B_3$ wurde so hoch gestellt, daß der Wasserspiegel ca. 2 cm unter dem Rand der Dewargefäße stand. Diese selbst waren wieder durch gutsitzende Korke verschlossen. Durch am Rande derselben praktizierte Einschnitte führten Konstantan- bez. Eisendrähte zu den Lötstellen. Um den Drähten im Innern der Gefäße Führung zu geben und zugleich eine bessere Wärmeisolation auch nach oben zu sichern, waren noch zwei schmalere Korke 2—3 cm unterhalb der anderen angebracht. Auch war der Zwischenraum zwischen diesen mit reiner Watte ausgefüllt. Um jedes Eindringen von Wasser zu verhindern, wurden die Gefäßränder und Verschlußkorke mit Fett abgedichtet.

Die Zuleitungsdrähte, die aus Konstantan bestanden, führten zu einem als Kommutator dienenden Doppelnäpfchen mit Hg. Diese einfache Vorrichtung wurde an Stelle eines der gewöhnlichen Näpfchenkommutatoren verwendet, um die Zahl der Verbindungsstellen, die etwa zu fehlerhaften Thermokräften Anlaß geben konnten, möglichst zu reduzieren. Fig. 1a zeigt die Anordnung des Näpfchens. Eine Aushöhlung in Kork war durch ein dünnes Glasplättchen in zwei voneinander isolierte Teile getrennt. Es sollte damit für möglichst gleiche Temperatur der beiden Näpfchen gesorgt werden. In diese tauchten nun einerseits die in einem Korke montierten Konstantandrähte, andererseits die zum Galvanometer weiterführenden Kupferdrähte. Die Enden der letzteren waren derart in einen Kork (in der Figur nicht gezeichnet) eingelassen, daß die beiden Spitzen unten herausragten, und daß man durch leichtes Drehen des betreffenden Korkes die Drahtenden

und damit den Strom kommutieren konnte. Indem man die Näpfchen noch mit Watte umgab, war der Einfluß störender Thermokräfte so gering, daß er innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler lag. Dies wurde daran erkannt, daß man das Doppelnäpfchen bei unveränderter Lage der Zuleitungsdrähte um 180° drehte und konstatierte, daß der Ausschlag am Galvanometer derselbe war.

Als solches kam bei den ersten Messungen das erwähnte astatische Galvanometer zur Verwendung. Da das Instrument nicht gepanzert war, so betrugen die Störungen durch die benachbarte Straßenbahn mehrere Millimeter. Brachte man es nun auch bei einiger Übung dahin, durch eine Reihe von Beobachtungen unter mehrfacher Kommutierung den Ausschlag auf 1 mm sicher zu bestimmen, so war das Verfahren doch immerhin recht unbequem. Es wurde daher schließlich zu dem weniger empfindlichen aber zuverlässigeren Drehspulengalvanometer (Siemens & Halske) gegriffen. Um die Voltempfindlichkeit möglichst zu steigern, wurden statt der 10000 Ohm nur 1000 vorgeschaltet. Dadurch wuchs die Dämpfung allerdings erheblich, und mußte gegen 2 Min. gewartet werden, bis ein Ausschlag von etwa 10 mm endgültig erreicht war. Dies war aber bei den Messungen nicht weiter hinderlich, da es sich nicht um rasche Ablesungen handelte.

Die Empfindlichkeit des Galvanometers betrug

$$3{,}3 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Amp.}}{\text{mm}}$$

bei einem Skalenabstand von 2,30 m. Die Ablesung geschah objektiv unter Verwendung einer Glühlampe mit geradem Kohlefaden. Das runde Verschlußglas am Galvanometer war dabei durch eine Linse ersetzt, die das Bild des leuchtenden Fadens auf die im bezeichneten Abstand befindliche Skala warf.

Die Eichung der Thermoelemente geschah durch Messung des Galvanometerausschlages für 1—2° Temperaturdifferenz. Zu diesem Zweck wurde in jedes Dewargefäß etwas Wasser von Zimmertemperatur gebracht. Durch Eintauchen eines erhitzten Drahtes wurde das Wasser in einem um 1—2° erwärmt. Die Temperaturdifferenz wurde vor und nach dem Eintauchen der Lötstellen durch ein 0,01° angebendes Hg-Thermometer gemessen. Der Doppelausschlag betrug für 1° Temperatur-

differenz 174 mm. Bei den späteren Versuchen, bei denen statt zwei Lötstellen deren vier verwendet wurden, bekam man Ausschläge je nach den verwendeten Thermoelementen von 370—450 mm. Es ließen sich damit also 0,001° leicht noch feststellen.

§ 4. *Fehlerquellen.* Eine weitere Vergrößerung der Empfindlichkeit schien nicht angebracht, da die Versuchsfehler eine solche doch illusorisch gemacht hätten. Die Thermokräfte im Galvanometer und den Zuleitungen waren zwar durch Kommutieren eliminiert, doch waren immerhin die Ausschläge kleinen Schwankungen unterworfen. Wurden die Lötstellen, wie beschrieben, in die Dewargefäße und diese in das Eis gebracht, so sank auch nach mehreren Tagen der Ausschlag nicht auf Null entsprechend einer geringen Ungleichheit der Lötstellen bez. Inhomogenität der Drähte.[1]) Der Endwert zeigte aber überdies noch kleine Schwankungen (mehrere tausendstel Grad), was einer Veränderung der Außentemperatur der Dewargefäße zugeschrieben werden konnte. Auch die zu den Näpfchen führenden Konstantandrähte gaben zu derartigen Störungen Anlaß. Diese waren im allgemeinen bis kurz vor den Näpfchen, welch letztere neben dem oberen Rand der Holzkiste standen, mit Watte zugedeckt. Wurden die Wattedecke und der direkt über dem Eis liegende Holzdeckel zum Zweck des Eisauffüllens abgehoben, dann änderte sich der Galvanometerausschlag zuweilen entsprechend einer Änderung von 0,005°, manchmal aber auch kaum merklich. Dies hing offenbar mit einer unkontrollierbaren Veränderung der Temperaturverteilung in den Konstantandrähten zusammen; denn ähnliche Ausschläge erhielt man auch beim Anfassen eines der Drähte. Nach Eisauffüllen wurde daher die Wattepackung möglichst in gleicher Weise wieder aufgesetzt. Der Galvanometerausschlag strebte dann langsam zu seinem früheren Wert zurück, ohne jedoch immer genau dahin zurückzukehren. Im folgenden sind daher nur Messungen wiedergegeben, welche *vor* einer neuen Eisnachfüllung ausgeführt sind.

1) Über die Rolle, welche die Inhomogenität der Drähte bei thermoelektrischen Messungen spielt, hat neuerdings W. P. White (Phys. Rev. **23**, p. 449. 1906; Physik. Zeitschr. **8**. p. 325. 1907; Beibl. **31**. p. 575. 1907) eingehende Versuche veröffentlicht.

Als weitere Fehlerquelle wurde der Meßstrom selbst in Betracht gezogen. Da der Stromkreis zumeist geschlossen blieb und stets Thermokräfte vorhanden waren, so konnte die Temperatur der Lötstellen infolge des Peltiereffektes beeinflußt werden. Es ließ sich jedoch feststellen, daß ein solcher Effekt nicht in Betracht kam. Wurde durch die Lötstellen während 2 Min. ein Strom gesandt, der am Galvanometer 64 mm (einseitigen) Ausschlag gab, dann zeigten die Thermoelemente nach wie vor merklich dieselbe Temperatur an. Selbst beim Durchschicken eines Stromes von 50 Milliamp. während 5 Min. ergab sich nur eine Temperaturänderung von wenigen Hundertstelgraden.

§ 5. *Versuchsergebnisse.* Im folgenden seien nun die mit der beschriebenen Anordnung ausgeführten Versuche beschrieben. Zunächst wurde die Temperatur einiger Salze miteinander verglichen. Zu diesem Zweck wurden in jedes Dewargefäß 15 g der betreffenden Substanz gebracht. Nach Einsetzen der Korke mit den Thermoelementen, Abdichten durch Fett und Einstellen der Dewargefäße ins Eis wurde die Temperatur im Laufe von einem bis mehreren Tagen untersucht. Es zeigte sich zwar schließlich ein dauernder kleiner Galvanometerausschlag, der jedoch nicht auf eine entsprechende Temperaturdifferenz der Salze, sondern auf eine Inhomogenität der Thermoelemente zurückzuführen war.

Blieb doch der erhaltene Endwert der Größe und dem Vorzeichen nach derselbe, wenn der Versuch in der Weise wiederholt wurde, daß man die Salze miteinander vertauschte. Die Dewargefäße wurden dabei jeweils nebeneinander an stets denselben Platz im inneren Blechzylinder gebracht.

Die untersuchten Salze waren kristallinisches $ZnSO_4$, $CdSO_4$ und $MgSO_4$. Die Messungen, bei denen zunächst noch das Nadelgalvanometer verwendet wurde, ergaben in keinem Fall eine merkliche Temperaturdifferenz.

*Zn, Cd.* Bei den folgenden Versuchen wurde dann das Drehspulengalvanometer benutzt. Zur Untersuchung gelangten zunächst metallisches Zn und Cd.[1]) Es wurde je ein Zn- und

1) Es ist bereits an anderer Stelle (Naturwissensch. Rundschau **21**. p. 683. 1906) darauf hingewiesen worden, daß besonders von den selteneren

ein Cd-Zylinder in einem Glasrohr bez. einer Gipsform geschmolzen. In das Dewargefäß, das hier und in der Folge mit I bezeichnet sei, kam der 60 g schwere Cd-Zylinder. In das Gefäß II, das etwas dünnwandiger als I war, wurde der Zn-Zylinder (68 g) gebracht. Beide Zylinder besaßen an dem oberen Ende eine konische Vertiefung zum Einlassen der Lötstellen. Die Thermoelemente bestanden wieder aus Eisen- und Konstantandraht von der Dicke 0,25 bez. 0,31 mm und waren weich gelötet. Die Lötstellen waren ferner mit einer dünnen Schicht Siegellack bedeckt, um metallischen Kontakt mit den beiden Metallzylindern zu verhindern.

Es ergab sich nun nach drei Tagen ein anscheinender Temperaturüberschuß zugunsten des Zinks. Ein Kontrollversuch, bei welchem die Zylinder miteinander vertauscht waren, lehrte aber auch hier, wie bei den vorhergehenden Versuchen, daß der Galvanometerausschlag einer Verschiedenheit der Thermoelemente zuzuschreiben war.

Da es nun denkbar war, daß beide Metalle gleichviel Wärme entwickelten, wobei man ebenfalls keine Temperaturdifferenz hätte feststellen können, wurde der Versuch in der Weise variiert, daß man in II das Cd brachte, I aber leer ließ. Es ergab sich nach vier Tagen ein Temperaturüberschuß von $0{,}01_3{}^0$ für das Cd. Als man aber das Metall in I brachte und II leer ließ, ergab sich in derselben Weise nach drei Tagen eine um $0{,}01_4{}^0$ höhere Temperatur für das *leere* Gefäß, so daß wiederum dem Cd keine merkliche Wärmeproduktion zugeschrieben werden konnte. Dieses Resultat auf den vorhergehenden Versuch angewendet, führt zu demselben Schluß auch für das Zn.

*Urannitrat.* Nun wurde ein Versuch mit (kristall.) Urannitrat gemacht, von dem 16,2 g in II gebracht wurden, während I leer blieb. Die Lötstellen waren durch einen dünnen Schellacküberzug vor der chemischen Einwirkung des Urannitrats geschützt. Die Beobachtungen, die hier nur auf zweimal 24 Stunden ausgedehnt wurden, sowie der darauf folgende

---

Elementen eine höhere Temperatur gegenüber der Umgebung zu erwarten ist. Es wurden daher zunächst zwei in ganz ungleichen Mengen vorhandene Metalle wie Zn und Cd miteinander verglichen.

Kontrollversuch mit der Substanz in I führten zu keinem positiven Resultat.

Als Hauptgrund für den schließlich zu beobachtenden kleinen Galvanometerausschlag blieb schließlich immer nur die Inhomogenität der Drähte. Eine dauernde, um einen konstanten Wert höhere Temperatur des einen Dewargefäßes war nicht anzunehmen. Wurden nämlich die beiden Dewargefäße durch zwei identische, zylindrische Messinggefäße ersetzt, die längs einer Mantellinie zusammengelötet waren, dann zeigten die Thermoelemente dieselbe Temperaturdifferenz. Dabei konnte man hier bei der guten Wärmeleitung der Metallhülle die Gleichheit der Temperatur längs derselben als ziemlich gesichert betrachten.

Zum Vergleich seien hier einige Beobachtungen mitgeteilt. Bemerkt sei, daß hier, sowie bei den folgenden Messungen, eine Thermosäule von vier Lötstellen (doppelte Empfindlichkeit) verwendet wurde. Um die Einführung eines Lötmetalles zu umgehen, waren die Enden der Eisen- und Konstantandrähte (Dicke: 0,25 bez. 0,31 mm) zusammengeschmolzen. Dies geschah durch Heranbringen eines elektrischen Lichtbogens zwischen Eisendrähten. Durch die Drähte selbst sollte der Strom nicht geschickt werden, um jede Veränderung der Drähte, etwa durch Erwärmung derselben, zu vermeiden. Der Widerstand der Thermosäule wurde zu 4,85 Ohm bestimmt.

Es ergab sich nun zunächst $16^1/_2$ Stunden nach Einbringen der Lötstellen in die Messingzylinder ein Galvanometerausschlag von 0,1 mm (372 mm Doppelausschlag = 1°). Nachdem die Thermoelemente sodann in die (leeren) Dewargefäße gebracht waren, ergab sich nach $28^1/_2$ Stunden ein Ausschlag von 0,45 mm in demselben Sinn. Der Endwert stimmte also bei den beiden Versuchen genügend überein und war überdies zufälligerweise klein. Dies hing nicht mit der Schweißung der Lötstellen zusammen, wie sich herausstellte, da andere Thermoelemente nach demselben Herstellungsverfahren wieder größere Differenzen zeigten.

*Bleinitrat.* Nachdem nun die Thermosäule in der beschriebenen Weise geprüft worden war, wurde ein Versuch mit kristallinischem Bleinitrat gemacht. Da Pb sich hinsichtlich seines hohen Atomgewichtes den stark radioaktiven Substanzen

nähert, sollte dieses zunächst auf einen Wärmeeffekt untersucht werden. Auch mittels der elektrischen Methode ist durch Campbell[1]) ein besonders merkliches Ionisationsvermögen dieses Metalles nachgewiesen. Nach neueren Untersuchungen von Elster und Geitel[2]) scheint allerdings dieser Effekt von einer geringen Beimengung stark aktiver Substanz, etwa von Polonium, herzurühren.

Um ein rasches Temperaturgleichgewicht in den Dewargefäßen herzustellen, wurde die Substanz, die Wochen vorher grob gepulvert worden war, zunächst in einem verschlossenen Reagenzgläschen auf ca. 0° abgekühlt. Das Salz (16,6 g) wurde sodann in das Dewargefäß II gebracht. Erwähnt sei noch, daß die Lötstellen sich im Salz befanden.

Es ergaben sich nun folgende Temperaturdifferenzen:

| Tageszeit | Stunden nach Einbringen in Eis | Temperatur in Gefäß II |
|---|---|---|
| abends . . . . . | 25½ | − 0,018 |
| abends . . . . . | 29 | − 0,014 |
| morgens . . . . . | 41 | − 0,012 |
| abends . . . . . | 50 | − 0,025 |
| morgens . . . . . | 65 | − 0,013 |

Man erhielt somit das zunächst unerwartete Resultat, daß das Bleinitrat dauernd etwas kälter war, als die Lötstellen I. Wollte man keine chemisch-physikalische Veränderung des Salzes, die etwa mit Wärmeabsorption verbunden war, annehmen — und dies schien nach einer Beobachtungsdauer von 65 Stunden kaum mehr wahrscheinlich zu sein —, so ließ sich vermuten, daß die Lötstellen in I aus irgendwelcher Ursache etwas wärmer waren. Die Erklärungsmöglichkeit, daß etwa die Drähte der Thermoelemente selbst infolge von Radioaktivität Wärme erzeugten, mußte dabei freilich dahingestellt bleiben.

Zunächst wurde durch einen Kontrollversuch festgestellt, daß die Temperaturdifferenz wirklich bestanden hatte. Zu diesem Zwecke wurden die Thermoelemente wieder in die leeren

1) N. R. Campbell, Phil. Mag. **11.** p. 206. 1906.

2) J. Elster u. H. Geitel, Physik. Zeitschr. **7.** p. 841. 1906; Beibl. **31.** p. 365. 1907.

Gefäße gebracht. II zeigte jetzt nach $24^1/_2$ Stunden nur eine um 0,003° tiefere Temperatur, während mit $Pb(NO_3)_2$ die Temperatur um 0,012—0,025° niedriger gewesen war.

*Hg.* In der Folge wurde nun die Temperatur des Quecksilbers bei Verwendung verschiedener Mengen untersucht. Hg schien seines hohen Atomgewichtes sowie seiner leichten Verwendbarkeit wegen, besonders geeignet, auch konnte man verhältnismäßig große Massen des Versuchskörpers benutzen. Ferner ließen sich gegebenenfalls leicht Amalgame von verschiedenem Gehalt untersuchen. Die Radioaktivität mußte sich dann stets nach der Mischungsregel ergeben, wenn auch die sonstigen Eigenschaften der Legierungen dieselbe keineswegs befolgen.

Um die Lötstellen vor der Berührung mit dem Quecksilber zu schützen, wurden sie mit einer dünnen Paraffinhaut überzogen, die man dadurch herstellte, daß man die Drähte rasch in geschmolzenes, eben erstarrendes Paraffin tauchte. Zunächst kamen in II 154,1 g Hg. In I wurden bei einem ersten Versuch 5,1 g Wasser gebracht, in der Absicht, damit beiden Dewargefäßen gleiche Wärmekapazität zu geben. Falls die kleinen Temperaturschwankungen, die mit Bleinitrat beobachtet worden waren, mit einer Ungleichheit der Wärmekapazität zusammenhingen, so mußte dies nun möglichst vermieden sein. Es zeigten sich jedoch auch hier kleine Schwankungen, so daß fernerhin nicht mehr auf gleiche Wärmekapazität gesehen wurde.

Es ergab sich im übrigen, daß nach 45 Stunden II um 0,014° wärmer war als I. Derselbe Endwert wurde erreicht, als aus I das Wasser herausgenommen war. Wie sich durch die folgenden Versuche herausstellte, mußte aber auch hier die erhaltene Temperatur mit einer Verschiedenheit der Thermoelemente in Zusammenhang gebracht werden, deren Verhalten offenbar nach dem Paraffinieren ein etwas anderes geworden war. Es konnte sonach weder für Hg, noch für Wasser ein Temperaturüberschuß nachgewiesen werden.

Der Versuch wurde nun nochmals in der Weise wiederholt, daß man nur 102,9 g Hg in II brachte und I wiederum leer ließ. Ein Unterschied gegenüber dem vorigen Versuch lag hier außer in der geringeren Menge Hg im Umstand, daß

jetzt die Lötstellen II nicht mehr in das Hg eintauchten. Die Beobachtungen, die übrigens zum selben Resultat führten wie früher, seien hier, da sie auf mehrere Tage ausgedehnt wurden, in Kürze wiedergegeben.

| Tageszeit | Stunden nach Einbringen in Eis | Temperatur von II |
|---|---|---|
| morgens . . . . . | 22,5 | 0,022 |
| abends . . . . . | 31 | 0,019 |
| morgens . . . . . | 47 | 0,013 |
| abends . . . . . | 56 | 0,013 |
| morgens . . . . . | 71,5 | 0,008 |
| abends . . . . . | 78,5 | 0,008 |
| morgens . . . . . | 96 | 0,008 |

Die erhaltenen Zahlen sind durchaus von derselben Größe, wie die bei den vorangegangenen Versuchen. Die Beobachtungsreihe zeigt ferner, daß bis zur endgültigen Einstellung drei Tage nötig waren, daß aber auch schon nach zwei Tagen der Endwert sehr nahe erreicht war. Immerhin ist diese Zeit länger, als man nach der Geschwindigkeit der Temperaturabnahme gleich nach Einbringen der Dewargefäße ins Eis erwartet hätte. Es wurde daher kaum an Zeit gespart, wenn man die Substanzen vor Ansetzen des Versuches vorkühlte. Dieses Verfahren kam deshalb in der Regel auch nicht zur Anwendung.

*Bi.* Als weiterer Versuchskörper wurde das ebenfalls hochatomige Wismut gewählt. Dasselbe wurde in einer Glasröhre in Zylinderform gegossen und sodann abgedreht. Das Gewicht betrug 68,4 g (Höhe: 2,5 cm). Nachdem der Bi-Zylinder drei Tage gelegen hatte, wurde er, ohne frisch gescheuert zu sein, in das Gefäß I gebracht, während II leer blieb. Es ergab sich, ganz wie bei den früheren Versuchen, daß nach 70 Stunden wiederum ein scheinbarer Temperaturüberschuß von 0,008° zugunsten von II vorhanden war. Danach konnte man also auch für das Bi keine merkliche Wärmeproduktion feststellen. Schließlich wurde nochmals ein Kontrollversuch ausgeführt, wobei II und I wieder leer waren. Der Endwert betrug, wie erwartet, nach $47^1/_2$ Stunden 0,008° zugunsten von II.

*Hg.* Es wurde nun in Erwägung gezogen, ob nicht die Wärmefortführung durch die Thermodrähte selbst vielleicht die Feststellung einer Temperaturdifferenz nicht gestattete. Namentlich wenn die Lötstellen nicht in Berührung mit der untersuchten Substanz waren, schien es denkbar, daß die den Lötstellen etwa zugeführte Wärme zu rasch durch die Zuleitungsdrähte abgeleitet wurde, und daß aus diesem Grunde keine Temperaturerhöhung eintrat. Falls die Lötstellen in die Substanz eintauchten, wie bei dem einen Versuch mit Hg, schien diese Möglichkeit allerdings kaum vorzuliegen.

Immerhin wurde versucht, die Wärmefortführung durch die Drähte dadurch zu vermindern, daß man diese von geringerer Dicke wählte. Es wurde wieder eine Säule mit vier Lötstellen durch Zusammenschmelzen hergestellt. Dabei betrug der Durchmesser des Eisen- bez. des Konstantandrahtes nur 0,14 und 0,20 mm. Die Lötstellen und Zuleitungen wurden wieder mit einer sehr dünnen Paraffinschicht überzogen. Die Empfindlichkeit der Thermosäule, die im übrigen einen Widerstand von 26 Ohm besaß, ergab sich zu 452 mm Doppelausschlag für 1°. Die Drähte wurden in der früheren Weise in den Korken befestigt, auch waren die Verbindungsdrähte zwischen den Korken durch dünne Kautschukschläuche isoliert. Die nach dem Kommutator führenden Enden bestanden wiederum aus Konstantan.

Zunächst wurde nun die Nullstellung der neuen Thermosäule festgestellt, indem man die Lötstellen in die leeren Dewargefäße brachte. Nachdem diese 69 Stunden in Eis gestanden hatten, ergab sich ein Endwert von 0,005° zugunsten von II. Nun wurde einer der früheren Versuche wiederholt. Die 102,9 g Hg, die inzwischen in einem Reagenzzylinder aufbewahrt worden waren, wurden in II gebracht, I blieb leer. Wie bei dem früheren Versuche tauchten auch hier die Lötstellen II nicht ein. Die Messungen ergaben nach

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 41½ | Stunden | (morgens) | 0,003° | für | II, |
| 66 | „ | „ | 0,004° | „ | „ |
| 90 | „ | „ | 0,006° | „ | „ |

Man erhielt somit merklich dieselbe Temperaturdifferenz, ob Hg vorhanden war oder nicht. Das Resultat, das die neue

Thermosäule lieferte, stimmte sonach ganz mit dem früheren überein.

§ 6. *Empfindlichkeit der Methode. Quantitative Bestimmung der Wärmeentwickelung.* Die oben beschriebenen Versuche lassen zunächst erkennen, daß die Wärmeentwickelung der untersuchten Substanzen, sofern überhaupt eine solche vorhanden ist, weit unter der des Radiums liegt. Haben doch Curie und Laborde (l. c.) schon bei wenigen Zehntel Gramm $RaCl_2$ eine Temperaturdifferenz von 1—3° festgestellt, während hier selbst bei Verwendung größerer Substanzmengen die Temperaturdifferenzen zum mindesten unterhalb 0,01° lagen.

Damit waren zunächst allerdings noch keine exakten Anhaltspunkte dafür gewonnen, unterhalb welcher Grenze etwa die Wärmeentwickelung der betreffenden Substanzen gelegen hatten. Es wurde daher durch besondere Versuche festzustellen versucht, auf welche Wärmeproduktion aus einer Temperaturdifferenz der Dewargefäße geschlossen werden konnte. Damit ließ sich dann angeben, von welcher Größe die kalorisch gemessene Radioaktivität sein mußte, um durch die verwendete Methode gerade noch erkennbar zu sein.

Bedeutet $\tau$ den Temperaturüberschuß in einem Dewargefäß, in dem sich eine Substanzmenge von $m$ g befinde, dann ist einerseits die pro Sekunde gebildete Wärme $W = m w$, wenn $w$ die Wärmeentwickelung pro Gramm ist. Andererseits ist im stationären Zustand diese Wärme gleich der durch Leitung nach außen abgegebenen. Für letztere kann man schreiben

$$W = \frac{\tau}{x} \varkappa ,$$

wo $x$ die Wanddicke des Dewargefäßes und $\varkappa$ die Wärmeleitfähigkeit bedeuten. Hierbei sei in dem Faktor $\varkappa/x$ auch die etwa nach oben durch den Kork entweichende Wärmemenge inbegriffen. Setzt man die beiden Ausdrücke für $W$ einander gleich, dann erhält man

$$(1) \qquad w = \frac{\tau \varkappa}{m x} [\text{cal. g}^{-1} \text{sec}^{-1}] .$$

Um das Verhältnis $\varkappa/x$ zu bestimmen, wurde die Abkühlungsgeschwindigkeit des Dewargefäßes, das eine abgewogene Menge Wasser, also eine bekannte Wärmemenge enthielt, ge-

messen. Unter Zugrundelegung des Newtonschen Abkühlungsgesetzes läßt sich zunächst, wenn $T_0$ die Anfangstemperatur bedeutet, schreiben:

$$T = T_0 e^{-\lambda t} \quad \text{oder} \quad dT = -\lambda T dt. \tag{2}$$

Ferner ist einerseits die in einem Zeitelement $dt$ aus dem Dewargefäß entweichende Wärmemenge gleich $dW = (T/x)\varkappa\, dt$, andererseits hat man, wenn im Dewargefäß sich $\mu$ g Wasser befinden, $dW = -\mu\, dT$. Daraus folgt

$$\frac{T}{x}\varkappa\, dt = -\mu\, dT. \tag{3}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gleichung (2), so ergibt sich der gesuchte Wert

$$\frac{\varkappa}{x} = \lambda\mu, \tag{3a}$$

und der endgültige Ausdruck für $w$ wird

$$w = \frac{\mu\lambda\tau}{m}. \tag{4}$$

In dieser Formel ist nicht berücksichtigt, daß außer dem sich abkühlenden Wasser auch das Dewargefäß selbst eine gewisse Wärmekapazität besitzt. Diese läßt sich jedoch leicht in Rechnung setzen, indem man statt $\mu$ schreibt $(\mu + \mu')$, wo $\mu'$ der Wasserwert des Dewargefäßes sei. Letzterer läßt sich etwa durch die Abkühlungsgeschwindigkeit des leeren Gefäßes bestimmen. $\mu'$ ergab sich zu nicht ganz 2 g Wasser, während $\mu$ bei dem folgenden Versuche 11,6 g betrug. Da es sich hier nur um eine annäherungsweise Berechnung handelt, bei der auch sonstige Fehlerquellen nicht berücksichtigt sind, so ist von der Wärmekapazität des Dewargefäßes Abstand genommen.

In der Formel ist ferner die Gültigkeit des Newtonschen Abkühlungsgesetzes für den vorliegenden Fall vorausgesetzt. Um die Richtigkeit dieser Annahme zu prüfen, wurde die Abkühlungskurve bestimmt. Sie ist in Fig. 2 wiedergegeben. Als Abszissen sind die Zeiten, als Ordinaten die Logarithmen der in willkürlichen Einheiten angegebenen Temperaturen aufgetragen. Es ist ersichtlich, daß die Punkte in verschiedenen Temperaturintervallen (9,67—4,99° und 3,04—2,28°) auf einer Geraden und zwar stets von derselben Neigung liegen. Das

Exponentialgesetz $T = T_0 e^{-\lambda t}$ ist demnach mit bemerkenswerter Genauigkeit erfüllt. Aus der Neigung der Geraden ergibt sich so für die Konstante $\lambda$ der Wert $\lambda = 0{,}000064$, und da $\mu = 11{,}6$ g war, so ist $\mu\lambda = \varkappa/x = 11{,}6 \,.\, 0{,}000064 = 0{,}00074$. Wenn man für $x$ die zu 0,65 cm bestimmte Wandstärke des

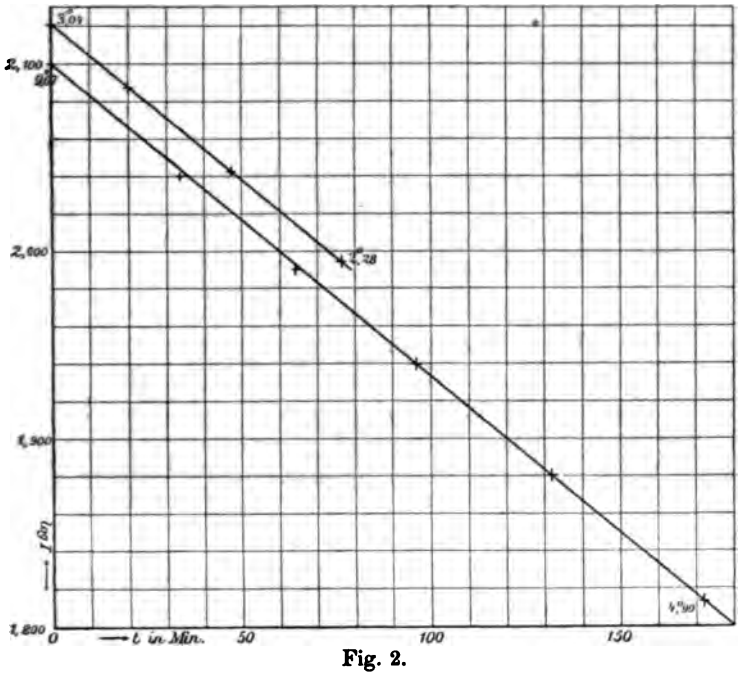



Fig. 2.

Dewargefäßes setzt, würde man daraus, nebenbei bemerkt, für $\varkappa$ den Wert 0,0005 finden.

Für $w$ erhält man

$$w = 0{,}00074 \cdot \frac{\tau}{m}. \tag{4a}$$

Diese Formel erlaubt nun diejenige Wärmemenge $w$ anzugeben, welche eine Substanz pro Sekunde hätte liefern müssen, um eine Temperaturerhöhung von 0,01° hervorzurufen. Nimmt man für $m$ den Wert 50 g, so wird

$$w = \frac{0{,}00074 \,.\, 0{,}01}{50} = 0{,}15 \,.\, 10^{-6} [\text{cal.}\, \text{g}^{-1} \text{sec}^{-1}].$$

Vergleicht man diese Wärme mit der vom Radium erzeugten,

die pro Gramm Ra und pro Sekunde $(122/60.60) = 0{,}034$ cal. beträgt[1]), so bekommt man als Quotienten

$$\frac{0{,}15 \cdot 10^{-6}}{0{,}034} = 4{,}4 \cdot 10^{-6}.$$

Die verwendete Methode hätte danach also erlaubt, Radioaktivitäten kalorisch zu messen, die nur wenige Milliontel von der des Radiums betrugen. Da aber die Temperaturdifferenzen der untersuchten Substanzen zum mindesten unterhalb 0,01° bez. 0,005° bei den letzten genaueren Versuchen betrugen, so ergibt sich das Resultat, daß ihre Wärmeabgabe höchstens wenige Milliontel von der des Radiums ausmachen konnte. Für Hg, das in Mengen von mehr als 100 g untersucht wurde, kann diese Grenze zu etwa $^1/_{1000000}$ angegeben werden.

Über die Temperaturerhöhung, welche Radium bei der verwendeten Versuchsanordnung hervorgerufen hätte, konnte man sich ebenfalls an Hand der Formel (4a) Rechenschaft geben. Da $w$ gleich 0,034 cal. beträgt, so war bei 1 mg Ra (1,7 mg $RaBr_2$) eine Temperatur von 0,046° zu erwarten. Dieser Wert ist weiter keiner experimentellen Prüfung unterzogen worden, da mir ein Radiumpräparat nicht zur Verfügung stand.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß man umgekehrt aus der zu beobachtenden Temperaturerhöhung auch auf die Wärmeentwickelung des Radiums schließen könnte. Wenn es sich hierbei auch nur um eine näherungsweise Bestimmung handeln kann, so ließe sich die Methode doch immerhin etwa durch Anwendung einer elektrischen Eichung mit Joulescher Wärme verbessern. Man könnte einmal die Temperaturerhöhung mit einer bestimmten Menge Radium beobachten, dann durch das Dewargefäß nach Herausnehmen des Radiums einen elektrischen Strom schicken, der so viel Stromwärme liefert, daß ungefähr dieselbe konstante Temperaturerhöhung entsteht. Beobachtet man im ersten Falle die Temperatur $\tau$, im zweiten die nahe gleiche Temperatur $\tau'$, bedeuten überdies $W$ den Widerstand des im Dewargefäß befindlichen Leiter-

1) J. Precht, Ann. d. Phys. 21. p. 595. 1906.

stückes, $J$ die Stromstärke, dann wäre die vom Radium entwickelte Wärme gegeben durch

$$w = \int_{\tau'}^{\tau} (0{,}24 \, . \, J^2 W) \, .$$

Eine solche Bestimmung hätte mit den benutzten Versuchsmitteln etwa sechs Tage in Anspruch genommen, da die Einstellung der Endtemperatur jeweils erst nach drei Tagen sicher zu erwarten war. Es würde sich daher auch kaum als praktisch erweisen, $\tau'$ durch Änderung der Stromstärke genau gleich $\tau$ machen zu wollen. Es dürfte jedoch von vornherein, nachdem für eine bestimmte Stromstärke die dazugehörige Temperaturerhöhung festgestellt wäre, leicht möglich sein, ohne weiteres mit ziemlicher Sicherheit auf eine bestimmte Temperatur, also nahezu auf $\tau$, einzustellen. Indem man etwa auf eine nahe unterhalb und oberhalb $\tau$ gelegene Temperatur $\tau'$ und $\tau''$ einstellt, ließe sich dann die Stromstärke $J$ für $\tau$ interpolieren.

Für die Größenordnung des etwa zu verwendenden Stromes erhält man aus Formel (4a) einen Wert. Man findet, daß bei 5 Ohm Widerstand 1 Milliamp. ungefähr 0,01° hervorgerufen hätte. Daraus läßt sich nebenbei auch ersehen, daß eine Temperaturmessung nach dem Bolometerprinzip, wie sie anfänglich auch in Betracht gezogen wurde, nicht verwendet werden konnte. Denn schon bei 1 Milliamp. Bolometerstrom[1]) wäre ja eine Temperaturerhöhung von 0,01° vorgetäuscht worden. Bei Bolometern aus festen Halbleitern, bei denen man die Abnahme des Widerstandes mit der Temperatur direkt durch die Änderung des Hauptstromes gemessen hätte, wäre diese Fehlerquelle freilich nicht vorhanden gewesen. Auch ergab sich der Temperaturkoeffizient selbst im Vergleich zu den gewöhnlichen Elektrolyten sehr groß (für Schellack aus alkoholischer Lösung zu 0,03). Allein die dauernden Veränderungen des Widerstandes, namentlich nach längerem Stromdurchgang, ließen eine Verwendung des Materials zu Temperaturmessungen nicht zu.

---

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Wied. Ann. 46. p. 204. 1892, verwenden einen Bolometerstrom von 6 Milliamp.

§ 7. *Temperatur im Inneren von radioaktiven Substanzen.* Vor kurzem ist über die Messung des inneren Temperaturgradienten einer Reihe von gewöhnlichen Substanzen berichtet worden.[1]) Aus den Versuchen von Thwing ergibt sich, daß wahrscheinlich alle Körper im Inneren eine etwas höhere Temperatur aufweisen als an der Oberfläche, ein Resultat, das wiederum auf eine allgemeine Wärmeentwickelung aller Substanzen schließen ließe. In dieser Hinsicht ist es vielleicht von Interesse, die von Thwing gefundenen Zahlen mit meinen Messungsergebnissen zu vergleichen.

Thwing benutzt von jeder Substanz zwei Zylinder von der Höhe 2,5 cm und dem Durchmesser $2R = 10$ cm. Zwischen diese wird ein Glimmerring gebracht, welcher, radial aufgewickelt, eine Reihe von Thermoelementen enthält. Die Dimensionen sind derart, daß die Temperaturdifferenz zwischen der auf konstanter Temperatur gehaltenen Oberfläche und einem Kreisring 3 cm weiter innen gemessen wird. Die gefundenen Werte sind sehr klein. Zum Zweck der Vergleichung seien hier die Temperaturdifferenzen angegeben für Zn: 0,000034°; Cu: 0,000031° und Pb: 0,000059°.

Diese Differenzen geben nun keineswegs ein direktes Maß für die Radioaktivität der untersuchten Materialien, da der Temperaturgradient ja auch von der Wärmeleitfähigkeit der Substanz abhängt. Es läßt sich aber immerhin unter Zugrundelegung der von Thwing gefundenen Werte berechnen, welche Temperaturerhöhung bei meinen Versuchen zu erwarten gewesen wäre.

Während für die Methode der Dewargefäße der Zusammenhang zwischen der Wärmemenge $w$ und den Versuchskonstanten bereits oben erörtert ist, soll dies nun auch in Kürze für die Thwingsche Anordnung geschehen. Zur Vereinfachung des Problems nehmen wir an, die benutzten Metallzylinder seien unendlich lang, dann besteht kein Temperaturgefälle in der Längsrichtung. Es ist ferner leicht ersichtlich, daß der radiale Temperaturgradient um so größer ist, je länger der Zylinder, da ein immer kleinerer Teil der entwickelten Wärme in der

1) Ch. B. Thwing, Physik. Zeitschr. 7. p. 522. 1906; Beibl. 31. p. 493. 1907.

Längsrichtung abgeht. Leiten wir daher eine Formel für unendlich lange Zylinder her und benutzen zur Berechnung die von Thwing gefundenen Werte, dann bekommen wir zu kleine Werte für $w$; doch werden wir immerhin eine *untere* Grenze für die mit Dewargefäßen zu erwartenden Temperaturdifferenzen erhalten.

Denkt man sich in einem unendlich langen Zylinder vom Radius $R$ einen kleinen Zylinder vom Radius $r$ und der Höhe 1 cm herausgeschnitten, dann beträgt einerseits die in demselben produzierte Wärme $\pi r^2 \sigma w$, wo $\sigma$ das spezifische Gewicht sei. Da diese ganze Wärme aus der Mantelfläche des Zylinderchens austritt, so ist

$$\pi r^2 \sigma w = 2\pi r \varkappa \left(-\frac{dT}{dr}\right),$$

wo $\varkappa$ die Wärmeleitfähigkeit des Materials bedeute. Somit ist

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\sigma w}{2\varkappa} r.$$

Die Integration ergibt unter Berücksichtigung der Grenzbedingung $T = 0$ für $r = R$

$$T = \frac{\sigma w}{4\varkappa}(R^2 - r^2). \quad (5)$$ [1]

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß die Temperatur im Inneren des Zylinders eine quadratische Funktion des Abstandes $r$ von der Achse ist. Sie nimmt von außen nach innen zunächst rasch, dann immer langsamer zu und erreicht schließlich für die Punkte der Achse den Maximalwert

$$T_0 = \frac{\sigma w}{4\varkappa} R^2.$$

Das Temperaturgefälle $(-dT/dr)$ selbst ist dort Null. Es nimmt von innen nach außen proportional $r$ zu und beträgt an der Oberfläche

$$\left(-\frac{dT}{dr}\right)_R = \frac{\sigma w}{2\varkappa} R.$$

1) Die Berechnung für den Fall einer Kugel führt zu der ganz analogen Formel:

$$T = \frac{\sigma w}{6\varkappa}(R^2 - r^2),$$

wobei hier $R$ den Radius der Kugel bedeutet.

Wenn Thwing einen Temperaturgradienten berechnet, indem er den Temperaturüberschuß 3 cm im Inneren des Zylinders durch 3 dividiert, so kann es sich hier offenbar nur um einen *mittleren* Gradienten handeln, der überdies nur für die speziellen Versuchsbedingungen Bedeutung erlangt.

Die Formel (5) erlaubt nun, aus der Temperaturmessung $T$ in einem Punkte vom Abstand $r$ die spezifische Wärmeproduktion $w$ der betreffenden Substanz zu berechnen. Wie schon bemerkt, erhält man für $w$ nur eine untere Grenze, falls $T$ in einem endlichen Zylinder gemessen wird.

Will man nun aus den für $T$ gefundenen Werten die Temperaturerhöhung $\tau$ herleiten, die bei meinen Versuchen zu erwarten gewesen wäre, so hat man einerseits

$$w = \frac{4 \varkappa T}{\sigma (R^2 - r^2)},$$

andererseits hat man durch (4) den Zusammenhang zwischen $w$ und $\tau$:

$$w = \lambda \mu \frac{\tau}{m}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke erhält man

$$\tau = \frac{4 \varkappa T m}{\lambda \mu \sigma (R^2 - r^2)}.$$

Da man für $T$ kleinere Werte einsetzt, als es einem unendlich langen Zylinder entspricht, so erhält man für $\tau$ ebenfalls nur einen unteren Grenzwert.

Die numerische Berechnung sei hier für Zn, Cu und Pb durchgeführt. Für $R$ hat man einzusetzen $R = 5$ cm. Da ferner der innere Kranz der Lötstellen bei den Thwingschen Versuchen 3 cm im Inneren lag, hat man für $r = 5 - 3 = 2$ cm. Andererseits war bei meinen Versuchen $\lambda \mu \asymp 0{,}00075$. Nimmt man für $m$ noch 50 g an, so erhält man

$$\tau = \frac{4 \cdot 50}{0{,}00075\,(25 - 4)} \frac{\varkappa T}{\sigma},$$

$$\tau = 12900 \frac{\varkappa T}{\sigma}.$$

Im folgenden sind nun noch die für $T$, $\sigma$ und $\varkappa$ benutzten Werte zusammengestellt:

| | $T$ | $\sigma$ | $\varkappa$ |
|---|---|---|---|
| Zn . . . . | 0,000084 | 7,1 | 0,26 |
| Cu . . . . | 0,000031 | 8,9 | 0,93 |
| Pb . . . . | 0,000059 | 11,3 | 0,08 |

Unter Zugrundelegung dieser Werte erhält man

für Zn . . . . $\tau = 0{,}016°$
„ Cu . . . . $\tau = 0{,}042°$
„ Pb . . . . $\tau = 0{,}005°$

Wie daraus ersichtlich, wären danach bei meinen Versuchen Temperaturdifferenzen in der Größenordnung von hundertstel Graden zu erwarten gewesen. Ein solcher Effekt hätte sich nun ohne weiteres nachweisen lassen müssen. Es wurde aber bei Verwendung von Zn, wobei $m$ mehr als 50 g (68 g) betrug, kein Temperaturunterschied gefunden. Ebenso haben auch die anderen zur Untersuchung gelangten Substanzen, unter denen allerdings kein Cu und Pb sich befanden, einen meßbaren Effekt nicht gezeigt.

Daraus dürfte zu entnehmen sein, daß die Messung des Temperaturgradienten zu einem höheren Wert für die Wärmeentwickelung gewöhnlicher Substanzen führt als die Methode der Dewargefäße. Eine Erklärung dieser Diskrepanz soll hier nicht versucht werden. Am ehesten werden wohl weitere Versuche über den Gegenstand Aufklärung geben können. In dieser Hinsicht werden die Erweiterung des Tatsachenmaterials und die Ausführung weiterer Kontrollversuche, welche Thwing in seiner Arbeit in Aussicht stellt, von Interesse sein.

§ 8. *Zusammenfassung.*

1. Die vorliegenden Versuche haben ergeben, daß die Temperaturdifferenzen, welche folgende Substanzen: $ZnSO_4$, $CdSO_4$, $MgSO_4$; Zn, Cd, $UO_2(NO_3)_2$, Hg und Bi in den Dewargefäßen gegen die Umgebung zeigten, zum mindesten weniger als $0{,}01°$ betrugen.

2. Dabei machte kristallinisches Bleinitrat die unerklärte Ausnahme, daß es dauernd eine um ein und mehrere hundertstel Grade niedrigere Temperatur als die Umgebung aufwies.

3. Aus der in § 6 abgeleiteten Formel (4) läßt sich berechnen, daß die Wärme, welche die untersuchten Substanzen bei einer radioaktiven Umwandlung produziert haben konnten, höchstens wenige Milliontel von der des Radiums betrug; für Hg wurde im speziellen $^1/_{1\,000\,000}$ als obere Grenze gefunden.

Es wurde ferner darauf hingewiesen, daß die Methode der Dewargefäße eine genaue Bestimmung der Wärmeent-

wickelung radioaktiver Substanzen erlaubt, sofern man etwa eine Eichung mit Joulescher Wärme ausführt.

4. Es wurde das (radiale) Temperaturgefälle in einem unendlich langen Zylinder berechnet, wenn dessen Oberfläche auf konstanter Temperatur gehalten wird. Unter Berücksichtigung der weiteren Formel (5) läßt sich auf die Größe dieses Temperaturgradienten schließen. Die auf diese Weise berechneten Werte fallen bedeutend kleiner aus, als wie sie Thwing (l. c.) experimentell gefunden hat.

Vorliegende Arbeit ist am Physikalischen Institut der Universität Heidelberg ausgeführt. Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, Herrn Geheimrat Quincke für das dieser Arbeit entgegengebrachte Interesse und seinen vielfachen Rat herzlich zu danken.

Zürich, Physik. Institut d. Universität. Juli 1907.

(Eingegangen 31. Juli 1907.)

## 7. *Zeemaneffekt an Magnesium, Calcium, Strontium, Zink, Kadmium, Mangan und Chrom;* von *William Miller.*

(Auszug aus der Göttinger Dissertation.)

In der vorliegenden Arbeit sind die ersten Nebenserien von Zn, Cd, Sr, Ca, Mg und das ganze Spektrum von Mn und Cr, soweit die Linien photographier- und meßbar sind, behandelt.

Bei den ersterwähnten Elementen haben wir bekanntlich nach der Bezeichnung von Kayser zwei *Nebenserien*, von einer *Hauptserie* hat sich bisher nichts gezeigt.[1]) Jede dieser beiden Nebenserienarten besteht aber eigentlich aus *drei* Serien, deren Schwingungszahlen sich nur um konstante Größen unterscheiden.

Fig. 1.

Die Fig. 1 veranschaulicht den Typus solcher Nebenserien in der Skala der Wellenlängen gezeichnet.

Zwischen der ersten und zweiten Serienart besteht nun ein wesentlicher Unterschied, indem nämlich bei der ersten Nebenserie außerdem noch sogenannte *Satelliten* auftreten; ihre Anzahl ist von Element zu Element verschieden; so zeigt bei Ca, Sr, Zn und Cd die Linie I zwei, die Linie II einen und die Linie III gar keine Satelliten; bei Quecksilber ist die Struktur noch komplizierter: die Linie I hat drei, die Linie II zwei und die Linie III einen Satelliten.

Den Zeemaneffekt der zweiten Nebenserie haben Runge und Paschen an den meisten Elementen der zweiten Mendeljeffschen Gruppe untersucht, denjenigen der ersten Nebenserie aber nur an Quecksilber. Obwohl bei den Elementen Ca, Sr, Zn und Cd nicht so viele Satelliten gefunden worden sind wie beim Quecksilber, liegen sie doch bei diesen Ele-

1) H. Kayser, Handb. d. Spektr. 2.

menten von kleineren Atomgewichten der Hauptlinie so nahe, daß ihre Beobachtung schwierig wird, besonders bei der Zerlegung im magnetischen Felde. Außerdem ist die Größe der Zerlegung recht klein, und auch wo ein Satellit der Hauptlinie sehr nahe liegt, tritt sehr oft eine Unsymmetrie der Intensität des ersteren ein und macht den Charakter des Effektes sehr schwer erkennbar. In manchen Fällen sind die Messungen nur dann möglich, wenn die eine Schwingungsart unterdrückt wird; in anderen dürfen nur verhältnismäßig kleine magnetische Felder benutzt werden, damit die Komponenten des Satelliten von der benachbarten Hauptlinie getrennt erhalten werden.

Bei unserer Untersuchung verwendeten wir die große Rungesche Gitteraufstellung im Göttinger neuen Physikalischen Institut, die in der Physik. Zeitschr. 6. p. 891. 1905 beschrieben ist. Im wesentlichen besteht sie aus folgenden Teilen. Eine U-Eisenschiene bildet einen Kreisbogen von innerem Krümmungsradius 3,1 m und 160° Öffnung. Sie trägt einen aufgeschraubten 20 cm breiten Bogen aus Flacheisen, auf dem wiederum die photographische Kamera montiert ist. Zur starren Verbindung des Gittertisches mit diesem Bogen dienen drei starke Träger. Die ganze Konstruktion ruht an der Stelle des Gittertisches in einer Wandnische, außerdem in drei Punkten auf Rollen, damit thermische Dilatationen keine Spannungen hervorrufen können. Um jedes fremde Licht während einer Aufnahme zu vermeiden, ist die Lichtquelle im Vorraum dieses Zimmers aufgestellt und durch eine Maueröffnung auf den Spalt projiziert. Ein lichtdichter Sack ist einerseits an der Holzverkleidung der Maueröffnung, und andererseits am Rahmen des Spaltes befestigt. Um während einer Exposition das Zimmer betreten zu können, ist dasselbe mit lichtdichten Doppeltüren versehen.

Ein massives Messingstativ trägt einen symmetrisch verstellbaren Spalt und ist auf dem Eisenbogen verschraubt. Das Konkavgitter ist auf einem Stativ befestigt, das Drehungen um drei zueinander senkrechte Achsen gestattet, und auf dem Tische des Eisengerüstes aufgestellt.

Auf dem Flacheisenbogen ist die über 9 m lange Kamera aufgeschraubt, deren Querschnitt die Fig. 2 zeigt: in Inter-

vallen von 50 cm stehen gußeiserne Träger, die zwei horizontale Flacheisenstäbe $S_1$, $S_2$ tragen. Diese Stäbe sind schwach gebogen und erstrecken sich über die ganze Kreisschiene. Längs der oberen Kante des unteren Eisens läuft eine schmale Rinne $R$, in die die photographischen Platten $P$ eingesetzt werden. Zur Befestigung der Platten und um ihnen die

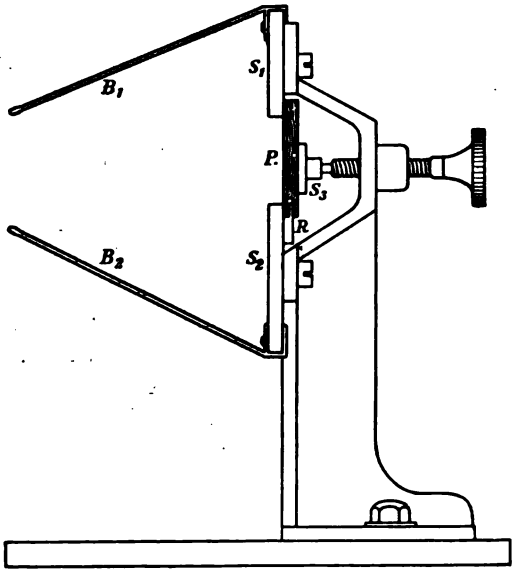



Fig. 2.

Krümmung der Fokalfläche zu erteilen, werden dünne, elastische Holzbrettchen durch die Schrauben $S_3$ von hinten angepreßt. Zum Schutz gegen fremdes Licht sind diese Brettchen an der Vorderfläche mit schwarzem Sammet bezogen, und die Eisen $S_1$ und $S_2$ tragen ihrer ganzen Länge nach schwarze Blechschirme $B_1$, $B_2$.

Vor der Maueröffnung im Vorraum, senkrecht zu der Verbindungslinie, Mittelpunkt des Gitters — Spalt, steht der große Elektromagnet, zwischen dessen Polen der elektrische Funke überschlägt. Zur Erzeugung der leuchtenden Dämpfe benutzte ich den Funken von einem großen Induktionsapparate, und zwar waren die Elektroden so eingerichtet, daß der Funke in der Richtung der magnetischen Kraftlinien überschlug.

Die Elektroden bestanden aus zwei dünnen Blechstreifen, die an den Polschuhen quer zueinander befestigt waren. Zur Befestigung derselben waren diametral auf jedem Polschuhe zwei Hartgummikeile von hinten angeschraubt. Die Elektroden, dünne, schmale Blechstreifen, wurden an der Vorderseite dieser Keile angeschraubt. An einem Pole war der Blechstreifen in direkter Berührung mit der Polfläche, auf der anderen durch eine kleine Glimmerscheibe davon isoliert.

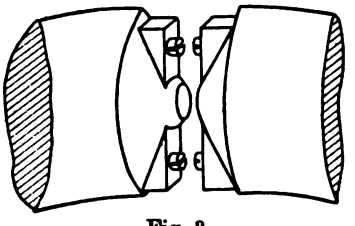


Fig. 3.

Um jedes Herumspringen des Funkens zu vermeiden, wurden Blechstreifen von höchstens $2^1/_2$ mm Breite verwendet. Weil dieselben rechtwinklig zueinander liegen, ist die kürzeste Funkenstrecke auf einen Querschnitt von $2^1/_2$ mal $2^1/_2$ mm beschränkt. Im Falle von Cd, Zn und Ca waren die Blechstreifen aus diesen Metallen gesägt, für die anderen Elemente wurde aus einem ihrer Salze ein Brei angerührt und einfach von Zeit zu Zeit während der Belichtung auf die Zinkelektroden gestrichen.

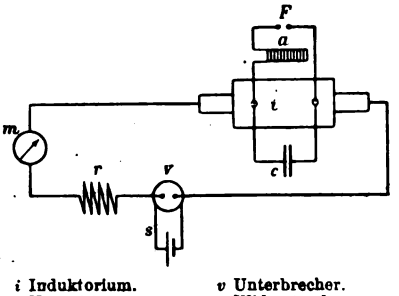
In allen Fällen habe ich wenigstens *eine Elektrode* aus Zink verwendet, damit ich gleichzeitig eine Aufnahme des Zinkspektrums erhielt.

Vermittelst der bekannten Zinklinien habe ich durch Vergleich mit den Messungen von Runge und Paschen die Feldstärke bestimmen können, ohne daß eine direkte Feldmessung nötig gewesen wäre. Die absolute Feldstärke, auf die alle Messungen reduziert worden sind, also die der Quecksilbermessungen von Runge und Paschen, ist nach den Untersuchungen von Hrn. Färber 23850 C.G.S-Einheiten, wie in der zweiten Mitteilung von Runge und Paschen — Berichte der Berl. Akad. der Wissenschaften — erwähnt.

Das Bild der Lichtquelle wurde auf den Spalt mit einer Quarzlinie entworfen. Die Größe der Linse im Verhältnis zu ihrer Brennweite war so gewählt, daß nicht viel mehr als das Gitter, dieses aber immer ganz, bedeckt wird. Wegen der großen Absorption der ultravioletten Strahlen kann eine Glaslinse nicht benutzt werden.

Um den Polarisationszustand der verschiedenen Komponenten des Zeemaneffektes einer Linie zu bestimmen, muß ein Kalkspat zwischen Linse und Elektromagnet eingeschaltet werden. Durch die Doppelbrechung des Kalkspates werden nun zwei Bilder auf den Spalt geworfen. Beim Austritt aus dem Kalkspat ist das eine Strahlenbündel parallel, das andere senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien polarisiert. Der Kalkspat wird um eine horizontale Achse gedreht, bis diese beiden Bilder in der gleichen Höhe liegen. Durch eine kleine Drehung des Kalkspatstatives um eine vertikale Achse kann das eine oder das andere dieser Bilder auf die Spaltöffnung gebracht werden. Die Photogramme enthalten dann nur die zu den Kraftlinien parallelen bez. senkrechten Schwingungen der Lichtquelle.

Zur Erzeugung des Funkens wurde ein großes Induktorium mit Quecksilberturbinenunterbrecher benützt. Im sekundären Kreise wurden parallel zur Funkenstrecke zwei Leidener Flaschen eingeschaltet. Dadurch wird der Funke oszillatorisch, seine Spannung kleiner, dagegen die Entladung sehr intensiv, so daß die Helligkeit bedeutend gesteigert wird. In Serie mit der Funkenstrecke befindet sich eine variable Selbstinduktion, die aus zwei hintereinander geschalteten und ineinander verschiebbaren Drahtspulen besteht.




*i* Induktorium. *v* Unterbrecher.
*c* Kapazität. *r* Widerstand.
*a* Variable Induktion. *m* Ampèremeter.
*F* Funkenstrecke. *s* Städtischer Strom.

Fig. 4.

Neben dem Spektrum der Metalle, die die Elektroden bilden, tritt auch das Spektrum der Luft auf, aber bei geeigneter Selbstinduktion tritt dieses Spektrum zurück, und gleichzeitig werden die Metalllinien schärfer.[1]) Die nötige Größe dieser Induktion hängt von dem Apparat und von der Kapazität ab und muß, wenn die Kapazität geändert wird, gegen dieselbe abgestimmt werden, bis die Luftlinien zum Verschwinden gebracht sind.

1) G. A. Hemsalech, Compt. rend. **129.** p. 285. 1899.

Die Gittertheorie verlangt, daß der Krümmungsradius des Gitters durch den Mittelpunkt des großen Kreises geht; um dies zu erreichen, wurde dieser Mittelpunkt durch Probieren bestimmt und markiert. Ein Beobachter, dessen Auge in der Richtung der Normale des Gitters auf dem großen Kreise ist, sieht ein reelles Bild seiner Pupille. Ein zweiter Beobachter dreht dann das Gitter um dessen vertikale Achse so lange, bis der erste Beobachter das Bild seiner Pupille vor der Mitte des Gitters und dem markierten Zentrum sieht. Dann kann der zweite Beobachter das Gitter um die zur Gitterebene parallele Horizontalachse drehen, bis die Normale horizontal, also in halber Höhe der photographischen Platte liegt. Schließlich wird das Gitter um seine Normale gedreht, bis die Spektren aller Ordnungen gleich hoch liegen. Diese einfache Methode ist so genau, daß die Normale bis auf 1 mm justiert werden kann.

Die Theorie der Gitterfehler zeigt, daß infolge von Teilungsunregelmäßigkeiten die Fokalkurve nicht streng ein Kreis ist. Es mußte also der Verlauf dieser Kurve experimentell bestimmt werden, indem für eine große Zahl von Wellenlängen der Bildort mit einer Lupe aufgesucht wurde. Als Lichtquelle verwendeten wir dabei eine Quecksilberlampe.

Es zeigte sich, daß die Schärfe des Bildes besser erkannt werden kann, wenn man den Spalt nicht sehr eng wählt, sondern ein Haar längs des etwas geöffneten Spaltes spannt. Das Haar quer zu spannen verbietet der Astigmatismus des Gitters. Zur Beobachtung der Linien diente eine Zeißsche Lupe mit Fadenkreuz, die, auf einem massiven Stativ montiert, an jeder Stelle des Spektrums aufgestellt werden konnte. So konnte durch Herunterloten der Bildort bis auf 2 oder 3 mm bestimmt werden. Aus den so ermittelten 72 Punkten wurde die Fokalkurve ausgeglichen und die Kamera danach montiert.

Diese Fokalkurve wurde dann noch zweimal durch ein photographisches Verfahren verbessert. An Stelle der Quecksilberlampe wurde dabei eine Bogenlampe mit zwei Elektroden aus weichem Schmiedeeisen gebraucht. Vor jedem Kameraträger, also in Abständen von 50 cm, wurde eine photographische Platte schräg befestigt, so daß die untere Kante näher beim Gitter lag. Eine Spektrallinie, deren Fokus

irgendwo auf der Platte liegt, wird auf ihr ein X-förmiges Bild liefern. Der Fokus liegt dann im Schnittpunkte des X. So konnte die Stellung der Kameraträger verbessert werden, weil Schlitze am Fuße der Träger genug Freiheit gestatteten. Durch eine Wiederholung dieses Verfahrens mit steileren Platten wurde die endgültige Stellung der Kamera gefunden.

Bei der Untersuchung des Zeemaneffektes wurden verschiedene Feldstärken bis auf etwa 32300 C.G.S.-Einh. benutzt. Die Belichtungsdauer betrug meistens eine halbe Stunde, aber um die schwächeren Linien herauszubringen, habe ich gelegentlich auch bis anderthalb Stunden belichtet.

Während der Belichtung muß man die Stromstärke im Magneten ständig regulieren, weil der Widerstand des Magneten durch dessen Erwärmung allmählich wächst. Auch muß man von Zeit zu Zeit Salz auf die Elektroden bringen. Wenn die Belichtung mehr als eine halbe Stunde dauert, muß man den Versuch gelegentlich unterbrechen, damit der Elektromagnet sich abkühlen kann. Weil die verschiedenen Aufnahmen mit verschiedener Feldstärke gemacht wurden, sind alle Messungen später auf eine gemeinsame Feldstärke reduziert worden, und zwar, um Vergleiche meiner Messungen sowohl untereinander, als mit Runge und Paschens Quecksilberlinien vornehmen zu können, wurde, wie schon gesagt, die Feldstärke von 23850 C.G.S.-Einh. gewählt, bei der Runge und Paschens Messungen am Quecksilber ausgeführt worden sind.

Das Vermessen der Platten wurde mit einem Komparator von Zeiss ausgeführt. In der Fokalebene liegt in der neuen auf Wunsch von Prof. Voigt hergestellten Form des Instrumentes ein verschiebbarer Glasstreifen, auf den verschiedene Stricharten geritzt sind, zwei parallele in verschiedenen Abständen und ein einfacher von halber Länge. Durch geeignete Wahl der Vergrößerung und der Okularstriche kann man sich jeder Linienbreite anpassen.

Zur Untersuchung des Zeemaneffektes der ersten Nebenserie von Mg, Ca, Sr, Zn und Cd hatte Hr. Prof. Runge die Freundlichkeit, mir seine Plattensammlung zur Verfügung zu stellen. Ich habe nun zunächst alle die für mich in Frage kommenden Linien ausgemessen. Dabei zeigte sich, daß die Aufnahmen nicht alle Linien mit der gewünschten Deutlichkeit

lieferten, weshalb ich diese Lücken durch eigene Aufnal auszuführen versucht habe.

Durch geeignete Änderung der Feldstärke und l Expositionszeiten wurde dies auch bei den Linien Zn 330 Ca 4435,86 erreicht, einige Satelliten waren aber so schv daß ihre Zerlegung nicht mehr bestimmt werden konnte. lich haben Runge und Paschen am Quecksilber die legung sämtlicher Satelliten erhalten, aber bei den hier u suchten Metallen war die Erzeugung leuchtender Dä wesentlich schwieriger.

Zum Vergleich mit den Resultaten Runge und Pasc am Quecksilber habe ich in den Tabellen auch deren Messu mitgeteilt. In den nachfolgenden Tabellen sind unter „par bez. „senkrecht" diejenigen Komponenten verstanden, parallel bez. senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien p siert sind. Bei der Angabe der Intensitäten sind die hel Linien mit größeren Zahlen bezeichnet; Intensität 0 bed daß die betreffenden Linien nur mit Kalkspat vorhanden und zwar ganz stark auftreten, aber merkwürdigerweise Kalkspat manchmal so schwach sind im Vergleich mit anderen Komponenten, daß sie fast zu fehlen scheinen.

**Magnesium. Erste Nebenserie.**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 8,670 | 1 | +230 | −1,56 | Dieselbe Bemerkung gil |
| | | 8,600 | 2 | +160 | −1,08 | wie bei der Linie Hg 31 |
| | 8,517 | 8,517 | 2 | + 77 | −0,53 | Erste Nebenserie II nä |
| 3838,44 | 8,440 | | 6 | 0 | 0 | Die als gleichzeitig p |
| | 8,359 | 8,359 | 2 | − 81 | +0,55 | und senkrecht zu den |
| | | 8,290 | 2 | −150 | +1,02 | linien schwingend aufg |
| | | 8,200 | 1 | −240 | +1,63 | ten Komponenten sc |
| | | | | | | nicht genau zu koinzi |
| | | | | | | Die parallel schwing |
| | | | | | | haben vermutlich einer |
| | | | | | | größeren, die sen |
| | | | | | | schwingenden einen |
| | | | | | | kleineren Abstand al |
| | | | | | | angegebenen. |

**Magnesium.** (Fortsetzung.)

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde: parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde: senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2,702 | 1 | +242 | −1,64 | Neuer Typus mit ungestörter senkrechter Komponente. |
| | 2,616 | | 1 | +156 | −1,07 | |
| | 2,536 | 2,536 | 4 | + 76 | −0,52 | |
| 3832,46 | | 2,460 | 4 | 0 | 0 | |
| | 2,387 | 2,387 | 4 | − 73 | +0,50 | |
| | 2,302 | | 1 | −158 | +1,08 | |
| | | 2,228 | 1 | −232 | +1,58 | |
| | | 9,818 | <1 | +308 | −2,10 | Dieser Typus ist schon von Becquerel u. Deslandres und von Kent im Eisenspektrum beobachtet worden. |
| | 9,665 | 9,665 | 4 | +155 | −1,06 | |
| 3829,51 | 9,510 | 9,510 | 8 | 0 | 0 | |
| | 9,352 | 9,352 | 4 | −158 | +1,08 | |
| | | 9,209 | <1 | −301 | +2,05 | |

**Calcium.** Erste Nebenserie.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4456,81 Satellit | | | | | | Zu schwach. |
| | | 6,357 | <1 | +277 | −1,39 | Komponenten breit und unscharf. |
| | 6,210 | | <1 | +130 | −0,66 | |
| 4456,08 Satellit | 5,950 | | 2 | −130 | +0,66 | |
| | | 5,808 | 2 | −277 | +1,39 | |
| | | 5,210 | 4 | +240 | −1,21 | |
| 4454,97 | 4,970 | | 8 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 4,730 | 4 | −240 | +1,21 | |
| | | 6,075 | | +215 | −1,10 | Der Effekt war nur erkennbar auf polarisierten Platten mit kleinen Feldern. Mit höheren magnetischen Feldern gehen die Linien 4435,86 u. 4435,13 durcheinander. |
| | 6,057 | | | +197 | −1,00 | |
| 4435,86 Satellit | 5,663 | | | −197 | +1,00 | |
| | | 5,645 | | −215 | +1,10 | |
| | | 5,332 | | +202 | −1,03 | |
| 4435,13 | 5,130 | | | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 4,928 | | −202 | +1,03 | |

**Calcium. (Fortsetzung.)**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 5,719 | | +109 | −0,55 | |
| 4425,61 | 5,610 | | | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 5,501 | | −109 | +0,55 | |

**Strontium. Erste Nebenserie.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4971,85 Satellit | | | | | | Zu schwach. |
| 4968,11 Satellit | | | | | | |
| | | 2,750 | | +300 | −1,22 | |
| 4962,45 | 2,450 | | | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 2,150 | | −300 | +1,22 | |
| | | 0,643 | 2 | +193 | −1,19 | |
| 4030,45 | 0,450 | | 4 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 0,257 | 2 | −195 | +1,20 | |
| | | 6,736 | 2 | +386 | −1,62 | |
| 4876,35 | 6,350 | | 4 | 0 | 0 | |
| Satellit | | 5,967 | 2 | −383 | +1,61 | |
| | | 2,890 | 2 | +230 | −0,97 | Komponenten diffus. |
| 4872,66 | 2,660 | | 4 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 2,430 | 2 | −231 | +0,97 | |
| | | 2,603 | | +373 | −1,59 | Ganz unsymmetrisch. Auf einer nichtpolarisierten Platte gibt es auch eine schwache Linie auf der Seite nach Violett der mittleren Komponente aber zu nahe, zu messen. |
| | | 2,305 | | + 75 | −0,32 | |
| 4832,23 | 2,230 | | | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 2,057 | | −173 | +0,74 | |
| | | 1,857 | | −373 | +1,59 | |

Bei der Linie Sr 4832,23 sind die zwei äußersten Komponenten und die mittlere viel stärker als die zwei anderen. Mir scheint es, daß es sich hier in Wirklichkeit um die Zerlegung zweier verschiedener übereinander gelagerter Linien

handelt und daß die zwei inneren senkrechten Schwingungen und die schwache Linie auf der Seite nach Violett zusammengehörigen. Die zwei ungestörten Schwingungen sind vermutlich zu nahe beieinander, um sie ohne magnetisches Feld getrennt zu erhalten. In diesem Falle steht die Zerlegung des inneren Triplets im Einklang mit der zweiten Prestonschen Regel.

**Zink. Erste Nebenserie.**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde: parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde: senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3346,04 Satellit | | | | | | Zu schwach |
| | | 5,758 | | +138 | −1,23 | Die Messung ist sehr gestört durch die benachbarte Linie 3345,13. Nur polarisierte Platten sind brauchbar |
| | 5,703 | | | + 83 | −0,74 | |
| 3345,62 | | | | | | |
| Satellit | 5,537 | | | − 83 | +0,74 | |
| | | 5,482 | | −138 | +1,23 | |
| | | 5,264 | 4 | +134 | −1,20 | |
| 3345,13 | 5,130 | | 5 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 4,995 | 4 | −135 | +1,21 | |
| | | 3,155 | | +125 | −1,14 | Nur zu verstehen, wenn ein Polarisationszustand unterdrückt ist und kleine Felder genommen werden. Die Komponenten höherer Wellenlängen sind immer stärker als die anderen. Ohne Kalkspat sind die Linien verschwommen |
| | 3,146 | | | +116 | −1,06 | |
| 3303,03 | | | | | | |
| Satellit | 2,914 | | | −116 | +1,06 | |
| | | 2,905 | | −125 | +1,14 | |
| | | 2,783 | | +113 | −1,04 | |
| 3302,67 | 2,670 | | | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 2,557 | | −113 | +1,04 | |
| | | 2,482 | | + 62 | −0,58 | Nur dann getrennt, wenn die parallele Schwingung unterdrückt ist und auch nur auf wenigen senkrechten Platten getrennt |
| 3282,42 | 2,420 | | | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 2,358 | | − 62 | +0,58 | |

**Kadmium. Erste Nebenserie.**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | +247 | −1,89 | Die senkrechten Aufnahmen sind zu schwach. Auf der Seite nach Rot liegt noch eine schwache Linie |
| | 4,678 | | 1 | + 98 | −0,75 | |
| 3614,58 | | | | | | |
| Satellit | 4,482 | | 1 | − 99 | +0,76 | |
| | | | 1 | −246 | +1,88 | |
| | | 3,219 | | +179 | −1,37 | |
| | 3,128 | | | + 88 | −0,67 | |
| 3613,04 | | | | | | |
| Satellit | 2,952 | | | − 88 | +0,67 | |
| | | 2,861 | | −179 | +1,37 | |
| | | 0,819 | 4 | +159 | −1,22 | |
| 3610,66 | 0,660 | | 8 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 0,501 | 4 | −159 | +1,22 | |
| | | 7,948 | 2 | +188 | −1,56 | |
| | 7,888 | | 4 | +128 | −1,06 | Vgl. Hg 2653,86. |
| | | 7,824 | 2 | + 64 | −0,53 | |
| 3467,76 | | | | | | |
| Satellit | | 7,699 | 2 | − 61 | +0,51 | |
| | 7,632 | | 4 | −128 | +1,06 | |
| | | 7,570 | 2 | −190 | +1,58 | |
| | | 6,454 | 5 | +124 | −1,03 | |
| 3466,33 | 6,330 | | 5 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 6,211 | 5 | −119 | +0,99 | |
| | | 3,801 | 4 | + 61 | −0,53 | Auf den meisten Aufnahmen sind die Komponenten nicht getrennt. |
| 3403,74 | 3,740 | | 8 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 3,680 | 4 | − 60 | +0,52 | |

Einige Quecksilbermessungen Runge und Paschens waren in der Arbeit in den Abhandlungen der Berliner Akad. der Wissenschaften 1902 ausgelassen und wurden im Astrophys. Journ. 16. p. 118. 1902 nachgetragen. Diese sind hier eingefügt.

**Quecksilber. Erste Nebenserie. Runge und Paschen.**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3,732 | 1 | +272 | −2,06 | Die durch Klammern zusammengefaßten Linienpaare liefen in eine Linie zusammen, wenn beide Arten von Schwingungen zugelassen waren. |
| | | 3,672 | 3 | +212 | −1,61 | |
| | | 3,610 | 2 | +150 | −1,14 | |
| | 3,582 | | 5 | +122 | −0,92 | |
| | | 3,542 | 2 | + 82 | −0,62 | |
| | 3,528 | | 2 | + 68 | −0,51 | |
| 3663,46 Satellit | 3,398 | | 2 | − 62 | +0,47 | |
| | | 3,370 | 3 | − 90 | +0,68 | |
| | 3,332 | | 5 | −128 | +0,97 | |
| | | 3,318 | 3 | −142 | +1,08 | |
| | | 3,249 | 4 | −211 | +1,60 | |
| | | 3,187 | 1 | −273 | +2,07 | |
| | | 3,428 | 2 | +378 | −2,81 | Die beiden Komponenten von größter Wellenlänge werden bei dieser Feldstärke von den Komponenten der Linie 3663,46 verdeckt. Sie sind bei geringer Feldstärke beobachtet und dann auf die größere Feldstärke reduziert worden. |
| | | 3,274 | 1 | +224 | −1,67 | |
| | 3,198 | | 2 | +148 | −1,10 | |
| | | 3,128 | < 1 | + 78 | −0,58 | |
| 3663,05 Satellit | 3,050 | | 4 | 0 | 0 | |
| | | 2,977 | < 1 | − 73 | +0,54 | |
| | 2,903 | | 3 | −147 | +1,09 | |
| | | 2,828 | 1 | −222 | +1,65 | |
| | | 2,679 | 3 | −371 | +2,76 | |
| | | 5,265 | 3 | +265 | −1,98 | |
| | | 5,208 | 4 | +208 | −1,56 | |
| | 5,181 | | 2 | +181 | −1,35 | |
| | | 5,159 | 4 | +159 | −1,19 | |
| | 5,108 | | 5 | +108 | −0,81 | Möglicherweise dieselbe Wellenlänge |
| | | 5,102 | 3 | +102 | −0,76 | |
| | 5,049 | | 3 | + 49 | −0,37 | |
| 3655,00 Satellit | 4,949 | | 3 | − 51 | +0,38 | |
| | | 4,897 | 3 | −103 | +0,77 | Möglicherweise dieselbe Wellenlänge |
| | 4,891 | | 5 | −109 | +0,82 | |
| | | 4,846 | 4 | −154 | +1,15 | |
| | 4,822 | | 2 | −178 | +1,33 | |
| | | 4,789 | 4 | −211 | +1,58 | |
| | | 4,734 | 3 | −266 | +1,99 | |

**Quecksilber. (Fortsetzung.)**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0,480 | 5 | +170 | −1,28 | Auf einigen Platten sind die den Kraftlinien parallel schwingenden Komponenten nicht getrennt. Es kann sein, daß die Trennung nur aus einer Absorption der mittleren Linie besteht. Alle vier Komponenten sind viel dicker als die der anderen Linien. |
| | 0,353 | | 5 | + 43 | −0,32 | |
| 3650,31 Hauptlinie | 0,262 | | 5 | − 48 | +0,36 | |
| | | 0,141 | 5 | −169 | +1,27 | |
| | 7,563 | 7,563 | 1 | + 97 | −1,06 | |
| 3027,66 Satellit | 7,757 | 7,757 | 1 | − 97 | +1,06 | |
| 3025,79 Satellit | | | | | | Nicht gemessen, weil die Komponenten zu schwach waren. |
| | 3,769 | 3,769 | 2 | +129 | −1,41 | Nicht deutlich getrennt. |
| | 3,734 | 3,734 | 2 | + 94 | −1,03 | |
| 3023,64 Satellit | 3,546 | 3,546 | 2 | − 94 | +1,03 | Nicht deutlich getrennt. |
| | 3,500 | 3,500 | 2 | −140 | +1,53 | |
| | | 1,792 | 3 | +112 | −1,22 | |
| | 1,705 | | 3 | + 25 | −0,27 | |
| 3021,68 Hauptlinie | 1,655 | | 2 | − 25 | +0,27 | |
| | | 1,569 | 3 | −111 | +1,21 | |
| | | 3,776 | 1 | + 86 | −1,10 | Die Komponenten sind nur dann getrennt beobachtet, wenn die parallel schwingenden unterdrückt wurden. |
| 2803,69 | 3,690 | | | | | |
| | | 3,604 | 1 | − 86 | +1,10 | |
| | | 2,102 | 1 | +152 | −1,55 | Vgl. Bemerkung Mg 3838,44. |
| | | 2,058 | 3 | +108 | −1,10 | |
| | 2,007 | 2,007 | 4 | + 57 | −0,58 | |
| 3131,95 | 1,950 | | <1 | 0 | 0 | |
| Satellit | 1,884 | 1,884 | 4 | − 66 | +0,67 | |
| | | 1,843 | 3 | −107 | +1,09 | |
| | | 1,784 | 1 | −166 | +1,69 | |

**Quecksilber. (Fortsetzung.)**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,841? | 1,841? | <1 | +181 | −1,85 | Die mit ? bezeichneten Komponenten sind nur ohne Kalkspat beobachtet worden. Ihr Polarisationszustand kann daher nicht angegeben werden. |
| | | 1,815 | 3 | +155 | −1,58 | |
| | 1,764 | | 3 | +104 | −1,06 | |
| | | 1,716 | 3 | + 56 | −0,57 | |
| 3131,66 | | | | | | |
| Satellit | | 1,604 | 3 | − 56 | +0,57 | |
| | 1,555 | | 3 | −105 | +1,07 | |
| | | 1,502 | 3 | −158 | +1,59 | |
| | 1,452? | 1,452? | <1 | −208 | +2,12 | |
| | 5,936? | 5,936? | 1 | +156 | −1,60 | |
| | | 5,897 | 2 | +117 | −1,20 | |
| | | 5,858 | 3 | + 78 | −0,80 | |
| | 5,819 | | 1 | + 39 | −0,40 | |
| 3125,78 | 5,780? | 5,780? | 1 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | 5,744 | | 1 | − 36 | +0,37 | |
| | | 5,705 | 2 | − 75 | +0,77 | |
| | | 5,664 | 3 | −116 | +1,19 | |
| | 5,627 | 5,627 | 1 | −153 | +1,57 | |
| | | 5,346 | 1 | + 56 | −0,79 | Die Komponenten sind nur getrennt beobachtet worden, wenn die parallel schwingenden Komponenten unterdrückt wurden. |
| 2655,29 | 5,290 | | 1 | 0 | 0 | |
| Satellit | | 4,234 | 1 | − 56 | +0,79 | |
| | | 3,970 | 1 | +110 | −1,56 | |
| | 3,932 | | 1 | + 72 | −1,02 | |
| | | 3,906 | 1 | + 46 | −0,65 | |
| 2653,86 | | | | | | |
| Satellit | | 3,812 | 1 | − 48 | +0,68 | |
| | 3,788 | | 1 | − 72 | +1,02 | |
| | | 3,754 | 1 | −106 | +1,51 | |
| | | 2,295 | 3 | + 75 | −1,07 | |
| 2652,22 | 2,220 | | 3 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | | 2,145 | 2 | − 75 | +1,07 | |

Quecksilber. (Fortsetzung.)

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 7,740 | 1 | +100 | −1,14 | |
| 2967,64 | 7,640 | | 1 | 0 | 0 | |
| Satellit | | 7,541 | 2 | − 99 | +1,12 | |
| | 7,423 | 7,423 | 4 | + 53 | −0,60 | Die mittlere Komponente breit. |
| 2967,37 | 7,370 | | 3 | 0 | 0 | |
| Hauptlinie | 7,318 | 7,318 | 3 | − 52 | +0,59 | |
| | 4,920 | 4,920 | 1 | + 30 | −0,47 | Die Komponenten kennt trennt nur dann beob werden, wenn die p den Kraftlinien schw den Komponenten drückt waren. |
| 2534,89 | 4,890 | | | 0 | 0 | |
| | 4,860 | 4,860 | 1 | − 30 | +0,47 | |
| | | | | Mangan. | | |
| | | 4,049 | | +329 | −1,41 | |
| 4823,72 | 3,720 | | | 0 | 0 | Etwas diffus. |
| | | 3,390 | | −330 | +1,42 | |
| | | 4,044 | 2 | +434 | −2,12 | |
| 4783,61 | 3,610 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 3,176 | 2 | −434 | +2,11 | |
| | | 6,865 | 2 | +265 | −1,17 | |
| 4766,60 | 6,600 | | <2 | 0 | 0 | |
| | | 6,334 | 2 | −266 | +1,17 | Übereinander gelagert. |
| | | 6,226 | | +226 | −1,00 | |
| 4766,00 | 6,000 | | | 0 | 0 | |
| | | 5,773 | | −227 | +1,00 | |
| | | 2,887 | 2 | +287 | −1,26 | |
| 4762,60 | 2,600 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 2,313 | 2 | −287 | +1,27 | |
| | | 4,617 | 2 | +387 | −1,71 | |
| 4754,23 | 4,230 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 3,843 | 2 | −387 | +1,71 | |

**Mangan.** (Fortsetzung.)

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde: parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde: senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2,730 | | +380 | −1,62 | |
| 4502,40 | 2,400 | | | 0 | 0 | |
| | | 2,070 | | −330 | +1,63 | |
| | | 9,415 | | +325 | −1,60 | |
| 4499,09 | 9,090 | | | 0 | 0 | |
| | | 8,765 | | −325 | +1,61 | |
| | | 0,664 | | +394 | −1,95 | |
| 4490,27 | 0,270 | | | 0 | 0 | Etwas schwach. |
| | | 9,875 | | −395 | +1,96 | |
| 4473,00 | | | | | | Nicht zerlegt und auch nicht verbreitert. |
| | | 0,609 | | +259 | −1,29 | |
| 4470,35 | 0,350 | | | 0 | 0 | |
| | | 0,090 | | −260 | +1,30 | |
| | | 5,164 | 2 | +294 | −1,47 | Die mittlere Komponente ist nicht ganz in der Mitte, sondern etwas nach Violett gelegen. |
| 4464,87 | 4,870 | | >1 | 0 | 0 | |
| | | 4,576 | 2 | −294 | +1,48 | |
| | | 2,502 | 4 | +272 | −1,36 | Übereinander gelagert |
| 4462,23 | 2,230 | | 0 | 0 | 0 | |
| | | 1,958 | 5 | −272 | +1,37 | |
| | | 1,621 | >2 | +321 | −1,61 | |
| 4461,30 | 1,300 | | 0 | 0 | 0 | |
| | | 0,978 | 2 | −322 | +1,62 | |
| | | 3,594 | | +404 | −2,03 | |
| 4453,19 | 3,190 | | | 0 | 0 | Etwas schwach. |
| | | 2,786 | | −404 | +2,04 | |
| | | 2,115 | 3 | +305 | −1,54 | |
| 4451,81 | 1,810 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 1,505 | 3 | −305 | +1,54 | |
| | | 6,837 | 2 | +317 | −1,61 | |
| 4436,52 | 6,520 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 6,202 | 2 | −318 | +1,62 | |

**Mangan.** (Fortsetzung.)

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde: parallel | senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 5,345 | 2 | +315 | −1,61 | |
| 4415,03 | 5,030 | | >1 | 0 | 0 | |
| | | 4,715 | 2 | −315 | +1,62 | |
| | | 1,609 | 3 | +289 | −1,57 | |
| 4281,32 | 1,320 | | 0 | 0 | 0 | |
| | | 1,031 | 3 | −289 | +1,58 | |
| | | 6,409 | | +289 | −1,57 | |
| | 6,281 | | | +161 | −0,89 | |
| 4266,12 | | | | | | Etwas schwach. |
| | 5,958 | | | −162 | +0,89 | |
| | | 5,831 | | −289 | +1,58 | |
| | 8,154 | | 3 | +294 | −1,62 | Schwach. Die durch Klammern zusammengefaßten Linienpaare liefen in eine Linie zusammen, wenn beide Arten von Schwingungen zugelassen waren. |
| 4257,86 | | 8,126 | | +266 | −1,47 | |
| | | 7,594 | 3 | −266 | +1,47 | |
| | 7,566 | | | −294 | +1,62 | |
| | | 5,672 | 5 | +242 | −1,29 | |
| 4235,43 | 5,430 | | 0 | 0 | 0 | |
| | | 5,188 | 5 | −242 | +1,30 | |
| | | 4,048 | 3 | +278 | −1,67 | Weil bei großer Feldstärke die nach Violett liegende Komponente von 4083,77 mit der nach Rot liegenden von 4083,11 koinzidiert, mußte der Effekt bei schwachem Felde gemessen und auf das Feld der anderen Linien extrapoliert werden. |
| 4083,77 | 3,770 | | <1 | 0 | 0 | |
| | | 3,491 | 3 | −279 | +1,67 | |
| | | 3,382 | 3 | +272 | −1,63 | |
| 4083,11 | 3,110 | | <1 | 0 | 0 | |
| | | 2,838 | 3 | −272 | +1,64 | |
| | | 9,673 | | +273 | −1,63 | |
| 4079,40 | 9,400 | | | 0 | 0 | |
| | | 9,126 | | −274 | +1,64 | |
| | | 1,068 | 1 | +598 | −3,61 | |
| 4070,47 | 0,470 | | <1 | 0 | 0 | Etwas schwach. |
| | | 9,871 | 1 | −599 | +3,61 | |

**Mangan.** (Fortsetzung.)

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde: parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde: senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4,014 | 3 | +294 | −1,78 | |
| 4063,72 | 3,720 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 3,425 | 3 | −295 | +1,79 | |
| | | 9,315 | | +205 | −1,24 | Auf einer Platte scheint es noch zwei Komponenten von etwa der doppelten Trennung der anderen zu geben, die aber zu schwach zu messen sind. |
| | 9,256 | | | +146 | −0,89 | |
| 4059,11 | | | | | | |
| | 8,965 | | | −145 | +0,88 | |
| | | 8,904 | | −206 | +1,25 | |
| | | 5,983 | 4 | +283 | −1,72 | Die mittlere Komponente ist nach Violett gelegen. |
| 4055,70 | 5,700 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 5,417 | 4 | −283 | +1,72 | |
| | | 9,151 | 2 | +261 | −1,59 | Die mittlere Komponente ist nach Violett gelegen. |
| 4048,89 | 8,890 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 8,629 | 3 | −261 | +1,60 | |
| | | 1,796 | 5 | +276 | −1,69 | Die mittlere Komponente ist nach Violett gelegen. |
| 4041,52 | 1,520 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 1,244 | 4 | −276 | +1,69 | |
| | | 6,146 | 4 | +266 | −1,63 | |
| 4035,88 | 5,880 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 5,614 | 2 | −266 | +1,64 | |
| | | 4,942 | 5 | +302 | −1,85 | |
| 4034,64 | 4,640 | | < 1 | 0 | 0 | Etwas diffus. |
| | | 4,338 | 5 | −302 | +1,85 | |
| | | 3,576 | 10 | +346 | −2,12 | |
| 4033,23 | 3,230 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 2,884 | 10 | −346 | +2,12 | |
| | | 1,166 | 10 | +246 | −1,51 | |
| 4030,92 | 0,920 | | 0 | 0 | 0 | Etwas diffus. |
| | | 9,674 | 10 | −246 | +1,52 | |

**Mangan. (Fortsetzung.)**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde: parallel | senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 8,567 | 4 | +257 | −1,59 | Die mittlere Komponente ist nach Violett gelegen. |
| 4018,31 | 8,310 | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 8,052 | 2 | −258 | +1,60 | |
| | | 3,829 | 3 | +179 | −1,22 | |
| 3823,65 | 3,650 | | 0 | 0 | 0 | |
| | | 3,472 | 3 | −178 | +1,22 | |
| | | 9,966 | 3 | +236 | −1,62 | |
| 3809,73 | 9,730 | | 0 | 0 | 0 | |
| | | 9,494 | 3 | −236 | +1,63 | |
| | | 7,090 | | +190 | −1,31 | |
| 3806,90 | 6,900 | | | 0 | 0 | |
| | | 6,709 | | −191 | +1,32 | |
| | | 0,585 | | +195 | −1,36 | |
| 3790,39 | 0,390 | | | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 0,194 | | −196 | +1,36 | |
| | | 0,753 | | +303 | −2,32 | |
| 3610,45 | 0,450 | | | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 0,147 | | −303 | +2,32 | |
| | | 8,869 | | +239 | −1,84 | Schwach, und nur auf senkrechten Platten erhalten. |
| 3608,63 | | | | | | |
| | | 8,390 | | −240 | +1,84 | |
| | | 7,937 | | +247 | −1,90 | Schwach, und nur auf senkrechten Platten erhalten. |
| 3607,69 | | | | | | |
| | | 7,442 | | −248 | +1,90 | |
| | | 8,211 | | +181 | −1,41 | |
| 3578,03 | 8,030 | | | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 7,849 | | −181 | +1,41 | |
| | | 2,361 | | +161 | −1,36 | Schwach, und nur auf senkrechten Platten erhalten. |
| 3442,20 | | | | | | |
| | | 2,038 | | −162 | +1,37 | |

Weil die Gruppen 4458,46, 4457,74, 4457,24 und 4456,00, 4455,51, 4455,20 sehr nahe beieinander sind, überlagern sich die verschiedenen Effekte derart, daß sie nicht mehr vermessen werden können.

Bei den Linien 4239,91 und 3844,19 ist eine Komponente, die senkrecht zu den Kraftlinien schwingt, und ein sehr enges Duplet parallel zu denselben, doch kann dieses nicht vermessen werden, weil es zu lichtschwach ist.

**Chrom.**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde | | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | parallel | senkrecht | | | | |
| | | 8,978 | 3 | +378 | −1,39 | |
| 5208,60 | 8,600 | | 6 | 0 | 0 | |
| | | 8,222 | 3 | −378 | +1,40 | |
| | | 6,764 | 2 | +564 | −2,08 | |
| 5206,20 | 6,200 | | 4 | 0 | 0 | |
| | | 5,635 | 2 | −565 | +2,09 | |
| | | 5,215 | 2 | +505 | −1,87 | |
| 5204,71 | 4,710 | | 4 | 0 | 0 | |
| | | 4,205 | 2 | −505 | +1,86 | |
| | | 2,562 | 1 | +262 | −1,21 | |
| 4652,30 | 2,300 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 2,039 | 1 | −261 | +1,21 | |
| | | 6,583 | 1 | +283 | −1,31 | |
| 4646,30 | 6,300 | | 3 | 0 | 0 | |
| | | 6,017 | 1 | −283 | +1,31 | |
| | | 6,763 | 1 | +463 | −2,16 | |
| | 6,534 | | 1 | +234 | −1,09 | |
| 4626,30 | | | | | | |
| | 6,065 | | 1 | −235 | +1,10 | |
| | | 5,836 | 1 | −464 | +2,17 | |

**Chrom. (Fortsetzung.)**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6,695 | 1 | +395 | −1,85 | |
| | 6,430 | | 1 | +130 | −0,61 | |
| 4616,30 | | | | | | |
| | 6,171 | | 1 | −129 | +0,60 | |
| | | 5,904 | 1 | −396 | +1,86 | |
| | | 1,281 | 1 | +361 | −1,70 | |
| 4600,92 | 0,920 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 0,558 | 1 | −362 | +1,71 | |
| | | 2,026 | | +436 | −2,07 | |
| 4591,59 | 1,590 | | | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 1,153 | | −437 | +2,07 | |
| | | 0,615 | | +375 | −1,79 | |
| 4580,24 | 0,240 | | | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 9,864 | | −376 | +1,79 | |
| | | 6,558 | 1 | +428 | −2,07 | |
| 4546,13 | 6,130 | | 3 | 0 | 0 | |
| | | 5,703 | 1 | −427 | +2,07 | |
| 4535,9 | | | | | | Triplet, aber die seitliche ] ponente nach Rot is schwach, daß sie nicl messen ist. |
| 4530,9 | | | 6 | | | Unscharf. Nicht zerlegt. |
| | | 6,949 | 1 | +299 | −1,46 | |
| 4526,65 | 6,650 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 6,351 | 1 | −299 | +1,46 | |
| | | 7,311 | 2 | +281 | −1,39 | |
| 4497,03 | 7,030 | | 4 | 0 | 0 | |
| | | 6,750 | 2 | −280 | +1,38 | |
| | | 5,437 | 2 | +297 | −1,55 | |
| 4385,14 | 5,140 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 4,842 | 2 | −298 | +1,55 | |

**Chrom.** (Fortsetzung.)

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1,739 | | +279 | −1,46 | |
| 4371,46 | 1,460 | | | 0 | 0 | |
| | | 1,181 | | −279 | +1,46 | |
| | | 0,059 | | +259 | −1,36 | |
| | 9,982 | | | +182 | −0,96 | |
| 4359,80 | | | | | | Diffus. |
| | 9,617 | | | −183 | +0,96 | |
| | | 9,542 | | −258 | +1,36 | |
| | | 2,215 | 2 | +245 | −1,29 | |
| 4351,97 | 1,970 | | 5 | 0 | 0 | |
| | | 1,725 | 2 | −245 | +1,30 | |
| | | 1,387 | | +167 | −0,88 | |
| 4351,22 | 1,220 | | | 0 | 0 | |
| | | 1,052 | | −168 | +0,89 | |
| | | 4,917 | 2 | +227 | −1,20 | |
| 4344,69 | 4,690 | | 4 | 0 | 0 | |
| | | 4,463 | 2 | −227 | +1,21 | |
| | | 9,813 | | +213 | −1,13 | Die seitliche Komponente nach |
| 4339,60 | 9,600 | | | 0 | 0 | Rot ist etwas stärker als die |
| | | 9,387 | | −213 | +1,13 | andere. |
| | | 0,238 | 10 | +348 | −1,89 | |
| 4289,89 | 9,890 | | 20 | 0 | 0 | |
| | | 9,542 | 10 | −348 | +1,89 | |
| | | 5,346 | 10 | +396 | −2,17 | |
| 4274,95 | 4,950 | | 20 | 0 | 0 | |
| | | 4,555 | 10 | −395 | +2,16 | |
| | | 4,796 | 15 | +296 | −1,64 | |
| 4254,50 | 4,500 | | 30 | 0 | 0 | |
| | | 4,203 | 15 | −297 | +1,64 | |

**Chrom. (Fortsetzung.)**

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde: parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde: senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3984,09 | | | | | | Nicht zerlegt und auch nicht verbreitert. |
| | | 7,145 | 2 | +315 | −1,99 | |
| | 7,012 | | 2 | +182 | −1,15 | |
| 3976,88 | | | | | | |
| | 6,648 | | 2 | −182 | +1,15 | |
| | | 6,515 | 2 | −315 | +1,99 | |
| | 0,050 | | | +130 | −0,82 | Wenn die parallelen Schwingungen unterdrückt sind, scheint es nur eine senkrechte Komponente zu geben. Sie ist etwas von einer schwachen Linie überdeckt. |
| 3969,92 | | 9,920 | | 0 | 0 | |
| | 9,790 | | | −130 | +0,83 | |
| | | 4,078 | 2 | +198 | −1,26 | Wenn die senkrechten Schwingungen unterdrückt sind, gibt es nur eine einzige Komponente, aber mit beiden Polarisationszuständen: es scheint als ob es ein Quadruplet sei. Ich halte es für eine Umkehrung der mittleren Komponente. |
| 3963,88 | 3,880 | | 4 | 0 | 0 | |
| | | 3,682 | 2 | −198 | +1,26 | |
| | | 1,924 | | +264 | −1,20 | |
| 3941,66 | 1,660 | | | 0 | 0 | |
| | | 1,396 | | −264 | +1,20 | |
| | | 9,057 | | +257 | −1,66 | |
| 3928,80 | 8,800 | | | 0 | 0 | |
| | | 8,543 | | −257 | +1,67 | |
| | | 1,456 | | +256 | −1,67 | |
| 3921,20 | 1,200 | | | 0 | 0 | |
| | | 0,943 | | −257 | +1,67 | |
| | | 9,613 | 2 | +253 | −1,14 | |
| 3919,36 | 9,360 | | 4 | 0 | 0 | |
| | | 9,107 | 2 | −253 | +1,15 | |

**Chrom.** (Fortsetzung.)

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde: parallel | Wellenlängen im magnetischen Felde: senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6,623 | | +218 | −1,39 | |
| 3916,41 | 6,410 | | | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 6,197 | | −218 | +1,39 | |
| | | 9,160 | 1 | +250 | −1,63 | |
| 3908,91 | 8,910 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 8,660 | 1 | −250 | +1,64 | |
| | | 3,358 | 1 | +268 | −1,76 | |
| 3903,09 | 3,090 | | 2 | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 2,822 | 1 | −268 | +1,76 | |
| | | 4,470 | 1 | +260 | −1,71 | |
| 3894,21 | 4,210 | | 2 | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 3,950 | 1 | −260 | +1,72 | |
| | | 7,220 | 1 | +250 | −1,65 | |
| 3886,97 | 6,970 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 6,721 | 1 | −249 | +1,65 | |
| | | 5,640 | 1 | +250 | −1,66 | |
| 3885,39 | 5,390 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 5,139 | 1 | −251 | +1,66 | |
| | | 3,732 | 1 | +252 | −1,67 | |
| 3883,48 | 3,480 | | 2 | 0 | 0 | |
| | | 3,227 | 1 | −253 | +1,68 | |
| | | 5,241 | | +241 | −1,66 | |
| 3805,00 | 5,000 | | | 0 | 0 | |
| | | 4,759 | | −241 | +1,67 | |
| | | 4,269 | | +209 | −1,46 | |
| 3744,06 | 4,060 | | | 0 | 0 | |
| | | 3,850 | | −210 | +1,46 | |

Chrom. (Fortsetzung.)

| Ungestörte Wellenlänge | Wellenlängen im magnetischen Felde parallel | senkrecht | Intensität | $\Delta\lambda$ | $-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 5,726 | 5 | +246 | −1,89 | |
| 3605,48 | 5,480 | | 10 | 0 | 0 | |
| | | 5,234 | 5 | −246 | +1,90 | |
| | | 3,908 | 5 | +278 | −2,15 | |
| 3593,63 | 3,630 | | 10 | 0 | 0 | |
| | | 3,353 | 5 | −277 | +2,15 | |
| | | 9,016 | 5 | +206 | −1,61 | |
| 3578,81 | 8,810 | | 10 | 0 | 0 | |
| | | 8,603 | 5 | −207 | +1,61 | |
| | | 1,518 | | +188 | −1,60 | Schwach. Nur die senkrec |
| 3421,33 | | | | | | Schwingungen sind erh |
| | | 1,142 | | −188 | +1,61 | worden. |
| | | 3,688 | | +198 | −1,71 | |
| 3403,49 | 3,490 | | | 0 | 0 | Schwach. |
| | | 3,292 | | −198 | +1,71 | |

Cr 3991,3 und 4337,75 sind verbreitert, aber nicht g getrennt.

Ein Vergleich der Linien I (Fig. 5) bei den Elementen Ca, Sr, Zn, Cd und Hg zeigt, daß innerhalb der Fehlergr der Effekt zwar bei Ca, Sr, Zn und Cd genau gleich dagegen Mg einen durchaus verschiedenen Typus aufw Was die Hg-Linie 3650,31 betrifft, ist die Übereinstimm zweifelhaft. Die Abweichung der Schwingungsdifferenz äußersten Komponenten kann wohl durch Messungsfehler erk werden, und es ist, wie Runge und Paschen selbst merken, nicht ausgeschlossen, daß die Trennung der mittl Komponenten nur auf einer Umkehrung beruht. Jedenfalls sagt die zweite Regel von Preston bei diesen Linien. den ersten Satelliten der Linien I, d. i. der zunächst bei

Linie I liegende Satellit, ist eine Übereinstimmung bei Ca, Zn und Cd vorhanden, aber Hg zeigt einen ganz anderen Effekt. Leider hat der Sr-Satellit nicht beobachtet werden können. Der zweite Satellit ist nur im Falle von Cd beobachtet worden, zeigt aber auch keine Ähnlichkeit mit irgend einem der Hg-Satelliten. Die Linien I und deren Satelliten zeigen bei Ca, Sr, Zn und Cd eine viel einfachere Zerlegung als

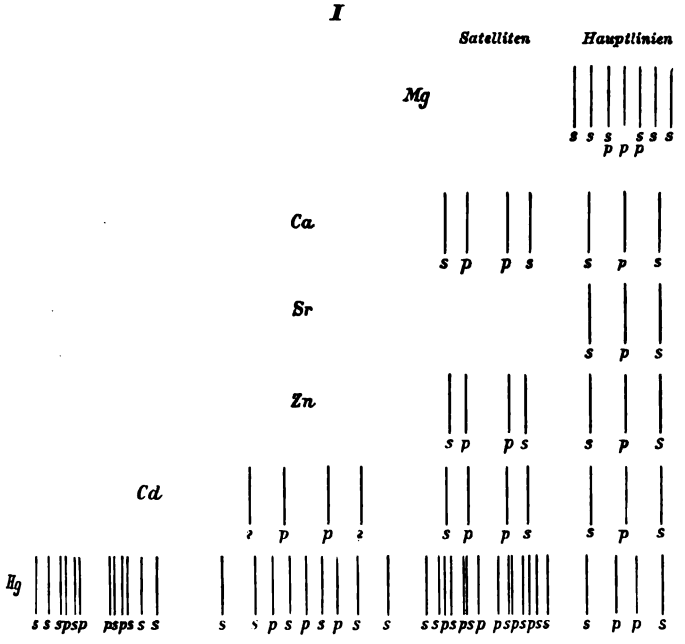



Fig. 5.

bei Mg und Hg. Bei den Linien II haben wir wiederum eine Übereinstimmung bei Ca, Sr, Zn und Cd, aber Mg und Hg zeigen ganz andere Effekte, die auch nicht untereinander übereinstimmen. Wir haben also nochmals ein Versagen der Prestonschen Regel. Die Satelliten dieser Linien II zeigen eine merkwürdige Verschiedenheit: Ca und Zn stimmen miteinander überein, und Cd und Hg untereinander auch. Freilich sind die äußersten Komponenten bei Cd nicht beobachtet worden, aber, weil diese sehr lichtschwach sind, ist es nicht unwahrscheinlich, daß die Zerlegung dieselbe ist. Der Satellit

von Sr hat einen von diesen beiden nochmals abweichenden Effekt.

Bei den Linien III kommt dieselbe Zerlegung bei Ca, Zn und Cd vor; Mg, Sr und Hg bilden eine Ausnahme. Die

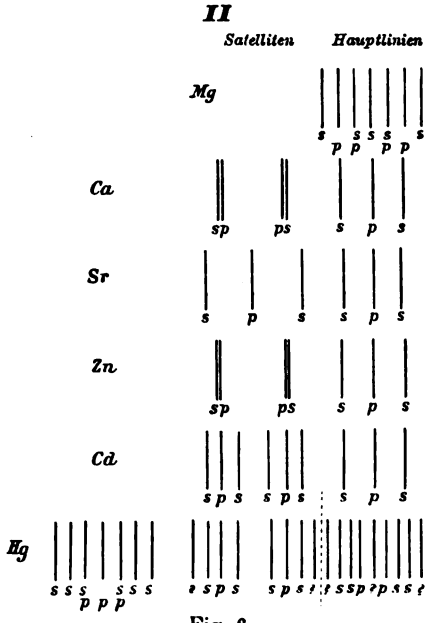



Fig. 6.

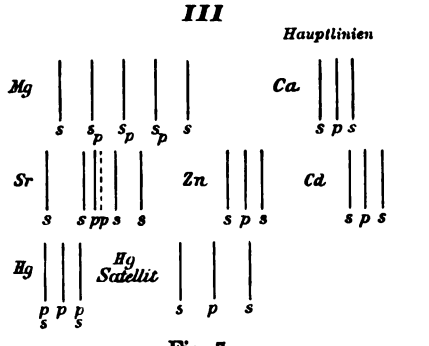



Fig. 7.

Größe der Zerlegung der Hg-Linie III ist innerhalb der Fehlergrenze dieselbe wie bei Ca, Zn und Cd, aber die Polarisationszustände der Komponenten sind ganz anders. Es ist sehr auffallend bei diesen Linien, daß, während die Zerlegungen bei Ca, Zn und Cd sehr klein sind, die Zerlegung bei Mg besonders groß ist. Die Resultate zeigen also, daß die Regel für die Hauptlinien (Linien I, II, III) der Elemente Ca, Zn und Cd und vielleicht Sr gilt, aber die Mg- und Hg-Linien gar nicht im Einklang damit stehen. Es ist bemerkenswert, daß die Mg-Linie I ganz genau dieselbe Zerlegung zeigt, wie der letzte Satellit der Linie II von Quecksilber, nur daß die mittlere Komponente der Mg-Linie die größte, aber die von Hg die kleinste Intensität hat. Der Typus der Mg-Linie II 3832,46 scheint mir neu zu sein, und vermehrt die Anzahl dieser merkwürdigen Fälle, wo eine Schwingung senkrecht zu den Kraft-

linien ungestört bleibt. Den Typus der Mg-Linie 3829,51 teilt Preston[1]) für die Bariumlinie 3850 mit.

Eine Durchmusterung der Zahlen zeigt, daß dieselbe Schwingungsdifferenz und mehrfache davon sehr häufig vorkommen. Bei den Mg-Linien I und II und allen Linien III von Ca, Sr, Zn und Cd sind die Intervalle zwischen den einzelnen Komponenten gleich, und zwar 0,53. Bei der Mg-Linie III haben wir ebenfalls gleiche Abstände, und zwar das Doppelte der anderen Linien. Die Linien II von Ca, Sr, Zn und Cd verhalten sich, wenigstens angenähert, ebenso. Die Sr-Linie 4876,35 zeigt das Dreifache dieses Abstandes 0,53 und die Abstände der Komponenten des Sextuplets Cd 3467,76 und Hg 3131,66 von der Mitte sind das Ein-, Zwei- und Dreifache von 0,53.

Bei den Mn- und Cr-Linien sieht man, daß nur Triplets und Quadruplets vorhanden sind. Sehr auffallend bei den Mn-Linien ist die Anzahl der Linien, die Asymmetrien zeigen, und zwar, wo eine Verschiedenheit der Intensitäten vorkommt, ist die stärkere Komponente manchmal nach rot, manchmal nach violett. Bei den Mn-Linien ist auch die mittlere Komponente immer bedeutend schwächer als die seitlichen. Wegen dieser geringen Intensität ist die relative Lage der mittleren Komponente nicht gemessen worden. Bei einer Anzahl Triplets ist die innere Komponente nicht ganz in der Mitte, und zwar immer nach der Seite der kleineren Wellenlängen gelegen.

Sowohl bei Mn als auch bei Cr kommen dieselben Schwingungsdifferenzen häufig vor. Besonders auffallend ist dies bei den für Cr charakteristischen Linien

| $\lambda$ | $\delta\lambda/\lambda^2$ |
|---|---|
| 5206,20 | 2,09 |
| 4274,95 | 2,17 |
| 3593,63 | 2,15 |
| 5204,71 | 1,87 |
| 4289,89 | 1,89 |
| 3605,48 | 1,89 |
| 4254,50 | 1,64 |
| 3578,81 | 1,61 |

Bei Mn haben wir am häufigsten die Schwingungsdifferenz von ca. 1,63.

1) T. H. Preston, Nature 59. p. 224. 1899.

### Zusammenfassung der Resultate.

I. Ein Vergleich der Zeemaneffekte in den ersten Nebenserien von Mg, Ca, Sr, Zn, Cd und Hg hat gezeigt, daß die Prestonsche Regel nur in einzelnen Fällen gilt.

II. Der Typus der Mg-Sextuplets 3832,46 ist neu und dadurch besonders auffallend, daß die mittlere Komponente senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien polarisiert ist.

III. Der Zeemaneffekt an Mn und Cr ist zum erstenmal untersucht, und zwar wurden lauter Triplets und Quadruplets beobachtet, bei denen gewisse Schwingungsdifferenzen sich häufig wiederholen.

IV. Bei einer Anzahl von Mn-Linien wurde eine unzweifelhafte Asymmetrie der Lage und Intensitäten gefunden.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Geheimrat Prof. Dr. W. Voigt und Hrn. Prof. Dr. Runge im Physikalischen Institut zu Göttingen ausgeführt. An dieser Stelle möchte ich diesen, meinen verehrten Lehrern, für die unschätzbare Hilfe und das lebhafte Interesse, das sie meiner Arbeit geschenkt haben, meinen herzlichsten Dank aussprechen.

### Nachtrag.

In der Physik. Zeitschrift 8. 15. April weist Hr. Prof. Runge darauf hin, daß die bisher beobachteten komplizierten Zerlegungen von Spektrallinien im magnetischen Felde die folgende Eigentümlichkeit zeigen: Die Abstände der Komponenten von der Mitte sind Vielfache eines aliquoten Teiles des normalen Abstandes

$$a = \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{H}{4\pi c} \cdot \frac{e}{m}.$$

Die von mir untersuchten Zerlegungen sind nicht besonders günstig zur Verifikation dieser Verhältnisse, erstens weil sie meistenteils nicht kompliziert genug sind, die Verhältnisse ganz eindeutig festzustellen, und zweitens weil die Messungen in einzelnen Fällen wegen der Schwierigkeiten der Untersuchungen vielleicht nicht die allerhöchste Genauigkei

itzen; doch ist es interessant zu bemerken, daß bei den sten Zerlegungen, auch bei den Triplets, diese einfachen hältnisse existieren.

Ich habe in einer Tabelle diese Verhältnisse für die komierteren Zerlegungen und für einige wenige Triplets angeben. Bei den Linien Ca 4435,86, Zn 3303,03 liegen die mponenten zu nahe beieinander, um den Bruchteil von „$a$" ıer zu bestimmen. Ich habe das für Mn charakteristische plet 4502,4 und die für Cr charakteristischen Triplets 39,9; 4274,9; 4254,5 hinzugefügt. Nach dem Prestonen Gesetze sollte die Zerlegung von Zn 3445,62 identisch t der von Cd 3613,0 und Ca 4456,1 sein; die Bemerkung in r obigen Tabelle der Zn-Linien kann wohl die Abweichung klären.

$a = 1{,}08$.

| Wellenlänge | $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2}$ cm$^{-1}$ | | Abweichung |
|---|---|---|---|
| Sr 4832,23 | 1,59 $s$ | 1,62 = 3 $a/2$ | 0,03 |
| | 0,53 $s$ | 0,54 = $a/2$ | 0,01 |
| | 0 $p$ | | |
| Mg 3838,44 | 1,595 $s$ | 1,62 = 3 $a/2$ | 0,025 |
| | 1,05 $s$ | 1,08 = 2 $a/2$ | 0,03 |
| | 0,54 $sp$ | 0,54 = $a/2$ | 0,00 |
| | 0 $p$ | | |
| Mg 3832,46 | 1,62 $s$ | 1,62 = 3 $a/2$ | 0,00 |
| | 1,075 $p$ | 1,08 = 2 $a/2$ | 0,005 |
| | 0,51 $sp$ | 0,54 = $a/2$ | 0,03 |
| | 0 $s$ | | |
| Mg 3829,51 | 2,075 $s$ | 2,16 = 2 $a$ | 0,085 |
| | 1,07 $sp$ | 1,08 = $a$ | 0,01 |
| | 0 $sp$ | | |
| Cd 3467,76 | 1,57 $s$ | 1,62 = 3 $a/2$ | 0,05 |
| | 1,06 $p$ | 1,08 = 2 $a/2$ | 0,02 |
| | 0,52 $s$ | 0,54 = $a/2$ | 0,02 |
| Cd 3613,04 | 1,37 $s$ | 1,35 = 10 $a/8$ | 0,02 |
| | 0,67 $p$ | 0,675 = 5 $a/8$ | 0,005 |
| Ca 4456,08 | 1,39 $s$ | 1,35 = 10 $a/8$ | 0,04 |
| | 0,66 $p$ | 0,675 = 5 $a/8$ | 0,015 |

| Wellenlänge | $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2}$ cm$^{-1}$ | | Abweichung |
|---|---|---|---|
| Zn | 1,23 *s* | 1,35 = 10 *a*/8 | 0,12 |
| 3345,62 | 0,74 *p* | 0,675 = 5 *a*/8 | 0,065 |
| | | 1,20 = 10 *a*/9 | 0,03 |
| | | 0,72 = 6 *a*/9 | 0,02 |
| Cd | 1,885 | 1,80 = 5 *a*/3 | 0,085 |
| 3614,58 | 0,755 *p* | 0,72 = 2 *a*/3 | 0,035 |
| Mn | 1,245 *s* | 1,26 = 7 *a*/6 | 0,015 |
| 4059,11 | 0,885 *p* | 0,90 = 5 *a*/6 | 0,015 |
| | | 1,234 = 8 *a*/7 | 0,011 |
| | | 0,926 = 6 *a*/7 | 0,041 |
| Cr | 2,165 *s* | 2,16 = 2 *a* | 0,005 |
| 4626,30 | 1,095 *p* | 1,08 = *a* | 0,015 |
| Cr | 1,855 *s* | 1,851 = 12 *a*/7 | 0,004 |
| 4616,30 | 0,605 *p* | 0,617 = 4 *a*/7 | 0,012 |
| Cr | 1,36 *s* | 1,35 = 10 *a*/8 | 0,01 |
| 4359,80 | 0,96 *p* | 0,945 = 7 *a*/8 | 0,015 |
| | | 1,32 = 11 *a*/9 | 0,04 |
| | | 0,96 = 8 *a*/9 | 0,00 |
| Cr | 1,99 *s* | 2,16 = 2 *a* | 0,17 |
| 3976,83 | 1,15 *p* | 1,08 = *a* | 0,07 |
| Mn | 1,625 *s* | 1,62 = 3 *a*/2 | 0,005 |
| 4502,40 | 0 *p* | | |
| Cr | 1,89 *s* | 1,89 = 7 *a*/4 | 0,00 |
| 4289,89 | 0 *p* | | |
| Cr | 2,165 *s* | 2,16 = 2 *a* | 0,005 |
| 4274,95 | 0 *p* | | |
| Cr | 1,64 *s* | 1,62 = 3 *a*/2 | 0,02 |
| 4254,50 | 0 *p* | | |

(Eingegangen 9. August 1907.)

# 8. *Der Fizeausche Versuch über die Änderung des Polarisationsazimuts eines gebrochenen Strahles durch die Bewegung der Erde;* von *B. Strasser.*

Die Versuche, welche angestellt wurden, einen Einfluß der Erdbewegung auf die auf der Erde zu beobachtenden optischen Erscheinungen nachzuweisen, haben bisher zu einem negativen Ergebnis geführt. Nur Fizeau[1]) gibt an, in einem Falle einen solchen Einfluß beobachtet zu haben. Ließ er einen polarisierten Lichtstrahl durch eine Reihe von geneigten Glasplatten fallen, so beobachtete er eine Änderung der Drehung der Polarisationsebene, je nachdem sich der Strahl in der Richtung der Erdbewegung oder gegen dieselbe fortpflanzte.

Der Versuch von Fizeau steht im Widerspruch mit der Theorie der Elektrodynamik für bewegte Körper, und es erschien daher wünschenswert[2]), das Experiment von Fizeau unter möglichst den gleichen Bedingungen zu wiederholen.

Während ich mit den vorbereitenden Messungen beschäftigt war, erschien eine Arbeit von Brace[3]), in welcher ebenfalls die Fizeauschen Untersuchungen wiederholt und geprüft wurden.

Brace benutzte in einer gegenüber Fizeau etwas veränderter Anordnung zur Drehung der Polarisationsebene des Lichtes vier Glasplatten; hierbei sollte sich nach der Anschauung von Fizeau durch die Bewegung der Erde eine Drehungsdifferenz von 0,024° ergeben. Brace konnte indessen einen solchen Einfluß nicht nachweisen; denn er erhielt als Mittelwert aus seinen

1) Fizeau, Ann. de chim. et phys. (3) 58. p. 129.

2) Vgl. z. B. W. Wien, Referat für die 70. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Düsseldorf 1898; P. Drude, Lehrbuch der Optik, II. Aufl. p. 463. 1906.

3) B. Brace, Phil. Mag. (6) 10. p. 591. 1905.

Beobachtungen eine Drehungsänderung von nur 0,003°. Die größten Abweichungen von seinem Mittelwert betrugen +0,014° und −0,018°. Der infolge der Erdbewegung zu erwartende Effekt von +0,024° liegt mithin trotz der sehr sorgfältigen Messungen von Brace nicht sehr weit von den Beobachtungsfehlern entfernt. Da ich bei meiner Anordnung eine größere Genauigkeit zu erreichen hoffte, hielt ich es trotz der Arbeit von Brace für nützlich, meine Versuche fortzusetzen.

Das Prinzip des Versuches von Fizeau ist kurz folgendes:

Geht zur Mittagszeit ein Lichtstrahl in der Richtung von West nach Ost durch eine Reihe von geneigten Glasplatten, so bewegen sich diese infolge der Bewegung der Erde um die Sonne in einer der Fortpflanzung des Lichtstrahles entgegengesetzten Richtung, die Geschwindigkeit des Lichtes muß nach Fizeau verzögert sein, während das Brechungsverhältnis der Luft zum Glase, und ebenso die Drehung der Polarisationsebene vergrößert werden. Hat hingegen der Lichtstrahl die Richtung von Ost nach West, so ist die Drehung der Polarisationsebene kleiner. Wie die Rechnung unter Zugrundelegung des Fresnelschen Mitführungskoeffizienten ergibt, soll die Drehungsdifferenz in den beiden entgegengesetzten Richtungen nahezu $^1/_{1500}$ der Gesamtdrehung betragen.

Benutzt man eine einzige Glasplatte mit dem Brechungsexponenten $n = 1{,}530$, auf welche der Strahl unter einem Winkel von ungefähr 70° bei einem Polarisationsazimut von ca. 20° auffällt, so erleidet die Polarisationsebene des gebrochenen Strahles eine Drehung von 6° 40′. Der wahrscheinliche Effekt der Erdbewegung wird demnach $^1/_{1500} \cdot 6°\,40' = 16''$ betragen. Diese Größe ist offenbar zu klein, um genau beobachtet werden zu können. Indessen gelang es Fizeau, durch Vermehrung der Platten und besonders durch geeignete Aufstellung derselben den Effekt von 16″ stark zu vergrößern. Das Prinzip seines Verfahrens ist durch die folgende Betrachtung gegeben.

Von Fresnel ist für den Durchgang eines geradlinig polarisierten Strahles durch eine Glasplatte für *eine* Oberfläche die Gleichung aufgestellt worden:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{1}{\cos(\varphi - \psi)} \cdot \operatorname{tg}\alpha_1 .$$

Hierin ist $\varphi$ der Einfallswinkel, $\psi$ der Brechungswinkel, $\alpha_1$ und $\beta_1$ die Polarisationsazimute des einfallenden und des gebrochenen Strahles. Für eine zweite parallele Fläche ist

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{1}{\cos(\varphi - \psi)} \cdot \operatorname{tg}\alpha_2$$

und da $\alpha_2 = \beta_1$ ist, erhält man

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{1}{\cos^2(\varphi - \psi)} \cdot \operatorname{tg}\alpha_1 .$$

Bei $n$ parallelen Flächen ist

$$\operatorname{tg}\beta_n = \frac{1}{\cos^n(\varphi - \psi)} \cdot \operatorname{tg}\alpha . \tag{2}$$

Berechnet man nach dieser Formel für einen bestimmten Einfallswinkel die zu verschiedenen Werten von $\alpha$ gehörigen Größen von $\beta_n$, so findet man, daß bei kleinen Werten von $\alpha$ eine geringe Veränderung $\Delta\alpha$ eine größere Änderung $\Delta\beta_n$ zur Folge hat. Beträgt z. B. bei einem Glassatz von vier Platten der Einfallswinkel $i = 70^0$ und das Polarisationsazimut des einfallenden Strahles $\alpha = 5^0$, so veranlaßt eine Änderung dieses Azimuts um $\Delta\alpha$ eine Drehungsänderung der Endebene um $\Delta\beta_n = 3{,}2\,.\,\Delta\alpha$. Eine Veränderung in der Lage der ursprünglichen Ebene wird also unter diesen Umständen verdreifacht.

Wendet man noch mehrere solcher Glassätze an, so wachsen die Vergrößerungen in geometrischer Progression. Man würde schließlich zu Werten des Effektes gelangen, welche sich leicht nachweisen ließen. Eine experimentelle Schwierigkeit liegt indessen darin, daß die Glasplatten selbst schwach doppelbrechend sind, die lineare Polarisation des Lichtstrahles also in elliptische verwandelt wird. Bei einer Glasplatte ist die elliptische Polarisation kaum merkbar, sie nimmt aber bei Vermehrung der Platten zu. Man kann, wie es auch Fizeau tat, die vorhandene elliptische Polarisation dadurch kompensieren, daß man Glasplatten hinzufügt, denen man eine geringere Neigung und entgegengesetztes Azimut gibt. Da diese kompensierenden Glasplatten eine schwächere und entgegengesetzte Drehung als die anderen Gläser hervorbringen, so wird die Gesamtdrehung nur etwas verringert, während die elliptische Polarisation soweit kompensiert wird, daß sich hinreichend empfindliche Einstellungen ermöglichen lassen.

Die benutzten Glasplatten waren rechteckig, ca. 50 mm lang, 20 mm breit und 3 mm dick. Sie waren nicht planparallel, sondern schwach prismatisch; der Winkel der einzelnen Platten lag zwischen 10′ und 40′. Es war auf diese Weise möglich, den durchgehenden Strahl von den an den Flächen reflektierten Strahlen zu trennen. Die Gläser waren zu zwei bis vier in kleinen Zinkkästen vereinigt und so ausgewählt und angeordnet, daß der direkte Strahl bei seinem Durchgang durch die Gläser aus dem Gesichtsfeld nicht herausgelenkt wurde. Im ganzen wurden 14 Platten verwandt, welche zwischen dem Polarisator und Analysator eines großen Halbschattenapparates von der Firma Schmidt & Haensch unter einer Neigung von ungefähr 70° und einem Azimut von 5—20° befestigt waren.

Ich erhielt durch die Glasplatten bei 18facher Vergrößerung von $\Delta\alpha$ [$\Delta\beta = 18\,\Delta\alpha$] eine Gesamtdrehung von ungefähr 50°, so daß der zu erwartende Effekt beträgt: $^1/_{1500} \cdot 50° \cdot 18 = 0{,}60°$.

Es erschien angebracht zu prüfen, ob meine Anordnung empfindlich genug war, um den oben angegebenen Einfluß der Erdbewegung experimentell feststellen zu können. Zu dem Zwecke wurde absichtlich eine kleine Änderung des Brechungsverhältnisses $n_{12}$ der Luft zum Glase herbeigeführt und beobachtet, um wieviel dabei die Polarisationsebene gedreht wurde.

Um das zu erreichen, wurde die die Glasplatten umgebende Luft durch ein Gas von etwas größerem Brechungsexponenten ersetzt. Die Glasplatten waren von einem allseitig geschlossenen Zinkkasten umgeben, welcher an zwei gegenüberliegenden Seiten Glasfenster für den Durchgang des Lichtes hatte. Durch zwei in den Kasten eingekittete Röhren konnte statt der Luft ein anderes Gas eingeleitet werden, dessen Brechungsexponent ungefähr $^1/_{1500}$ größer als derjenige der Luft war. Ich verwandte ein Gemisch von Ätherdampf ($n = 1{,}00152$) und Luft. Ein Luftstrom wurde langsam durch Äthyläther geblasen, dessen Temperatur etwas höher als die der Umgebung war. Die Luft, welche hierbei reichliche Mengen Ätherdampf aufnahm, wurde darauf durch eine Kühlvorrichtung auf eine bestimmte Temperatur $t$ abgekühlt, so daß ein Teil des Ätherdampfes sich wieder kondensierte, und die Luft mit Äther gesättigt war. Das Gemisch gelangte in den Zinkkasten und

verdrängte allmählich die darinnen befindliche Luft. Die Temperatur in dem Kasten war etwas höher als $t$, um zu verhindern, daß ein Teil des Ätherdampfes sich wieder kondensierte. Durch Verändern der Temperatur $t$ konnten im Zinkkasten beliebige Zusammensetzungen von Luft und Dampf hergestellt, das Brechungsverhältnis, und somit die Drehung der Polarisationsebene um die gewünschten kleinen Beträge variiert werden.

Die Drehungsänderungen, welche auf diese Weise erhalten werden, lassen sich auch rechnerisch bestimmen. Für Gasgemische ist die brechende Kraft gleich der Summe der brechenden Kräfte der einzelnen Bestandteile. Da der Sättigungsdruck von Äthyläther z. B. bei 20° 442 mm beträgt, wird die Zusammensetzung der Luft und des Ätherdampfes sich wie

$$\frac{760 - 442}{442} = \frac{318}{442}$$

verhalten. Für das Gemisch ist daher

$$n - 1 = \frac{318}{760} \cdot 0{,}000294 + \frac{442}{760} \cdot 0{,}0015 = 0{,}000995 .$$

Mithin beträgt die Änderung des Brechungsexponenten

$$1{,}000995 - 1{,}000294 = 0{,}000701 ,$$

daher die Drehungsänderung

$$53{,}8^{\circ} . 18 . 0{,}000701 = 0{,}68^{\circ}$$

bei einer Gesamtdrehung von 53,8° und 18facher Vergrößerung.

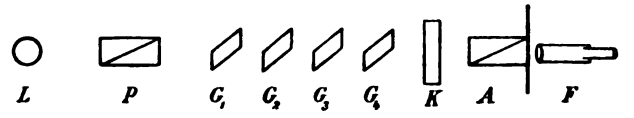
Die folgende Tabelle gibt die erhaltenen Resultate:

| Temp. $t$ | Drehung bei Luft | Drehung beim Gemisch | Drehungsänderung beobachtet | Drehungsänderung berechnet |
|---|---|---|---|---|
| 10° | 53,78° | 53,42° | 0,36° | 0,45° |
| 20 | 53,80 | 53,14 | 0,66 | 0,68 |
| 28 | 53,80 | 52,93 | 0,87 | 0,93 |

Da es schwierig ist, die Temperaturen für längere Zeit konstant zu halten, kann die Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Werte immerhin genügen. Die Messungen zeigen, daß durch die Anordnung sich Änderungen des Brechungsverhältnisses wohl nachweisen lassen von der

Größenordnung, wie sie durch die Erdbewegung verursacht sein könnten.

Anfangs versuchte ich, die Beobachtungen so anzustellen, daß bei *fester Aufstellung* des Apparates die Einstellungen mittags um 12 Uhr und nach 12 Stunden gemacht wurden. Es zeigten sich aber hierbei bedeutende Schwankungen mit der Zeit in der Größe der Drehungen, welche vermutlich durch Erschütterungen, oder durch Temperaturschwankungen verursacht waren, so daß ich die Beobachtungen *unmittelbar* hintereinander anstellte. Der Tisch, auf dem der Apparat aufgestellt war, wurde an Stahlsaiten um eine vertikale Achse leicht drehbar aufgehängt; die Messungen konnten dadurch in kurzer Zeit ausgeführt werden, indem der Apparat *mit der Lichtquelle* um 180° gedreht wurde. Es gelang so, jede äußere Störung zu ver-




meiden. Die Anordnung ist aus der Figur ersichtlich. Darin ist $L$ die Lichtquelle, $P$ der Polarisator. $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ sind die Glassätze, $K$ ist ein Kompensator nach Soleil-Babinet, auf dessen Anwendung ich später noch zurückkomme, $A$ der Analysator mit Teilkreis und $F$ ein Fernrohr.

Es ist ferner nötig, daß bei den Beobachtungen die Lichtquelle stets in unveränderter Stellung zum Apparat gelassen wurde. Eine Verschiebung der Lichtquelle hatte stets eine wenn auch nur geringe Änderung der Einstellung zur Folge. Auch Fizeau, der für die doppelte Beobachtung je einen Spiegel im Osten und im Westen vom Apparat aufgestellt hatte, um Sonnenlicht auf den Apparat reflektieren zu lassen, gibt an, daß die Spiegel selbst in merklicher Weise die Beobachtungen beeinflußten. Es ist immerhin möglich, daß die Drehungsdifferenzen, welche Fizeau für die Ost- und Westrichtung erhielt, aus den verschiedenen Stellungen der Spiegel zu seiner Anordnung verursacht sein können.

Die Beobachtungen wurden von mir mit Unterbrechungen hauptsächlich vom Frühjahr bis zum Herbst 1906 angestellt. Bei den Messungen wurden meistens vier Einstellungen ge-

macht und daraus das Mittel genommen. So war am 2. Juli 1906 mittags:

| | Gesamtdrehung in der Ostrichtung | Gesamtdrehung in der Westrichtung |
|---|---|---|
| | 58,25° | 58,20° |
| | 58,30 | 58,28 |
| | 58,27 | 58,22 |
| | 58,31 | 58,30 |
| Mittelwert: | 58,28° | 58,25° |

Also beträgt der Überschuß für die Westrichtung $-0{,}03°$. Von den Beobachtungen seien diejenigen des Monat Juli mitgeteilt.

| Tag | Drehungsüberschuß für die Westrichtung | Tag | Drehungsüberschuß für die Westrichtung |
|---|---|---|---|
| 2. Juli | −0,03° | 16. Juli | +0,00° |
| 4. „ | +0,08 | 17. „ | −0,07 |
| 6. „ | +0,02 | 18. „ | −0,05 |
| 7. „ | +0,06 | 19. „ | +0,04 |
| 8. „ | −0,02 | 20. „ | −0,07 |
| 9. „ | +0,03 | 24. „ | +0,03 |
| 10. „ | +0,02 | 26. „ | −0,08 |
| 13. „ | +0,07 | | |

Als Mittelwert aus diesen Zahlen ergibt sich ein Drehungsüberschuß für die Westrichtung von $+0{,}03°$, liegt also innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Im Juli 1907, als mir ein Kompensator nach Soleil-Babinet zur Verfügung stand, habe ich die Versuche noch einmal wiederholt. Der Kompensator wurde hinter die Glassätze gebracht, und die beiden verschiebbaren Quarzkeile des Kompensators mittels der Mikrometerschraube so eingestellt, daß die noch vorhandene elliptische Polarisation vollkommen in lineare zurückgeführt wurde. Eine Verstellung des verschiebbaren Quarzkeiles sowohl nach der einen, wie nach der anderen Richtung bewirkte, daß die Einstellung am Polarisationsapparat ungenauer wurde, ein Beweis, daß in der Tat die elliptische Polarisation völlig kompensiert war. Die Vergrößerung von $\Delta\alpha$ war bei einer Gesamtdrehung von ca. 60° 35 fach, der wahrscheinliche Effekt müßte demnach

$$\frac{60° \cdot 35}{1500} = 1{,}40°$$

betragen. Die Versuche wurden teilweise in der Art ausgeführt, daß ich die Einstellung machte, während ein anderer Beobachter am Teilkreis die Ablesungen ausführte. So war am 27. Juli mittags eine Beobachtungsreihe

| | Westrichtung | Ostrichtung |
|---|---|---|
| | 60,705° | 60,706° |
| | 60,725 | 60,707 |
| | 60,704 | 60,696 |
| | 60,700 | 60,690 |
| | 60,709 | 60,716 |
| Mittelwert: | 60,709° | 60,703° |

An den anderen Tagen ergab sich:

| Tag | Westrichtung | Ostrichtung | Überschuß für die Westrichtung |
|---|---|---|---|
| 3. Juli | 60,697 | 60,688 | +0,009 |
| 4. „ | 60,709 | 60,691 | +0,018 |
| 9. „ | 60,688 | 60,695 | −0,007 |
| 10. „ | 60,675 | 60,685 | −0,010 |
| 20. „ | 60,708 | 60,701 | −0,007 |
| 23. „ | 60,691 | 60,696 | −0,005 |
| 24. „ | 60,695 | 60,709 | −0,014 |
| 25. „ | 60,688 | 60,698 | −0,010 |
| 27. „ | 60,709 | 60,703 | +0,006 |

Der nach den Betrachtungen von Fizeau berechnete Wert des Drehungsüberschusses für die Westrichtung beträgt 1,4°. In der vorstehenden Tabelle ist der größte Drehungsüberschuß aber nur +0,018°, und im Mittel ergibt sich aus den Zahlen −0,0012°. Bei der Empfindlichkeit der Messungen wäre es daher möglich gewesen, die gesuchte Größe bis auf 1 Proz. genau festzustellen.

Aus den vorliegenden Beobachtungen darf daher mit Sicherheit geschlossen werden, daß der von Fizeau beobachtete Effekt nicht besteht, und daß somit bisher durch kein Experiment ein Einfluß der Erdbewegung auf die optischen Erscheinungen auf der Erde nachgewiesen werden konnte.

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 9. August 1907.)

## 9. *Versuche über das Minimumpotential von Spitzenentladungen und über den Einfluß erhöhter Temperaturen auf dasselbe;*[1] *von P. Pringsheim.*

Die im folgenden zu beschreibenden Versuche wurden ausgeführt auf Anregung von Hrn. Geheimrat Röntgen, dem ich auch an dieser Stelle hierfür meinen ehrerbietigsten Dank aussprechen möchte; sie hatten den Zweck, den Einfluß erhöhter Temperatur auf das Minimumpotential (M.P.) von Spitzenentladungen zu bestimmen. Als dieselben begonnen wurden, lag bereits eine große Anzahl von Arbeiten über das M.P. vor, die untereinander zum Teil nicht unerheblich abweichende Resultate enthielten: Röntgen[2]), der sich zuerst mit dieser Frage beschäftigte, fand das positive M.P. immer ganz scharf und dadurch charakterisiert, daß der noch deutlich meßbare Strom bei geringer Potentialerniedrigung plötzlich unstetig verschwindet; Warburg[3]) und Tamm[4]) beobachteten auch bei Potentialen, die 10 Volt und mehr unter M.P. liegen, noch vorübergehende Stromstöße.

Nach Röntgen ist M.P. immer kleiner als das zugehörige A.P., und $-$M.P. liegt immer tiefer als $+$M.P.; nach Precht[5]) beträgt die Differenz zwischen A.P. und M.P. oft mehr als 1000 Volt, nach Tamm im allgemeinen nur 60 Volt; Evers[6]) fand, daß sie meist für negative Spitzenentladung weit größer ist als für positive. Nach Warburg[7]) kann $-$M.P., wenn die Spitze fettig ist, größer sein als $+$M.P., immer aber ist die der Spitze entströmende Elektrizitätsmenge bei gleichem absolutem Werte des Potentials für negative Entladung weit größer als für positive.

1) Auszug aus der Münchner Dissertation.
2) W. C. Röntgen, Göttinger Nachrichten 1878. p. 390—404.
3) E. Warburg, Wied. Ann. **67.** p. 69—83. 1899.
4) F. Tamm, Ann. d. Phys. **6.** p. 529. 1901.
5) J. Precht, Wied. Ann. **49.** p. 150—183. 1893.
6) P. Evers, Ann. d. Phys. **17.** p. 781—860. 1905.
7) E. Warburg, Ann. d. Phys. **2.** p. 295. 1900.

Ferner fand Precht, daß, wenn durch die aus der Spitze ausgeströmten Elektrizitätsmengen die Luft stark elektrisiert ist, das „scheinbare" M.P. sogar höher liegen kann als A.P., jedenfalls aber wesentlich erhöht wird; diese Erscheinung wird auch von Evers bestätigt. Dem steht direkt das von Tamm gefundene Resultat entgegen, wonach für positive und negative Ladungen M.P. sinkt, wenn längere Zeit Elektrizität aus der Spitze ausgeströmt ist, und zwar um so mehr, je höher das Spitzenpotential war; die gleiche Angabe findet sich bei J. Stark[1]), der die Tatsache durch die Erhitzung der Spitze infolge der beträchtlichen Stromdichte erklärt.

In der Arbeit von Evers unterscheiden sich die in zwei sich entsprechenden Versuchsreihen auf 10 Volt genau angegebenen Werte von + M.P. um 150 Volt[2]), während M.P. im allgemeinen als absolut konstant angesehen wird.

Endlich wird in den von Warburg veröffentlichten Versuchen des Hrn. Gorton[3]) mitgeteilt, daß M.P. für ein und dieselbe Spitze im Laufe der Zeit sich nicht gleich bleibt, sondern allmählich wächst, und nur bei Bestrahlung der Spitze mit Radium temporär wieder den ursprünglichen „Normalwert" annimmt, auch findet sich hier die Angabe, daß während bei den früheren Versuchen Warburgs der Galvanometerausschlag zuletzt sprungweise verschwand, nunmehr unter gewissen Umständen der Strom stetig nach Null abnahm.

Manche dieser von den verschiedenen Autoren angegebenen, sich anscheinend widersprechenden Erscheinungen traten bei den von mir ausgeführten Versuchen zuweilen hintereinander bei ein und derselben Spitze auf, ohne daß hierfür ein Grund angegeben werden könnte: so fielen A.P. und M.P. manchmal vollkommen zusammen, dann lag M.P. weit unter A.P., und bei einer späteren Beobachtung waren die beiden Werte wieder nahezu gleich; M.P. änderte sich zuweilen in kurzer Frist um 100 Volt und blieb dann wieder lange Zeit sehr konstant.

Alle diese Widersprüche sind also nicht auf Verschieden-

1) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen p. 189.

2) l. c. p. 835.

3) E. Warburg u. F. R. Gorton, Ber. d. Deutsch. Physik. Ges. 3. p. 217—224. 1905.

heiten in der Versuchsanordnung — wie z. B. Tamm[1]) annimmt — zurückzuführen, sondern auf geringe außerordentlich schwer zu kontrollierende Nebenumstände.

Die Versuchsanordnung war, wie auch bei fast allen oben genannten Arbeiten, mit geringen Abänderungen die von Röntgen angegebene: die beiden Pole einer durch einen Elektromotor getriebenen zweiplattigen Holtzschen Maschine konnten vermittelst eines Kommutators abwechselnd geerdet bez. mit dem Braunschen Elektrometer *E*, dessen Gehäuse gleichfalls zur Erde abgeleitet war, verbunden werden. Von diesem aus ging ein Zweig der Leitung durch zwei hintereinander geschaltete verstellbare Widerstände *W* aus Jodkadmium–Amylalkohollösung verschiedener Konzentration, von

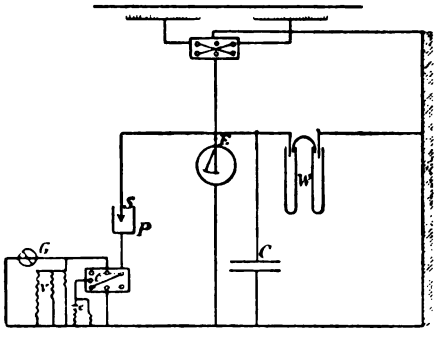



Fig. 1.

denen die verdünnte zur groben, die andere zur feinen Regulierung des Potentials in *E* diente, zur Erde. Parallel zu dieser Leitung war ein 20 plattiger Kondensator *C* aus Paraffinpapier und Stanniol geschaltet. Ein dritter Leitungszweig führte von *E* nach der Spitze *S*, welche zentral in einen oben offenen, 5 cm weiten Metallzylinder *P* eingeführt war, so daß die Entfernung von *S* bis zur Bodenplatte des Zylinders 1,5—2 cm betrug. Diese Platte endlich war durch eine Wippe entweder direkt oder durch ein Galvanometer *G* hindurch geerdet, so daß, wenn ein entsprechendes Spitzenpotential erreicht war, ein elektrischer Strom von der Spitze durch die Platte und das Galvanometer zur Erde floß.

1) F. Tamm, l. c. p. 530.

Zur Strommessung diente ein Dubois-Rubensscher Panzergalvanometer von 4000 Ohm Spulenwiderstand, dessen Empfindlichkeit durch entsprechende Nebenschlüsse in weiten Grenzen variiert und mit Hilfe einer einfachen Schaltung beständig kontrolliert werden konnte.

Für die Versuche bei hohen Temperaturen waren Spitze und Zylinder in einem von W. C. Heraeus[1]) in Hanau gelieferten Quarzgefäß eingeschlossen. Dasselbe ist in seinem 15 cm langen Hauptteil zylindrisch und besitzt dort einen Durchmesser von 5,5 cm; an beiden Enden läuft es im Rohre von 1 cm Durchmesser und 15 cm Länge aus. Durch das untere Rohr geht ein Golddraht *a* als Zuleitung zu dem 5 cm hohen Metallzylinder *P*, der — um möglichst jede chemische Veränderung des Gases beim Erhitzen zu vermeiden — aus dünnem Goldblech besteht und auf dem Boden des Quarzglasgefäßes aufliegt; am unteren Ende ist an das Rohr ein gleich weites, durch einen Hahn *H* verschließbares Glasrohr angesetzt, und in dieses ist in einem seitlichen Ansatz ein Platindraht eingeschmolzen, der seinerseits mit dem Golddraht verlötet ist. Die Verbindung zwischen Glas und Quarz ist hier ebenso wie an allen anderen Stellen durch Siegellack hergestellt und vollkommen luftdicht.

War der Hahn *H* zugedreht, so wurde das ganze abgeschlossene Gasvolumen mit Ausnahme der kurzen, aus dem Ofen herausragenden Stücke des engen Quarzrohres gleichmäßig erwärmt, und da diese Stücke im Verhältnis zum Inhalt des weiten Quarzzylinders, der sich in der Mitte des 30 cm langen Ofens befand, sehr klein sind (sie betragen etwa 2 Proz.), so kann annähernd die Gasdichte im Entladungsapparat als konstant angenommen werden.

Auf das obere Ansatzrohr des Quarzgefäßes ist ein kurzes Glasrohr von 0,4 mm innerer Weite aufgekittet, und in dieses sind zwei ineinandergesteckte Porzellankapillaren gleichfalls mittels Siegellack eingesetzt, so zwar, daß sie oben um etwa 5 cm aus dem Glasröhrchen herausragen und unten in einer

1) Bei Herstellung, sowie bei den mehrfach notwendigen Abänderungen des Apparates zeigte die Firma Heraeus ganz besonders großes Entgegenkommen, wofür ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

Entfernung von 3 cm vor dem Goldblech enden. Durch das innere Porzellanrohr ist ein 0,2 mm starker Pt–Rh-Draht geführt, in dem Raum zwischen den beiden Kapillaren liegt ein 0,1 mm starker Pt-Draht; diese beiden Drähte sind an der Stelle, wo sie unten aus dem Porzellanrohre heraustreten, durch ein Goldkügelchen miteinander verlötet, aus dem der in

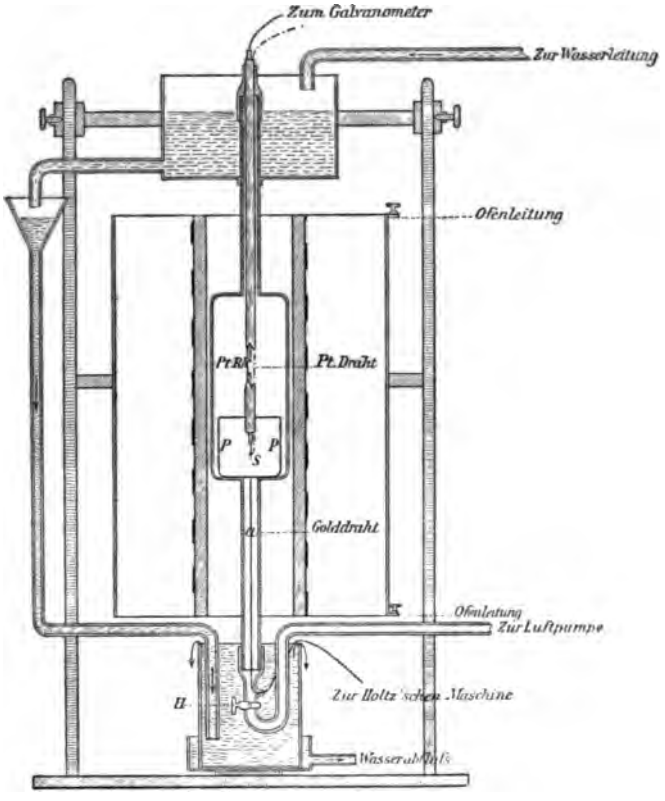



Fig. 2.

eine feine Spitze ausgezogene Pt-Draht noch um 1 cm hervorragt. An die freien Enden der beiden Drähte, welche sich immer auf Zimmertemperatur befinden, sind Kupferdrähte verlötet, die zu einer Wippe führen; in der einen Stellung schließt diese das aus dem Pt- und Pt–Rh-Draht gebildete Thermoelement durch ein Zeigergalvanometer; in der anderen Stellung

ist der Pt–Rh-Draht mit dem Galvanometer *G* verbunden bez. geerdet, während der Pt-Draht an einem Ende isoliert ist. Das Thermoelement wurde durch Vergleich mit einem von der Reichsanstalt geprüften geeicht.

Zur Erhitzung wurde das Quarzgefäß in einen elektrischen Ofen von 6,5 cm lichter Weite eingesetzt. Die aus dem Ofen herausragenden Teile des Apparates konnten durch fließendes Wasser gekühlt werden.

Die Versuche wurden zunächst in sorgfältig getrockneter, staubfreier atmosphärischer Luft ausgeführt. Bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur trat im allgemeinen für positive Spitzenladung (bez. negative Plattenladung) M.P. in der von Röntgen beschriebenen Weise ein, daß nämlich die Stromstärke mit sinkendem Spitzenpotential bis auf einen noch deutlich meßbaren Wert herabging, um dann bei geringer weiterer Erniedrigung der Spannung ganz zu verschwinden. M.P. und A.P. waren bei ein und derselben Spitze manchmal um 100 Volt und mehr verschieden, dann wieder fielen sie vollständig zusammen, ohne daß hierfür ein Grund gefunden werden konnte. War längere Zeit ein starker Strom durch die Spitze gegangen, so stieg M.P., um jedoch den ursprünglichen Wert wieder anzunehmen, wenn die Spitze einige Zeit ausgeruht war. Im übrigen blieb M.P. meist sehr konstant. So war für eine Spitze

Tabelle I.

| am 27./VII. 05 | 25./X. 05 | 18./I. 06. |
|---|---|---|
| M.P. = 2120 | 2120 | 2110 |

Dieselbe war am 27./VII. 05 frisch in den Apparat eingesetzt worden und wurde in der ganzen Zeit nicht herausgenommen, wohl aber zu einer großen Anzahl von Versuchen verwendet.

Ganz anders war das Verhalten bei negativer Spitzenladung: Hier trat, wenn die Spitze ganz ungebraucht war, zunächst bei einem Potential, das weit unter dem später bestimmten positiven M.P. lag, eine Entladung ein, und erniedrigte man die Spannung, so verschwand der Strom wieder bei dem gleichen Potential, indem der Galvanometerausschlag stetig nach Null ging; dieser Wert des — M.P. ist der von

Warburg und Gorton als Normalwert bezeichnete. War die Spitze einige Zeit in Gebrauch, so konnte ein *dauernder* negativer Spitzenstrom nur bei sehr viel höheren Spannungen erhalten werden, während sehr starke stoßweise Entladungen schon lange vorher auftraten. In diesen Fällen lag — M.P., definiert als die Spannung, welche eben noch einen dauernden Strom zu unterhalten imstande ist, zuweilen bedeutend höher als das entsprechende + M.P.; doch war dieses (scheinbare) — M.P. dann keineswegs konstant, sondern schwankte häufig innerhalb kurzer Zeit um mehr als 100 Volt.

Eine frisch ausgezogene Platinspitze ergab die folgenden Werte (die Spannung $V$ der Spitze in Volt, die Stromstärke $J$ in Skalenteilen des Galvanometers angegeben); welcher Widerstand zum Galvanometer parallel geschaltet war, zeigen die Indizes $\infty$, (320), (70).

Tabelle II.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $V-$ | 1200 | 1300 | 1200 | (Der Strom verschwand ganz stetig; kein merklicher Sprung.) | | | | | | | | |
| | $J_\infty$ | 0 | 100 | 0 | | | | | | | | | |
| 2. | $V-$ | 1200 | 1250 | 1300 | 1280 | 1400[1] | 1500 | | | | | | |
| | $J_\infty$ | 0 | 25 | 100 | 0 | 250; 20 | 120 | | | | | | |
| | | | | | | ↔ | ↔ | | | | | | |
| 3. | $V-$ | 1350 | 1500 | | 1600 | 1550 | 1500 | 1400 | 1350 | 1300 | 1250 | | |
| | $J_\infty$ | 0 | 150–40 | | $_{(320)}$70 | 60 | 40 | 340 | 100 | 10 | 0 | | |
| | | | ↔ | | | | | ↔ | ↔ | ↔ | | | |
| 4. | $V-$ | 1200 | 1300 | 1400 | 1500[2] | 1600 | 1580 | 1700 | 1800 | 2000 | 2100 | 2150 | 2100 |
| | $J_\infty$ | 0 | 100 | 250–350 | 20; 0 | $_{(320)}$75 | 0 | 0 | 2 | 200; 0 | 0 | 320 | 0 |
| | | | ↔ | ↔ | ↔ | | | | ↔ | | | | |
| 5. | $V-$ | 1800 | 1900 | 2000 | 2100 | 2200 | 2300 | 2150 | 2100 | | | | |
| | $J_\infty$ | 0 | 3; 0 | 5; 0 | $_{(320)}$300; 0 | 0 | 400 | 300 | 0 | | | | |
| 6. | $V+$ | 2050 | 2100 | 2090 | 2080 | | | | | | | | |
| | $J_\infty$ | 0 | 360 | 240 | 0 | | | | | | | | |

Zwischen je zwei Versuchen liegt ein Zeitraum von 20 Min., nur zwischen 4. und 5. ein ganzer Tag.

1) Der konstante Ausschlag 250 verschwand plötzlich; die mit ↔ unterstrichenen Zahlen bedeuten stoßweise um den betreffenden Wert schwankende Ausschläge.

2) Zuerst eine kurze Zeit konstanter Ausschlag 20, der dann ohne merkliche Potentialänderung wieder verschwindet.

Bei anderen Versuchsreihen traten die stoßweisen Entladungen noch viel deutlicher und bis zu weit höheren Spannungen auf, besonders wenn schon einmal längere Zeit ein starker Strom durch die Spitze gegangen war; so war für den Apparat, dessen positives M.P. in Tab. I angegeben ist:

Tabelle Ia.

| $V-$ | 1800 | 1900 | 2000 | 2100 | 2200 | 2300 | 2400 (+ M.P. = 2120) | 2500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_\infty$ | 0 | 100; 0 ↔ | 200; 0 ↔ | 500; 0 ↔ | 300 ↔ | 500; 0; 500 ↔ | $\alpha_{340}$ 340 | 0—70 ↔ |

Diese Erscheinung blieb gleichfalls während der ganzen Zeit, in welcher der Apparat abgeschlossen stand, erhalten; sie zeigte sich auch, als die Influenzmaschine durch Hochspannungsakkumulatoren ersetzt wurde; ebenso traten die stoßweisen Entladungen noch auf, nachdem, um letzte Staubreste zu entfernen, die ganze Innenseite des Apparates mit Glyzerin benetzt worden war. Sie dürften sich somit weder durch starke Schwankungen des Spitzenpotentials, noch auch durch Staubteilchen, die sich an der Spitze ansetzten und bei entsprechend hohen Spannungen plötzlich fortgeschleudert würden, erklären lassen. Diese „zuckenden Entladungen" wurden auch von Wesendonck[1]) beobachtet. Er fand, daß sie ohne ersichtlichen Grund manchmal schon 300 Volt vor dem Einsetzen eines dauernden Stromes auftreten; da sich die betreffende Veröffentlichung jedoch lediglich mit dem Anfangspotential der Spitzenentladungen beschäftigt, wird nicht angegeben, ob, nachdem ein dauernder Strom eingeleitet worden ist und dann das Spitzenpotential erniedrigt wird, auch wieder die stoßweisen Entladungen sich zeigen. Im übrigen folgen sich zuweilen diese Stöße so dicht, daß sie mit einem langsam schwingenden Galvanometer kaum von dauernden Strömen zu unterscheiden sind.

Nach Gorton müßte bei Bestrahlung der Spitze mit Radium temporär wieder der ursprüngliche „Normalwert" des M.P. auftreten; derselbe konnte jedoch nicht immer vollständig erreicht werden, als der Spitze ein starkes, in einer Glimmerkapsel eingeschlossenes Radiumpräparat genähert wurde, wohl aber

1) K. v. Wesendonck, Wied. Ann. 65. p. 117—122. 1898.

wurde —M.P. wesentlich erniedrigt, und die noch darunter auftretenden stoßweisen Ausschläge folgten sich sehr dichter; Annäherung eines schwächeren Präparates hatte die gleiche Wirkung in geringerem Grade.

Eine frisch in das Quarzgefäß eingesetzte Spitze ergab die folgenden Werte:

Tabelle III.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V-$ | 1300 | 1400 | 1600 | 1900 | 2200 | 2500 | 2400 |
| $J_\infty$ | 0 | 20; 0 | 00; 0—10 ↔ | 500; 0 | (320) 150 ↔ | 280 | 100—250 ↔ |

Nachdem die Spitze einige Zeit in Gebrauch war:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V-$ | 1800 | 1900 | 2200 | 2400 | 2500 | 2400 | 2300 |
| $J_\infty$ | 0—2 ↔ | 0—5 ↔ | 100 ↔ | (320) 250 ↔ | 290 | 200 ↔ | 10 ↔ |

Das starke Radiumpräparat genähert (15 mg Radiumbromid):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V-$ | 1300 | 1400 | 1500 | 1700 | 1800 | 1900 |
| $J_\infty$ | 0 | 1 [1]) ↔ | 8 ↔ | 40 | 100 | 230 |

Das schwächere Radiumpräparat genähert:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V-$ | 1300 | 1400 | 1600 | 1700 | 1800 | 1900 | 2000 |
| $J_\infty$ | 0 | ? | 2 | 5 | 12 | 20—30 | 50—70 |

Radium entfernt:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V-$ | 2200 | 2210 | 2250 | 2210 | 2200 | |
| $J_{3:0}$ | 0 | 30; 0; 40; 0 | 200 | 0—10 ↔ | 0 | |

Um zu sehen, ob diese Wirkung lediglich eine Folge der Ionisation der Luft in der Nähe der Spitze ist, wurde über das Radium geleitete Luft langsam an der Spitze vorbeigesaugt, während eine direkte Bestrahlung durch einen Bleischirm abgeblendet wurde; dies blieb ohne merklichen Einfluß auf die Entladung.

Die Bestrahlung mit einer Bogenlampe der im Quarzgefäß eingeschlossenen Spitze hatte auf —M.P. ungefähr die gleiche Wirkung wie mit Radium; keinerlei Einfluß zeigte die Belichtung mit einer Uviol–Quecksilberbogenlampe.

Bei Erniedrigung des Gasdruckes verschwinden diese stoßweisen Entladungen vollständig, und die Erscheinungen nehmen die auch sonst beschriebene Form an. Schon bei $p = 600$ mm

1) Bei diesen kleinen Ausschlägen ist sehr schwer zu entscheiden, ob sie konstant oder „zuckend" sind.

war — M.P. meist ganz scharf und etwas kleiner oder nahe gleich + M.P.; bei weiterer Druckerniedrigung sinken + M.P. und — M.P. auf immer geringere Werte herab, jedoch nimmt letzteres rascher ab, so daß der polare Unterschied immer deutlicher hervortritt.

Tabelle IV.

| $p$ = | 720 | 600 | 495 | 394 | 310 | 195 | 715 mm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + M.P. in Volt | 2090 | 1950 | 1780 | 1630 | 1520 | 1310 | 2100 |
| — M.P. in Volt | 2150[1]) | 1900[2]) | 1580 | 1320 | 1150 | 930 | 2210[1]) |

Vielleicht läßt sich hierdurch das Fehlen der stoßweisen Entladungen und die Regelmäßigkeit im ganzen Eintreten des M.P. in den Röntgenschen Versuchen erklären; wenigstens findet sich unter den als Beispiele angeführten Versuchsreihen eine einzige[3]), bei der M.P. für $p = 615$ mm bestimmt wurde; bei allen anderen Versuchen liegen die Drucke unter 400 mm. Bei diesen Drucken aber war auch bei meinen Versuchen — M.P. sehr deutlich und meist auch ganz konstant. Jedenfalls spricht der Umstand, daß die stoßweisen Entladungen bei Druckerniedrigung verschwinden und durch Bestrahlung mit ultraviolettem Licht oder Radium beeinflußt werden, gegen die Annahme, daß sie lediglich durch den Staubgehalt der Luft und dergl. hervorgerufen werden, aber auch gegen die Erklärung Wesendoncks[4]), der als Grund für die große Unregelmäßigkeit in der Erscheinung die Ablösung von Spitzenteilchen annimmt.

Um bei der Erwärmung das Quarzgefäß bei konstanter Dichte keinen zu großen inneren Überdrucken auszusetzen, wurden Versuche nur bei Anfangsdrucken von 400 mm abwärts (bei Zimmertemperatur) angestellt.

Erhitzung beeinflußte gleichfalls die positive und negative Spitzenentladung in wesentlich verschiedener Weise, indem sich auch hier die Verhältnisse für die positive Spitze konstanter zeigten und zwar bei allen untersuchten Gasdrucken. Erwärmung bis auf etwa 150° vergrößert + M.P. etwas (um 50—100 Volt); durch weitere Temperatursteigerung

1) Darunter noch stoßweise Entladungen.
2) Bis 1800 stoßweise Entladungen.
3) l. c. p. 295.
4) K. v. Wesendonck, Wied. Ann. **39.** p. 577. 1890.

wird M.P. nicht mehr wesentlich geändert, nur verliert es an Schärfe und es treten, was bei Zimmertemperatur nie beobachtet wurde, darunter noch momentane Entladungen ein, bis die Spannung auf das ursprüngliche (bei Zimmertemperatur herrschende) M.P. gesunken ist; mit ein und derselben Spitze wurden die folgenden Werte erhalten.

Tabelle V.

| $p$ [1]) | Dichte [2]) | Temperatur | + M.P. in Volt | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 715 | 0,00113 | 20° | 2100 | |
| | „ | 210 | 2200 | Darunter Stöße bis 2150 |
| | „ | 20 | 2100 | |
| 400 | 0,00063 | 20° | 1680 | |
| | „ | 230 | 1730 | |
| | „ | 395 | 1720 | |
| | „ | 570 | 1790 | Darunter stoßweise Ausschläge bis 1710 |
| | „ | 20 | 1670 | |
| 302 | 0,00048 | 20° | 1520 | |
| | „ | 300 | 1600 | |
| | „ | 435 | ca. 1600 | Bis 1510 stoßweise Ausschläge, so daß M.P. nicht recht scharf |
| | „ | 590 | 1580 | Desgl. |
| | „ | 650 | ca. 1520 | (Nicht genau zu beobachten) |
| | „ | 20 | 1530 | |
| 201 | 0,00032 | 19° | 1300 | |
| | „ | 150 | 1380 | |
| | „ | 390 | 1390 | |
| | „ | 560 | 1410 | Darunter bis 1350 zuckende Ausschläge |
| | „ | 640 | ca. 1400 | Darunter bis 1320 zuckende Ausschläge |
| | „ | 18 | 1310 | |
| 105 | 0,00017 | 20° | 1070 | |
| | „ | 90 | 1100 | |
| | „ | 390 | 1110 | |
| | „ | 560 | 1090 | |
| | „ | 640 | 1090 | Darunter schwankende Ausschläge |
| | „ | 20 | 1070 | |
| 20 | 0,00003 | 20° | 830 | |
| | „ | 200 | 870 | |
| | „ | 420 | 880 | |
| | „ | 530 | 850 | Darunter Stöße bis 830 |
| | „ | 640 | 830? | Nicht sehr deutlich; möglicherweise |
| | „ | 20 | 840 | stetiges Verschwinden des Ausschlages |

1) Mit $p$ sei der am Anfang der Versuchsreihe bei Zimmertemperatur im Gefäß vorhandene Druck in Millimetern Quecksilber bezeichnet.

2) Die „Luftdichte" ist auf Wasser von 4° bezogen; sie bleibt bei der Erwärmung konstant.

Wie man sieht, nimmt + M.P. nach dem Erkalten des Apparates wieder seinen ursprünglichen Wert mit voller Schärfe und Deutlichkeit an; die betreffenden Beobachtungen wurden meist erst an dem auf die übrige Versuchsreihe folgenden Tage gemacht.

Die Stromstärken, welche gleichen Potentialen entsprechen, bleiben bei Erwärmung bis zu 200° innerhalb der auch sonst vorkommenden Schwankungen unverändert[1]); bei weiterer Temperaturerhöhung wachsen sie, und zwar bei niedrigen Drucken schneller als bei höheren; die folgenden Tabellen geben die Stromstärken als Funktion des Potentials bei verschiedenen Temperaturen und Drucken; die Spannungen sind in Volt, die Stromstärken in willkürlichen Einheiten (gleich 1 Skt. des Galvanometers, wenn 320 Ohm parallel geschaltet) angegeben.

## Tabelle VI.

Dichte: 0,00032 ($p^2$) = 200).

| Temp. | Spannung | 1200 | 1300 | 1400 | 1500 | 1600 | 1700 | 1800 | 1900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | Stromstärke | 0 | 1 | 3,5 | 7 | 12 | 18 | 24 | 31 |
| 150 | | 0 | 0 | 3,5 | 6,5 | 12 | 19 | 25 | 33 |
| 390 | | 0 | 0 | 0 | 10 | 17 | 25 | 38 | |
| 560 | | 0,1 | 0,1 | 6 | 12 | 19,5 | 30 | 42 | |
| 640 | | 0,9 | 1 | ca. 7 | 12 | 20 | 32 | 45 | |

## Tabelle VII.

Dichte: 0,00063 ($p$ = 400).

| Temp. | Spannung | 1700 | 1800 | 1900 | 2000 | 2100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | Stromstärke | 2 | 4,5 | 7,5 | 10,5 | 14 |
| 230 | | 0 | 4 | 7,5 | 11 | 15 |
| 395 | | 0 | 7,5 | 8 | 13 | 17,5 |
| 570 | | 0 | 5 | 9 | 13,5 | 18 |

1) Dies entspricht auch den Beobachtungen Warburgs für Wasserstoff bei Erwärmung auf 173° (Ann. d. Phys. 2. p. 295. 1900).

2) $p$ wie früher der Druck bei Zimmertemperatur.

Negative Spitzenladung zeigt zunächst bis etwa 200° das gleiche Verhalten wie die positive: M.P. wird etwas erhöht, und darunter treten noch kurze Zeit momentane Stöße auf; diese Änderung ist manchmal nur sehr gering. Bei weiterer Temperaturerhöhung (im Intervall von 200° bis etwa 500°) sinkt M.P. ein wenig, und es treten allmählich wachsend oft noch bis zu 200 Volt unter M.P. heftige momentane Stromstöße auf, die, wenn längere Zeit ein dauernder Strom durch die Spitze gegangen ist, verschwinden. Über 500° sinkt M.P. sehr bedeutend, und während zuerst ein plötzliches (unstetiges) Verschwinden des noch ziemlich starken Stromes zu beobachten war, gehen jetzt die Galvanometerausschläge mit sinkendem Potential zwar sehr schnell, aber doch stetig nach Null; infolgedessen ist M.P. nicht absolut scharf zu bestimmen. Auch fallen nunmehr A.P. und M.P., die sonst wesentlich verschieden voneinander waren, immer zusammen; der Verlauf der Erscheinungen ist bei verschiedenen Drucken qualitativ der gleiche; vor allem ist auch die Temperatur, bei welcher die starke Erniedrigung von M.P. auftritt, vom Druck unabhängig.

Die im folgenden mitgeteilten Versuchsreihen korrespondieren mit denjenigen über +M.P. auf p. 155, indem immer abwechselnd eine Beobachtung mit positiver und mit negativer Ladung gemacht wurde.

Tabelle VIII.

| $p$ | Dichte | Temperatur | −M.P. in Volt | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 715 | 0,00113 | 20° | 2100 | Darunter Stöße bis 1800 |
| | „ | 210 | 2150 | Desgl. |
| | „ | 20 | 2100 | Desgl. |
| 400 | 0,00063 | 20° | 1610 | |
| | „ | 230 | 1680 | |
| | „ | 395 | 1700 | Darunter bis 1500 stoßweise Entladungen |
| | „ | 480 | ca. 1100 | Stetiges Verschwinden des Stromes, der zuletzt sehr schwach |
| | „ | 565 | 1090 | Deutlich stetiger Übergang nach Null |
| | „ | 670 | 1090 | |
| | „ | 20 | 1600 | |

Tabelle VIII (Fortsetzung).

| $p$ | Dichte | Temperatur | $-$M.P. in Volt | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 302 | 0,00048 | 20° | 1310 | |
| | „ | 800 | 1420 | Darunter bis 1350 Stöße |
| | „ | 435 | 1420 | Darunter bis 1150 Stöße |
| | „ | 590 | 920 | |
| | „ | 650 | 930 | |
| | „ | 735 | ca. 940 | |
| | „ | 590 | 910 | Beim Erkalten des Ofens |
| | „ | 435 | 1500 | Darunter bis 1200 Stöße |
| | „ | 20 | 1500 [1]) | |
| 200 | 0,00032 | 20° | 1050 | |
| | „ | 230 | 1100 | |
| | „ | 410 | 1100 | Darunter Stöße bis 950 |
| | „ | 490 | 1000 | Darunter Stöße bis 820 |
| | „ | 620 | 830 | |
| | „ | 700 | 820 | |
| | „ | 730 | 830 | |
| | „ | 20 | 1050 | |
| 105 | 0,00017 | 20° | 800 | |
| | „ | 180 | 830 | |
| | „ | 370 | 800 | Darunter Stöße bis 780 |
| | „ | 560 | 690 | Deutlich stetiger Übergang nach N |
| | „ | 740 | 690 | |
| | „ | 20 | 800 | |
| 20 | 0,00003 | 20° | 540 | |
| | „ | 210 | 600 | |
| | „ | 420 | 550 | Darunter Stöße bis 540 |
| | „ | 420 | 550 | Darunter Stöße bis 490 |
| | „ | 590 | 500 | Stetiger Übergang nach Null |
| | „ | 650 | 500 | Desgl. |
| | „ | 20 | 550 | |

Beim Abkühlen des Apparates sind die Erscheinu im allgemeinen die gleichen wie beim Erwärmen, nur t dann meist noch bei tiefer liegenden Temperaturen unter stoßweise Entladungen auf; befindet sich der Ofen wiede

1) Bei einer anderen Versuchsreihe bei gleichem Druck wurde hier wie gewöhnlich am Ende des Versuches wieder der ursprüng Wert von M.P. = 1300 erreicht.

Zimmertemperatur, so nimmt gewöhnlich auch —M.P. wieder seinen Anfangswert an. Nach Gorton müßte, nachdem die Spitze in trockener Luft geglüht ist, wieder der „Normalwert" des —M.P. auftreten; dies war nie der Fall, auch nicht, wenn während des Abkühlens weiter keine Entladung mehr durch die Spitze gegangen war. Dagegen war in zwei Fällen ohne angebbaren Grund nach dem Erhitzen —M.P. um über 100 Volt gestiegen, während +M.P. unverändert geblieben war; nach einiger Zeit nahm auch —M.P. wieder seinen ursprünglichen Wert an (das eine Mal erst, nachdem die Luft im Apparat gewechselt war).

Es ist zu bemerken, daß die Abnahme des M.P. durch die Erhitzung bei geringer Dichte viel geringer ist als bei großer Dichte, und zwar nicht nur absolut, sondern auch relativ; bezeichnen wir mit $M_0$ das —M.P. bei Zimmertemperatur und mit $M_T$ das —M.P. bei Glut, so ist:

Tabelle IX.

| Dichte | 0,00068 | 47 | 32 | 16 | 08 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ in mm | 400 | 300 | 200 | 100 | 20 | |
| $M_0 - M_T$ | 510 | 370 | 230 | 110 | 40 | Volt |
| $\frac{M_0}{M_T}$ | 1,47 | 1,40 | 1,24 | 1,16 | 1,08 | |

(Dabei ist $p$ immer der bei Zimmertemperatur herrschende, der betreffenden Dichte entsprechende Druck.)

Somit scheinen bei verminderter Dichte $M_0$ und $M_T$ dem gleichen Grenzwert zuzustreben. Daß andererseits der Unterschied bei höherer Dichte noch größer wird, darf wohl angenommen werden, da, wie wir sahen, $M_0$ dann außerordentlich hoch (sogar noch über +M.P.) zu liegen pflegt.

Die Kurven der Stromcharakteristik, welche die Stromstärke als Funktion des Spitzenpotentials geben, zeigen bei Temperaturzunahme annähernd das gleiche Verhalten für negative Spitzenladung, wie es für den positiven Strom beschrieben wurde; zunächst nehmen die gleichen Potentialen entsprechenden Stromstärken sehr langsam zu, wenn der Apparat erwärmt wird; bei einzelnen Versuchsreihen, die mit der gleichen Spitze wie alle anderen ausgeführt wurden, nahm ohne angebbaren Grund $J$ anfangs sogar ein wenig ab; bei einem darauf folgen-

den Versuch, bei dem alles (auch der Druck und die füllung) unverändert geblieben, trat dann wieder der no Verlauf ein. Bei weiterer Erhitzung über 400° wachse Stromstärken rascher, die Charakteristiken werden wese steiler, und zwar bei niedrigen Drucken schneller als bei h

Die folgenden Tabellen geben wieder den ganzen V zweier Versuchsreihen bei negativer Spitzenladung, die den auf p. 156 aufgestellten korrespondieren.

Tabelle X.

Dichte: 0,00032 ($p = 200$).

| Temp. | Spannung | 700 | 800 | 900 | 1000 | 1100 | 1200 | 1300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | Stromstärke | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 30 | 42 |
| 230 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 30 | 44 |
| 410 | | 0 | 0 | 0 | 0—2 | 17 | 37 | 60 |
| 490 | | 0 | 0 | 4—8 | 14 | 31 | 52 | 82 |
| 620 | | 0,2 | 0,3 | 12 | 30 | 60 | 100 | 160 |
| 700 | | 2 | 2 | 13 | 35 | 64 | 108 | |

Tabelle XI.

Dichte: 0,00063 ($p = 400$).

| Temp. | Spannung | 1300 | 1400 | 1500 | 1600 | 1700 | 1800 | 1900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | Stromstärke | 0 | 0 | 0 | 0 | 22 | 29 | 38 |
| 230 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 24 | 34 | 42 |
| 390 | | 0 | 0 | 0 | 10 | 26 | 38 | 48 |
| 480 | | 3* | 7 | 16 | 22 | 33 | 46 | 58 |
| 565 | | 11* | 19 | 25 | 40 | 52 | 69 | |

* M.P. bei $V = 1090$.

Diese beiden Tabellen werden veranschaulicht durch Figg. 3 und 4, welche die Stromcharakteristiken bei vers denen Temperaturen darstellen; die einzelnen Kurven Isothermen, die Abszissen sind die Spannungen in 100 die Ordinaten die zugehörigen Stromstärken in willkürl Einheiten; das Gebiet der zuckenden Entladungsstöße ist d gebrochene Linien (‑‑‑‑‑) angedeutet. Die wesentlich flach

Kurven sind die entsprechenden Charakteristiken des positiven Spitzenstromes bei Zimmertemperatur.

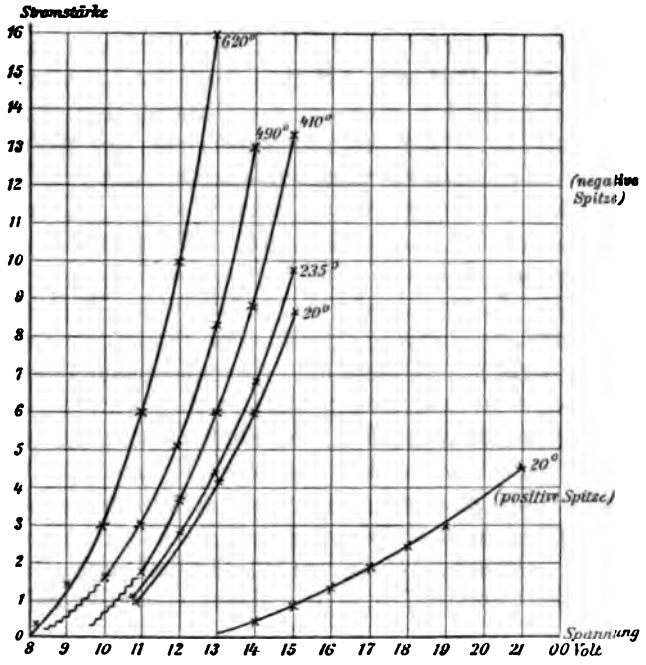



Fig. 3. Kurven der Stromcharakteristik bei $p = 200$ mm Anfangsdruck (bei 20°) (negative Spitze).

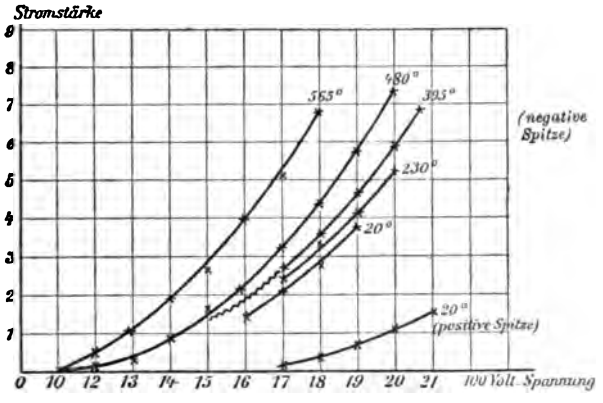



Fig. 4. Kurven der Stromcharakteristik bei $p = 400$ mm Anfangsdruck (bei 20°) (negative Spitze).

In reinem Stickstoff waren die Erscheinungen qualitativ von denen in atmosphärischer Luft nicht verschieden; es wurde daher nur bei einer Gasdichte gearbeitet (bei $p = 300$ mm bei Zimmertemperatur).

Sowohl +M.P. als −M.P. liegen tiefer als unter sonst gleichen Umständen in Luft, die Stromstärken sind größer, vor allem der negative Spitzenstrom ist von Anfang an so heftig[1]), daß, wenn er einmal eingesetzt hatte, das Potential kaum noch gesteigert werden konnte; −A.P. lag immer sehr hoch, und in dem Augenblick, wo es überschritten war, sank die Spannung um 300—400 Volt. Bei Temperaturen über 500° fallen dagegen auch hier −A.P. und −M.P. zusammen in den früher als $M_T$ bezeichneten Wert; im Temperaturintervall zwischen 400 und 500° treten gleichfalls unter −M.P. noch stoßweise Entladungen auf. +M.P. wird durch die Erwärmung nicht wesentlich beeinflußt, zu bemerken ist nur, daß im Gegensatz zu den Versuchen in Luft jetzt manchmal auch bei Zimmertemperatur unter +M.P. noch kurze stoßweise Entladungen stattfanden.

Die folgenden Werte wurden bei fünf aufeinanderfolgenden Versuchsreihen fast genau übereinstimmend gefunden.

Tabelle XII.

| Temp. | +M.P. | | −M.P. | |
|---|---|---|---|---|
| 20° | 1800 | | 900 | |
| 210 | 1320 | Stöße bis 1220 | 890 | |
| 390 | 1320 | „ „ 1250 | 870 | Stöße bis 820 |
| 490 | 1320 | „ „ 1210 | 700 | Stetiger Übergang nach Null |
| 600 | 1300 | „ „ 1200 | 700 | |
| 670 | | | 700 | |
| 740 | | | 700 | |

Dabei war zwischen der dritten und vierten Beobachtungsreihe der Apparat mit frisch bereitetem Gas gefüllt worden.

Zum Vergleich wurde in den Apparat nochmals trockene Luft eingelassen und mit der gleichen Spitze eine Versuchsreihe ausgeführt. Es ergab sich bei $p = 300$

$$+\text{M.P.} = 1550, \quad -M_0 = 1200, \quad -M_T = 970,$$

alles Werte, die wieder bedeutend über den entsprechenden für Stickstoff liegen.

1) Dies wurde auch von **Warburg** gefunden.

Es ergaben sich also im wesentlichen die folgenden Resultate:

Das Minimumpotential des negativen Spitzenstromes bei nicht bestrahlter Spitze ist keine absolut konstante Größe, insbesondere, wenn die Spitze ganz neu ist; nach einiger Zeit jedoch nimmt es (vor allem bei Drucken unter 500 mm) einen Wert an, der nicht nur sehr lange erhalten bleibt, sondern auch, wenn er durch irgendwelche Einflüsse (Erhitzung, Bestrahlung mit Radium) verändert worden ist, bei Herstellung der alten Versuchsbedingungen immer wiederkehrt. Durch Erhitzung über Rotglut bei konstanter Dichte wird $-$M.P. wesentlich erniedrigt, bis auf einen Wert $M_T$, der durch weitere Temperatursteigerung nicht mehr wesentlich beeinflußt wird; auch dieser Wert kehrt unter gleichen Versuchsbedingungen immer wieder.

Für die Art, wie der negative Spitzenstrom verschwindet, also wie $-$M.P. eintritt, sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. Der Strom setzt bei einem endlichen Wert plötzlich und scharf aus (meist bei Drucken unter 500 mm bei Zimmertemperatur); dann ist M.P. kleiner als A.P.

2. Nachdem der dauernde Strom ausgesetzt hat, finden noch stoßweise Entladungen statt (bei Drucken über 600 mm in Zimmertemperatur).

3. Der Strom verschwindet mit sinkendem Potential ganz stetig; M.P. = A.P. (Bei Temperaturen über 500° Gortonscher „Normalwert".)

Das M.P. des positiven Spitzenstromes ist in der Regel sehr konstant, die Wirkung der Erwärmung ist bei konstanter Dichte sehr unbedeutend, eine starke Herabsetzung bei Erhitzung über Rotglut findet nicht statt.

Die Stromstärken wachsen bei Temperatursteigerung langsam, für den negativen Spitzenstrom über 500° sehr rasch.[1])

Die Erscheinungen sind in atmosphärischer Luft und in reinem Stickstoff qualitativ die gleichen.

München, Physik. Inst. der Universität, August 1907.

1) Dieses entspricht ganz dem von Oberbeck untersuchten Verhalten eines Stromes, der von einer scharfen Schneide zu einer Platte übergeht. Wied. Ann. **60**. p. 193. 1897.

(Eingegangen 12. August 1907.)

## 10. *Quantitative Messungen der An- und Abklingung getrennter Phosphorescenzbanden;* *von A. Werner.*

(Auszug eines Teiles der Kieler Dissertation.)[1])

Durch spektralanalytische Untersuchung[2]) des von ge wissen Erdalkalisulfidpräparaten emittierten Phosphorescenz lichtes haben die Herren Lenard und Klatt in Erweiterun der bereits von E. Becquerel[3]) angebahnten Untersuchunge gezeigt, daß dieses Licht nicht von einheitlicher Wellenläng ist, sondern sich zusammensetzt aus einer Anzahl von Banden d. h. Komplexen emittierter Wellenlängen. Diese Banden sin für den betreffenden Phosphor charakteristisch, und erst di Kenntnis der an jeder Bande getrennt auffindbaren Gesetz mäßigkeit vermag einen Einblick zu gewähren in die sons unlösbar komplexe Erscheinungsmannigfaltigkeit der Phosphor Solche speziellen Bandenuntersuchungen[4]) haben nämlich er geben, daß die Zahl der Banden und ihre Lage im Spektrum eine fest bestimmte ist und nur abhängt vom Erdalkalisulfi und dem wirksamen Metall und daß alle Beeinflussungen de Phosphorescenzen, wie durch die Wahl des Zusatzes, de Temperatur und dergl., nur in relativer Änderung der Inten sität und der Dauer der einzelnen Banden bestehen. Da Gesamtlicht kann so, wie der älteren Beobachtung entsprich zwar seine Farbe ändern, es wird aber immer aus denselbe Banden zusammengesetzt sein und sich direkt darstellen durc die Summe der Intensitäten aller Einzelbanden, die jedoc unabhängig voneinander variabel sind. Jede hat ihre be sonders gelegenen Temperaturbereiche, jede tritt bei bestimmte Zusätzen besonders gut hervor, jede zeigt gewisses ihr eigen Verhalten in der Abklingung, jede wird durch bestimmte Lich

1) Der Philosophischen Fakultät vorgelegt am 23. Juli 1907.
2) P. Lenard u. V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. p. 243 ff. 1904.
3) E. Becquerel, La Lumière.
4) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 278.

wellenlängen vorzugsweise erregt und speichert für sich allein Erregung auf, so daß keine andere Bande sie verbrauchen kann.[1])

Auf diesem, von den Herren Lenard und Klatt vorgezeichneten Wege der Zurückführung aller Phosphorescenzerscheinungen auf bestimmte Bandeneigenschaften fortschreitend, sucht die vorliegende Arbeit im Anschluß an die von den genannten Herren früher gemachten entsprechenden qualitativen Beobachtungen die An- und Abklingungsweise eines Phosphors durch Untersuchung des Verhaltens einer getrennten Bande quantitativ festzulegen.

Es hat zwar schon E. Becquerel[2]) versucht, die Abklingung photometrisch zu verfolgen und durch Summen aus mehreren Exponentialfunktionen der Zeit darzustellen. Da er jedoch das gesamte vom Phosphor emittierte Licht untersucht, kann es nach der jetzigen Kenntnis nicht verwundern, wenn seine Versuche zu keinem übersichtlichen Resultat geführt haben, um so weniger, als nicht nur die verschiedenen Banden eines Metalles, sondern voraussichtlich auch die gleichzeitige ungewollte Anwesenheit der Banden anderer Metalle infolge Unreinheit seiner Präparate den Vorgang des Abklingens außerordentlich kompliziert und das Erkennen einer Gesetzmäßigkeit in der Lichtemission unmöglich machen mußte.

Danach hat E. Wiedemann[3]) das Abklingen der Phosphore auf photometrischem Wege quantitativ festzulegen versucht. Allerdings untersucht auch er das gesamte vom Phosphor emittierte Licht, welches sich in dem von ihm untersuchten Fall bei Anwendung von Balmainscher Leuchtfarbe (CaS + Bi) aus mindestens drei Banden zusammensetzt.[4]) Nach seiner Angabe soll sich die Helligkeit des abklingenden Phosphors angenähert nach einer Exponentialfunktion ändern, was auch durch spätere Untersuchungen von Buchner[5]) — allerdings ohne Mitteilung von Beobachtungsmaterial — bestätigt wird. Doch zeigt eine

1) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 451 ff., 243, 479, 481.
2) E. Becquerel, La Lumière 1. p. 285 ff.
3) E. Wiedemann, Wied. Ann. 37. p. 224—226. 1889.
4) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 260.
5) Fr. Buchner, Neue Methode zur quantitativen Bestimmung der Abklingungsintensitäten phosphorescierender Körper. Diss. Erlangen 1902.

Berechnung der Abklingungskonstanten aus den von E. Wiedemann angegebenen Intensitäten und zugehörigen Beobachtungszeiten z. B. der ersten Versuchsreihe so beträchtliche Abweichungen vom Exponentialgesetz[1]), daß wohl die Exponentialfunktion selbst in erster Annäherung hier ebensowenig gilt, als bereits Becquerel bei seinen Phosphoren angibt.

Die in folgendem mitzuteilenden Untersuchungen sollen nun zeigen, daß auch die Abklingung einer *einzelnen* Phosphorescenzbande keiner einheitlichen Gesetzmäßigkeit folgt, sondern nach einem plötzlichen Abfall des momentanen Leuchtens bei Schluß der Erregung in zwei getrennten Prozessen abläuft, einem exponentiellen Abfall des Momentanzustandes der betreffenden Bande und gleichzeitig einem viel langsameren Abfall des Dauerprozesses nach einer ähnlichen Gesetzmäßigkeit, wie sie von E. Becquerel[2]) für die Gesamtemission seiner Phosphore als nahe zutreffend angegeben worden ist.

### Der Phosphor.

Als besonders gut für die Untersuchung geeignet erwies sich nun die Hauptbande $\alpha$ des SrZn-Phosphors mit $CaF_2$-Zusatz, welcher nach den Angaben der Herren Lenard und Klatt[3]) dargestellt wurde. Das Licht dieses Phosphors besteht aus den drei Banden $\alpha$, $\beta$ und $\delta$[4]), deren Lage und Erregungsverteilung in nachstehender Fig. 1[5]) gegeben sind, in welcher auf der Abszisse die Wellenlängen, auf der Ordinatenachse die geschätzten Intensitäten aufgetragen sind. Unter diesen ist die gelbgrüne $\alpha$-Bande — $\lambda_{max.}$ bei 550 $\mu\mu$ — besonders ausgeprägt, insofern sie infolge ihrer spektralen Lage durch Einschaltung eines geeignet gewählten Gelbfilters leicht von den anderen getrennt werden kann, um so mehr noch,

---

1) E. Wiedemann (Wied. Ann 37. p. 224. 1889):

| Zeit nach Erregungsschluß: | 4″ | 20″ | 40″ | 63″ | 90″ | 180″ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intensitäten: | 27,8 | 7,6 | 4,2 | 3,1 | 1,9 | 1 |
| Abklingungskonstanten: | | 0,08 | 0,03 | 0,013 | 0,017 | 0,007 |

2) E. Becquerel, La Lumière 1. p. 285 ff.

3) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 661.

4) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 271.

5) Nach einer den Untersuchungen von P. Lenard u. V. Klatt (l. c.) beigegebenen Tafel.

als sie bei gewöhnlicher Temperatur fast allein im Spektrum vorhanden ist. Die blaugrüne Bande $\delta$ erscheint nämlich erst bei $+100^0$, während die violette Bande $\beta$ ihre größte Inten-

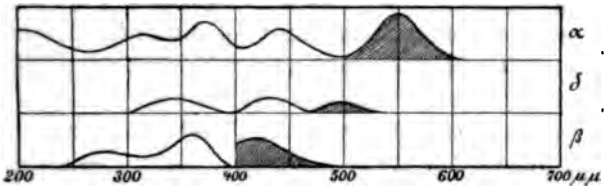



Fig. 1. $SrZnCaF_2$-Phosphor.

sität bei mäßiger Kälte besitzt und nicht weit über $+17^0$ völlig verschwindet, bei der hier benutzten Beobachtungstemperatur von etwa $20^0$ demnach nur noch sehr wenig intensiv ist.

Der $SrZnCaF_2$-Phosphor befand sich in fein gepulvertem Zustande in einem Metallgefäß aus dünnem Kupferblech von ca. 2 mm Höhe und 5 $cm^2$ Fläche. Von der Luft abgeschlossen wurde er durch eine Quarzplatte. Durch vorsichtiges Klopfen und mehrmaliges Nachfüllen des Pulvers erhielt man eine ebene, homogen leuchtende Fläche. Vor jedem Versuch mußte die gesamte etwa noch im Phosphor aufgespeichert gebliebene Erregung ausgetrieben werden.

Nun hat die Erhitzung eines Phosphors bis zur oberen Temperaturgrenze einer Bande, die für die $\alpha$-Bande des benutzten Phosphors kurz vor der beginnenden Rotglut[1]) liegt, zur Folge, daß diese alle aufgespeicherte Energie verausgabt.[2]) Deshalb mußte das Entleuchten in einem heißen Bad von Metallpulver geschehen, dessen Temperatur mit einem Thermometer kontrolliert und auf etwa $450^0$ gehalten wurde, um nach Möglichkeit zu verhindern, daß der Phosphor infolge zu starker Erhitzung leide. Lag der Phosphor einige Minuten in diesem Metallbad, so konnte das ausgeruhte Auge im Dunkel keine Phosphorescenz mehr bemerken. Derselbe Effekt wurde erreicht durch Erhitzen des Phosphors in einem Luftbad von ca. $100^0$ während längerer Zeit, mindestens einer Stunde. Die

1) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 443.
2) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 457.

nach beiden Austreibungsmethoden angestellten Versuche ergaben übereinstimmende Resultate. Es hat also der Phosphor durch die starke Erhitzung bis 450° jedenfalls keine merkliche Änderung erfahren. Die Art der Austreibung ist also innerhalb gewisser Temperaturgrenzen gleichgültig. Durchgeführt wurde die weitere Untersuchung durch Entleuchten im Metallbad.

### Erregende Lichtquelle.

Zur Erreichung möglichster Intensität des Phosphorlichtes ist eine solche Lichtquelle zu wählen, deren spektrale Zusammensetzung sich möglichst der von den Herren Lenard und Klatt gefundenen Erregungsverteilung der betreffenden Bande anpaßt und die möglichst wenig derjenigen Strahlen enthält, die nach Seebeck eine auslöschende Wirkung betätigen könnten. Als besonders vorteilhaft erwies sich in dieser Hinsicht das Licht der bekannten Quarz–Quecksilberlampe von Heraeus. Daneben zeichnet sich die Intensität dieser an ultravioletten Strahlen so außerordentlich reichen Lichtquelle durch sehr befriedigende Konstanz aus, die in allen Fällen leicht reproduzierbar ist, wenn für konstante Spannung an den Klemmen der Lampe gesorgt wird. Nach etwa 10 Min. Brennzeit war dies immer nahezu erreicht. Ein besonderer Vorzug dieser Quecksilberlampen ist das nahezu vollständige Fehlen roten Lichtes; etwa trotzdem störende Erwärmung des Phosphors bei der Erregung ließ sich außerdem durch Zwischenschalten einer Wasserschicht beseitigen.

### Methode der Untersuchung.

Zur Ermittelung des An- und Abklingungsgesetzes ist die Kenntnis der Bandenintensität zu beliebiger Zeit während und nach der Belichtung des Phosphors erforderlich. Zur Intensitätsbestimmung wurde die photographische Methode gewählt, welche aus der Schwärzung einer Platte auf die während bestimmter Zeit einwirkende Lichtmenge zu schließen gestattet. Wird nämlich diese Schwärzung, die, wie zuerst von Schwarzschild[1]) gezeigt worden ist, sich als eine Funktion von $it^q$

1) Schwarzschild, Photograph. Korrespondenz 1899, p. 1909; vgl. auch Publikationen der Kuffnerschen Sternwarte, Wien. Bd. 5.

darstellen läßt — wo $\vartheta$ eine für die betreffende Plattensorte charakteristische Konstante — verglichen mit den durch gleichzeitige Entwickelung hervorgerufenen Schwärzungen, welche eine bekannte Intensität bei bekannten Expositionszeiten liefert — wir wollen sie Vergleichsschwärzungen nennen —, so läßt sich auch die in der Zeiteinheit vom Phosphor emittierte Intensität $i_0$ aus dessen Expositionszeit $t_0$ und der durch besondere Versuche zu ermittelnden Konstanten $\vartheta$ bestimmen. Es würde sein:

$$i_0 = i_1 \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{\vartheta},$$

wo $i_1$ die Vergleichsintensität, die wir zur Einheit wählen, $t_1$ diejenige Expositionszeit für das Vergleichslicht ist, für welche sich dieselbe Schwärzung ergibt wie für den Phosphor.

Vorausgesetzt ist allerdings hierbei zunächst, daß die Intensität $i_0$ während der ganzen Exposition eine konstante sei. Dies trifft jedoch insbesondere für den abklingenden Phosphor nicht zu, und es waren daher besondere Versuche zur Ermittelung eines eventuellen Einflusses der Variation der Phosphorintensität während der Exposition erforderlich. Dieselben haben, wie an anderer Stelle[1]) näher ausgeführt ist, ergeben, daß die photographisch bestimmte Phosphorintensität bei beliebig innerhalb nicht allzu großer Grenzen gewählter Expositionszeit für den ganzen Verlauf der Abklingung immer sehr nahe zusammenfällt mit dem Mittelwert der im Expositionsintervall bestehenden Intensität.

Die Vergleichsschwärzungen wurden erhalten durch Expositionen der auch für den Phosphor benutzten Bromsilbergelatine im Licht einer mit Gelbfilter versehenen und, wie besondere kontrollierende Messungen gezeigt haben, mit konstanter Helligkeit bei 4 Volt brennenden Osmiumlampe. Die spektrale Zusammensetzung dieses Lichtes gibt gegenüber dem durch dasselbe Gelbfilter gehenden Phosphorlicht keinen merklichen Unterschied in der photographischen Wirkung.[1])

Sämtliche Versuche sind mit dem von Perutz gelieferten Perortofilm (grün Siegel) ausgeführt, dessen Empfindlichkeitsbereich sich gut der spektralen Zusammensetzung der beob-

1) Vgl. hierüber in der Dissertation.

achteten Bande anpaßt und der sich durch vorzügliche Homogenität der sensiblen Schicht auszeichnet. Die Resultate der besonderen Untersuchung seiner photographischen Eigenschaften ersehe man aus einer an anderer Stelle veröffentlichten Arbeit.[1])

Die Messung der photographischen Schwärzungen (mit $^1/_{10}$ Rodinal in 1 Min.) geschah durch photometrischen Vergleich mit dem von einer Kupfervitriollösung in variabler Schichtdicke durchgelassenen Licht einer Auerlampe mittels eines Kolorimeters mit Lummer-Brodhun-Würfel.

### Untersuchung der Anklingung.

#### a) Versuchsanordnung.

Es sollte zunächst die Abhängigkeit der Intensität des Phosphorlichtes von der Dauer und Intensität der Erregung festgelegt, d. h. konstatiert werden, wie weit die Aufspeicherung von Lichtenergie mit jenen Faktoren anwächst.

Der Phosphor wurde zu diesem Zweck im Innern eines lichtdichten Kastens etwa 30° geneigt unter der Hg-Lampe aufgestellt und beliebige meßbare Zeit exponiert (Fig. 2). Das Licht der Lampe fiel auf ihn durch eine im Kasten befindliche Öffnung, die durch einen Schieber geschlossen werden konnte. Um das von ihm während der Erregung ausgestrahlte Licht zu messen, wurde dem Phosphor gegenüber eine photographische Kamera so angebracht, daß sich Phosphor und Kassette, um möglichst große, photographisch wirksame Intensität zu erhalten, in der doppelten Brennweite des Linsensystems befanden. Das zur Isolierung der $\alpha$-Bande vor dem Objektiv aufgestellte Gelbfilter verhindert jede gleichzeitige photographische Wirkung

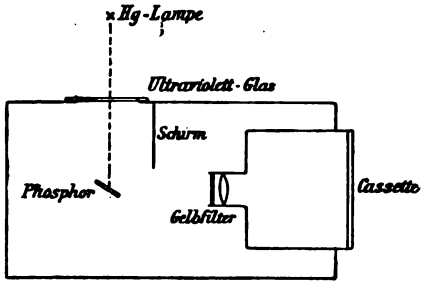



Fig. 2.

1) A. Werner, Zeitschr. f. wissenschaftl. Photographie, Photophysik und Photochemie. „Das photographische Reziprozitätsgesetz bei sensibilisierten Bromsilbergelatinen."

des etwa durch Zerstreuung in die Kamera gelangenden erregenden Lampenlichtes, wenn dieses durch ein geeignetes Ultraviolettglas gefiltert ist, welches nur das äußerste photographisch unwirksame Rot und das den Phosphor gut erregende Licht von $F\ ^1/_3\ G$ an, dagegen kein der spektralen Verteilung der $\alpha$-Bande entsprechendes oder sonst wirksames, das Gelbfilter durchsetzendes Licht durchläßt. Hierdurch wurde zwar die Erregung geschwächt, sie war aber immerhin noch kräftig genug. Wurde zur Kontrolle jetzt an Stelle des Phosphors ein reflektierender Spiegel oder Zinnfolie gebracht und bestrahlt, so erhielt man selbst bei einer Exposition von 30 Sek. noch nicht den geringsten photographischen Effekt. Die Aufnahmen erfolgten nun in der Weise, daß nach einer Brenndauer der Lampe von 10 Min. bei vorerst geschlossenem Schieber durch Öffnen des letzteren die Erregung des Phosphors begann, und von da ab in gewissen Pausen während einer Zeit bis etwa 40 Min. kurzdauernde Expositionen[1]) des Phosphors auf einen in der Kassette verschiebbaren Filmstreifen vorgenommen wurden. Unter Zuhilfenahme der stets erforderlichen zugehörigen Vergleichsschwärzungskurve der Osmiumlampe war dann die zu beliebiger Zeit nach Beginn der Erregung vorhandene Phosphorintensität zu ermitteln.

Verfolgt wurde das Anklingen der Bande bei drei verschiedenen erregenden Intensitäten, die durch Abstandsänderungen der Lampe vom Phosphor erreicht und photographisch bestimmt wurden. Sie betrugen im Mittel:

$$1 : 0{,}045 : 0{,}020.$$

### b) Resultate.

Der für den kleinsten Lampenabstand, d. h. die größte erregende Intensität 1 gewonnene Intensitätsverlauf ist in der beistehenden Tab. I verzeichnet, in welcher in der Kolumne 1 die Zeit nach Beginn der Erregung, in den folgenden sechs die zu dieser Zeit vorhandene Phosphorintensität, bezogen auf die Zeiteinheit, wie sie bei der bestimmten Wahl der Anord-

1) Bei stärkerer erregender Intensität wurden 10 Sek., bei schwächerer bis zu 5 Min. exponiert.

nung im photographischen Bild, die Osmiumlampe in 2 m Abstand als Einheit gesetzt, nach sechs unabhängigen Versuchen gegeben wird.

Tabelle I.

| Zeit nach Beginn der Erregung | Erregende Intensität = 1 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 [$H_2O$] | 7 Uran |
| 5″ | 3,34 | 2,79 | 2,08 | 1,91 | 2,54 | 1,75 | 1,31 |
| 25 | 2,53 | 2,92 | 2,08 | 2,01 | 2,40 | 1,75 | 1,00 |
| 55 | 2,53 | 2,92 | 2,35 | 2,08 | 2,46 | 1,56 | 1,00 |
| 1m 15 | 2,79 | 2,76 | 2,35 | 2,01 | 2,46 | 1,40 | 1,18 |
| 1 45 | 2,76 | 2,66 | — | — | — | 1,36 | 1,04 |
| 3 5 | 2,82 | 2,50 | 2,08 | 1,91 | 2,40 | 1,51 | 1,04 |
| 8 5 | 2,70 | 2,22 | 2,17 | 1,97 | 2,25 | 1,40 | 0,92 |
| 14 5 | 2,40 | 2,14 | 2,17 | 1,91 | 1,94 | 1,20 | 0,82 |
| 20 5 | 2,17 | 1,95 | 1,82 | 1,81 | 1,99 | 0,94 | 0,79 |
| 29 5 | — | — | — | — | 2,02 | — | — |
| 30 5 | 2,12 | 1,88 | 1,68 | 1,76 | — | 1,05 | 0,63 |
| 40 5 | 2,09 | 1,78 | 1,62 | 1,65 | 2,02 | 1,10 | 0,68 |

Den ermittelten Verlauf zeigt deutlicher die graphische Darstellung, wobei die einzelnen Kurven zwecks besserer Anschaulichkeit übereinander gezeichnet sind (Fig. 3).

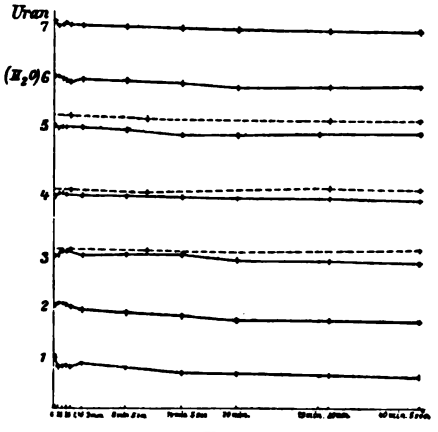


Fig. 3.

Kurven und Tabelle zeigen, daß die Phosphorintensität fast unmittelbar bei Beginn der Erregung ihren, für den speziellen Fall der erregenden Intensität möglichen maximalen Wert erreicht, wenn man von dem in einigen Fällen (2, 3 und 4) beobachteten, außerordentlich schwachen und vielleicht auf Versuchsfehler zurückzuführenden Anstieg absieht. Übereinstimmend aus allen Versuchen findet sich demgegenüber, daß ein deutlich wahrnehm-

barer Abfall der Intensität zu konstatieren ist, der mit der Dauer der Erregung anzuwachsen scheint.[1])

Als Ursache dieses Abfalles hätte etwaige Lampeninkonstanz angesehen werden können. Um diesen Einwand zu untersuchen, wurde gleichzeitig mit der Erregung ein Bruchteil der erregenden Strahlung durch ein eingeschobenes Metallblech seitlich in eine zweite Kamera reflektiert und zu verschiedenen Zeiten photographisch fixiert. Die so erhaltenen Lampenintensitäten sind in den gleichzeitig oben eingezeichneten gestrichelten Kurven für einige Versuche (Nr. 3, 4 und 5) gegeben. Man erkennt nahezu völlige Konstanz der Lampe und muß daher den beobachteten Abfall einer anderen Ursache zuschreiben.

Durch Zwischenschalten einer Wasserschicht zwischen Lampe und Phosphor wurde eine möglicherweise eintretende kleine Temperaturerhöhung des Phosphors (eine solche war jedenfalls mit Thermometer nicht nachweisbar) auszuschalten versucht. Die damit erhaltene Intensitätskurve ist durch Nr. 6 gegeben. Sie zeigt keinen merklichen Unterschied gegenüber den zuerst gewonnenen Kurven, so daß wohl auch eine Erwärmung als mögliche Ursache des Abfalles nicht anzunehmen ist. So muß also der Phosphor selbst diese Erscheinung hervorrufen. Bemerkenswert ist, daß auch die Fluorescenzstrahlung von Uranglas, in derselben Weise untersucht wie der Phosphor, ganz analoges Verhalten zeigte; vgl. Nr. 7 der Tab. I. Die Erscheinung erinnert an die bei Fluorescenzerregung des Glases in gasverdünnten Röhren bekannte Ermüdungserscheinung und macht sich offenbar um so stärker geltend, je größer die Intensität der Erregung ist.

Die den oben beschriebenen entsprechenden Aufnahmen in den größeren Abständen des Phosphors von der Lampe, also bei den erregenden Intensitäten 0,045 und 0,020, lassen nämlich um so weniger Abfall der Kurven erkennen, je geringer die Intensität war; bei der erregenden Intensität 0,020 ist kein merklicher Abfall mehr zu konstatieren.

Die nachfolgende Tab. II, welche die Mittelwerte der aus

1) Die begrenzte Brenndauer der Lampe gestattete nur eine etwa einstündige Erregung.

verschiedenen Versuchen erhaltenen Phosphorintensitäten die drei Fälle der verschiedenen erregenden Intensitäten einigt, gestattet einen Einblick in den Zusammenhang b Größen.

Tabelle II.

| Zeit nach Beginn der Erregung | Erregende Intensität | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 0,045 | 0,020 |
| 5″ | 2,53 | — | — |
| 25 | 2,39 | — | — |
| 55 | 2,47 | — | — |
| 1m 15 | 2,47 | — | — |
| 1 30 | — | 0,151 | — |
| 2 30 | — | — | 0,068 |
| 3 5 | 2,34 | — | — |
| 5 30 | — | 0,132 | — |
| 8 5 | 2,26 | — | — |
| 9 30 | — | 0,132 | 0,051 |
| 14 5 | 2,11 | — | — |
| 15 30 | — | 0,110 | — |
| 16 30 | — | — | 0,056 |
| 20 5 | 1,95 | — | — |
| 20 30 | — | 0,11 | — |
| 23 30 | — | — | 0,062 |
| 25 30 | — | 0,10 | — |
| 30 5 | 1,86 | — | — |
| 30 30 | — | — | 0,057 |
| 31 30 | — | 0,101 | — |
| 36 30 | — | 0,101 | — |
| 37 30 | — | — | 0,056 |
| 40 5 | 1,83 | — | — |
| 40 30 | — | 0,11 | — |

Das Verhältnis der Anfangswerte der Erregung für drei Intensitäten

0,063 : 0,151 : 2,53 oder

0,020 : 0,047 : 0,79

stimmt für die schwächeren Intensitäten nahe überein dem Verhältnis der erregenden Intensitäten

0,020 : 0,045 : 1,

während der geringere Wert bei höchster Intensität die Annäherung der Erregbarkeit an einen Grenzwert andeutet.

### Die Untersuchung der Abklingung.

Um das Gesetz der Abklingung des erregten Phosphorlichtes festzustellen, wurde die zu beliebig herausgewählter Zeit nach Schluß der Erregung noch vorhandene Phosphorintensität in ähnlicher Weise photographisch ermittelt, wie dies für die Anklingung beschrieben war. Da aber die Benutzung des bisherigen Apparates infolge des außerordentlich schnellen Abfalles der Phosphorintensität sofort zu Beginn der Abklingung keine genügenden Schwärzungen ermöglichte, so wurde der leuchtende Phosphor unmittelbar nach Schluß der Erregung aus dem Apparat entfernt und in einem lichtdichten Kasten nur einige Millimeter unter dem photographischen Film aufgestellt. Phosphor und Film waren durch Gelbfilter und einen Metallschieber voneinander getrennt, der nach dem Schlage eines genau regulierten Metronoms geöffnet und geschlossen werden konnte. Exponiert wurde von 20 Sek. nach Schluß der Erregung an in der Regel noch zu zwölf verschiedenen Zeitpunkten in Verlauf von etwa 35 Min. Der Phosphor war dann so weit abgeklungen, daß die Empfindlichkeit der verwandten Films nicht mehr ausreichte, um weitere Bilder zu erhalten. Die Expositionszeit konnte zu Anfang einige wenige Sekunden betragen, während später eine Dauer von Minuten erforderlich war.

#### 1. Abklingung bei Erregung im direkten Licht der Hg-Lampe.

Die Abklingung des Phosphors wurde in der eben beschriebenen Weise untersucht für verschiedene Dauer und Intensität der Erregung. Die letztere wurde wieder, wie früher bei der Anklingung erwähnt, durch Abstandsänderung des Phosphors von der Lampe variiert. Die Abstände waren 20 cm, 100 cm und 200 cm, und die, auf photographischem Wege ermittelten, entsprechenden Intensitäten

$$1 : 0{,}0646 : 0{,}0162.$$

Das Gesamtergebnis aller zwölf Versuche mit variierter Erregungsdauer und erregender Intensität stellt Tab. III dar.

| Zeit nach Schluß der Erregung | Erregende Intensität = 1 | | | | | | Erreg. Intens. = 0,0646 | | | Erreg. Intens. = 0,0162 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Erregungsdauer | | | | | | Erregungsdauer | | | Erregungsdauer | | |
| | 2″ | 5″ | 10″ | 30″ | 3m | 10m | 77,4″ | 7m 44″ | 46m 27″ | 5m 10″ | 31m 28″ | 60m |
| 21,5″ | 11,630 | 19,5 | 22,58 | 29,166 | 29,083 | 33,00 | 8,40 | 13,20 | 12,04 | 3,315 | 5,58 | 4,31 |
| 33 | 8,586 | 12,79 | 15,64 | 25,286 | 22,286 | 24,20 | 5,89 | 7,20 | 7,99 | 2,611 | 3,50 | 3,842 |
| 66 | 4,247 | 7,58 | 9,40 | 13,48 | 14,29 | 12,88 | 3,72 | 5,1 | 4,70 | 1,736 | 2,70 | 2,82 |
| 99 | 2,750 | 4,88 | 6,60 | 8,911 | 9,823 | 8,99 | 2,65 | 3,8 | 3,28 | 1,453 | 2,32 | 2,54 |
| 165 | 1,658 | 2,724 | 4,09 | 5,026 | 6,053 | 5,104 | 1,70 | 2,57 | 2,35 | 0,952 | 1,67 | 1,80 |
| 235 | 1,145 | 1,908 | 2,60 | 3,408 | 4,079 | 3,184 | 1,12 | 1,86 | 1,84 | 0,64 | 1,22 | 1,256 |
| 330 | 0,809 | 1,257 | 1,49 | 2,238 | 3,136 | 2,176 | 0,79 | 1,17 | 1,27 | 0,57 | 0,94 | 0,918 |
| 545 | 0,41 | 0,691 | 0,738 | 1,131 | 1,557 | 1,116 | 0,39 | 0,70 | 0,74 | 0,31 | 0,55 | 0,513 |
| 760 | 0,235 | 0,43 | 0,473 | 0,729 | 0,902 | — | 0,26 | 0,43 | 0,49 | 0,187 | 0,40 | 0,309 |
| 975 | 0,145 | 0,254 | 0,329 | 0,541 | 0,613 | — | 0,14 | 0,29 | 0,36 | 0,13 | 0,29 | 0,23 |
| 1305 | 0,056 | 0,130 | 0,186 | 0,347 | 0,377 | — | — | 0,17 | 0,23 | — | 0,22 | 0,16 |
| 1905 | — | 0,052 | 0,071 | 0,184 | 0,186 | — | — | 0,086 | 0,10 | — | 0,108 | 0,092 |

Der Verlauf der Abklingung ist außerdem in der Auswahl durch die Kurven Nr. 8, 9, 10 und 11 (Fig. 4) veranschaulicht.

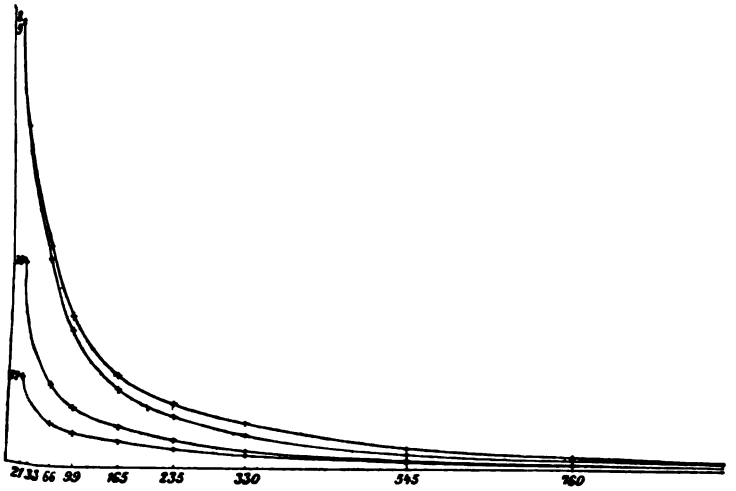



Fig. 4. Abklingung bei Erregung im direkten Licht.
Nr. 8 u. 9. Intensität = 1.
Nr. 10. Intensität = 0,0646.
Nr. 11. Intensität = 0,0162.

2. Abklingung bei Erregung im gefilterten Licht. (Ultraviolett-Glas.)

Da zur Untersuchung der Anklingung gefiltertes Licht benutzt werden mußte, war es wichtig, auch die Abklingung der in dieser Weise erregten Phosphore zu verfolgen, um quantitativ beide Phänomene, die An- und Abklingung, direkt aneinander anschließen zu können. Der Phosphor wurde hier immer nach ca. 40 Min., innerhalb deren die Anklingung bestimmt wurde, in den schon beschriebenen Kontaktapparat zur photographischen Festlegung der Anklingungsintensitäten gebracht.

Die Resultate geben Tab. IV und in der Auswahl die Kurven Nr. 12, 13, 14, 15, 16 und 17, denen die erregenden Intensitäten 1, 0,045 und 0,020 zugrunde lagen (Fig. 5). Die Intensitäten sind hier jedoch in anderem Maße gegeben als bei der zugehörigen Anklingung.[1])

1) Vgl. p. 186 u. 187.

Tabelle IV.

| Zeit nach Schluß der Erregung | Erregende Intensität = 1 | | | | | | Erreg. Int. = 0,045 | | Erreg. Int. = 0,020 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Erregungsdauer ca. 40″ | | | | | | ca. 40″ | | ca. 40″ | |
| 21,5″ | 13,61 | 12,02 | 16,4 | 15,48 | 17,66 | 12,02 | 5,80 | 5,48 | 4,28 | 3,73 |
| 33 | 9,30 | 8,11 | 10,71 | 10,33 | 10,9 | 8,40 | 5,56 | 4,38 | 3,33 | 3,42 |
| 66 | 4,86 | 4,13 | 5,38 | 4,65 | 5,01 | 4,27 | 3,03 | 2,56 | 2,17 | 2,03 |
| 145 | — | — | 1,79 | — | — | — | 1,35 | 1,15 | 1,13 | 1,05 |
| 165 | — | — | — | 1,45 | 1,48 | — | — | — | — | — |
| 235 | — | — | 1,01 | 0,95 | 0,98 | — | 0,74 | 0,71 | 0,78 | 0,54 |
| 330 | 0,84 | 0,58 | 0,74 | 0,55 | 0,63 | 0,68 | 0,55 | 0,47 | 0,54 | 0,39 |
| 545 | — | — | 0,35 | 0,32 | 0,44 | — | 0,33 | 0,29 | 0,31 | 0,22 |
| 760 | — | — | 0,21 | 0,19 | 0,24 | — | 0,208 | 0,17 | 0,194 | 0,15 |
| 975 | 0,206 | 0,139 | 0,14 | 0,13 | 0,125 | 0,13 | 0,113 | 0,13 | 0,134 | 0,077 |
| 1305 | 0,156 | 0,081 | 0,085 | 0,083 | 0,081 | 0,10 | 0,063 | 0,07 | 0,086 | 0,049 |

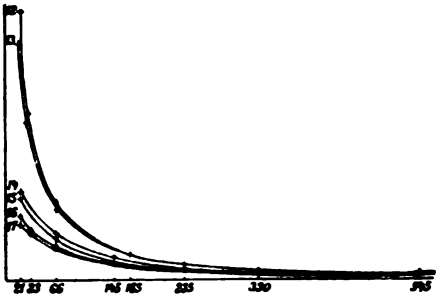


Fig. 5. Abklingung bei Erregung im gefilterten Licht.
Nr. 12 u. 13. Intensität = 1.
Nr. 14 u. 15. Intensität = 0,045.
Nr. 16 u. 17. Intensität = 0,020.

**Resultate.**

Mußte der Versuch E. Becquerels, das Abklingen der Phosphore durch eine Exponentialfunktion der Zeit oder durch Summen solcher Funktionen darzustellen, notwendigerweise an der voraussichtlich recht komplizierten Emission seiner Präparate scheitern, so konnte möglicherweise das Betrachten einer einzelnen Bande, wie hier geschehen, zum Erfolg führen.

Geschieht die Abklingung nach dem Exponentialgesetz, so gilt:

$$J = c\,e^{-\alpha t}$$

und es würde die hieraus sich ergebende Größe

$$\alpha = \frac{\log \text{nat}\, J_1 - \log \text{nat}\, J_2}{t_2 - t_1}$$

für alle Intensitäten der abklingenden Bande eine konstante sein. Hier folgt eine tabellarische Zusammenstellung der gefundenen Konstanten für eine Anzahl von Kurven. Man sieht aus den in der letzten Kolumne befindlichen Mittelwerten der Abklingungskonstanten, daß diese mit zunehmender Zeit progressiv kleiner und kleiner werden, d. h. die Abklingung wird langsamer und langsamer, ist also keineswegs exponentiell. Auch der Versuch, die Abklingung der Bande durch Summen von Exponentialfunktionen darzustellen, schlug fehl.

Tabelle V.

| Zeit nach Schluß der Erregung | Direktes Licht. Intensität = 1 | | | | | | Mittelwerte der Abklingungskonstanten $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Erregungsdauer | | | | | | |
| | 2″ | 5″ | 10″ | 30″ | 3 m | 10 m | |
| 21,5″ | 0,0264 | 0,0367 | 0,032 | 0,013 | 0,023 | 0,027 | 0,0263 |
| 33 | 0,022 | 0,0159 | 0,015 | 0,019 | 0,013 | 0,019 | 0,0173 |
| 66 | 0,013 | 0,013 | 0,009 | 0,013 | 0,011 | 0,011 | 0,0117 |
| 99 | 0,005 | 0,008 | 0,008 | 0,009 | 0,008 | 0,0085 | 0,0076 |
| 165 | 0,008 | 0,0051 | 0,0065 | 0,006 | 0,0055 | 0,0067 | 0,0063 |
| 235 | 0,0035 | 0,0044 | 0,0058 | 0,0044 | 0,0028 | 0,0040 | 0,0041 |
| 330 | 0,0032 | 0,0028 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0031 |
| 545 | 0,0026 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0025 | — | 0,0023 |
| 760 | 0,0021 | 0,0025 | 0,0017 | 0,0014 | 0,0018 | — | 0,0019 |
| 800 | — | — | — | — | — | 0,0019 | 0,0019 |
| 975 | 0,0029 | 0,0020 | 0,0018 | 0,0014 | 0,0015 | — | 0,0018 |
| 1205 | — | — | — | — | — | 0,0015 | 0,0015 |
| 1305 | — | 0,0015 | 0,0015 | 0,0010 | 0,0011 | — | 0,0013 |
| 1800 | — | — | — | — | — | 0,0010 | 0,0010 |
| 2700 | — | — | — | — | — | 0,0008 | 0,0008 |
| 3780 | — | — | — | — | — | 0,0007 | 0,0007 |
| 4200 | — | — | — | — | — | 0,0006 | 0,0006 |
| 5100 | — | — | — | — | — | 0,0004 | 0,0004 |

Nun sagt E. Becquerel[1]), daß die innerhalb gewisser Grenzen geltende empirische Formel

$$J^n(c + t) = c$$

einen Begriff von der Schnelligkeit geben könne, mit welcher die Abklingung des Phosphorescenzlichtes vor sich ginge. Die Abklingungsgeschwindigkeit wäre also gegeben durch den Differentialquotienten

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{J^{n+1}}{nc},$$

wenn die Intensität nach Schluß der Belichtung zur Einheit genommen wird. Nach Becquerels Erfahrungen liegt $n$ zwischen $^1/_2$ und 1 und man erhält für $n = {}^1/_2$

$$\frac{1}{\sqrt{J}} = \frac{1}{c}(c + 1).$$

Diese Gesetzmäßigkeit ist nun auch wenigstens auf einen Teil — nämlich den späteren Verlauf — der erhaltenen Abklingungswerte der gesonderten $\alpha$-Bande anwendbar. Trägt man nämlich als Ordinaten eines Koordinatensystems die reziproke Wurzel der gefundenen Phosphorintensität als Funktion der zur Abszisse gewählten Zeit $t$ auf, so liegen die späteren Werte sehr nahe, wie es der obigen Gleichung entspricht, auf einer Geraden (Fig. 6). Der anfängliche Verlauf der Abklingung bleibt allerdings von dieser Gesetzmäßigkeit ausgeschlossen.[2])

---

1) E. Becquerel, La Lumière p. 295.

2) Während der Ausarbeitung dieser Untersuchungen erschien von den Herren Nichols und Merritt (Physikal Review, May—July 1906) eine Arbeit, in welcher mit Hilfe eines Spektrophotometers (also okular!) das Abklingen phosphorescierenden Zinksulfids untersucht wird. Die Absicht der Autoren war ebenfalls die, eine einzelne Bande zu untersuchen. Eine solche herrschte nach Angabe der Verfasser in deren Phosphor vor; indessen waren noch andere, wenn auch schwache Banden zugegen, die nicht, wie hier geschehen, durch besondere Anordnung eliminiert wurden. In Übereinstimmung mit meinen Resultaten finden sie den späteren Verlauf der Abklingung (etwa 4 Min. nach Schluß der Belichtung) dargestellt durch die Becquerelsche Gleichung $1/\sqrt{J} = a + bt$. Während aber, wie weiter unten noch gezeigt werden soll, der durch den Momentanprozeß überwiegend dargestellte Beginn der Abklingung von mir als

Der Abfall der Kurve erfolgt hier, wie die beistehende Zeichnung (Fig. 6) ersehen läßt, viel schneller als derjenige der späteren Abklingung und stellt offenbar den von den Herren Lenard und Klatt gefundenen Momentanprozeß dar, während die lang-

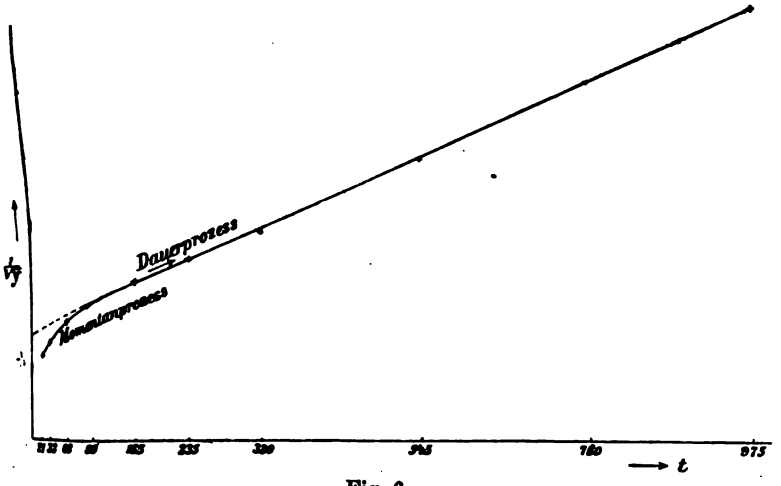



Fig. 6.

samere Abklingung den Dauerprozeß gibt. Wir kommen so nicht nur zu einer Bestätigung des Bestehens, sondern auch zu einer scharfen Sonderung der beiden sich übereinander lagernden Prozesse. Untersucht sei zunächst der Verlauf des Dauerprozesses.

### Der Dauerprozeß.

Verfolgen wir den Lauf der Geraden (vgl. Fig. 6) bis zur Ordinatenachse, so stellt die Größe des dort abgeschnittenen Ordinatenstückes offenbar die reziproke Wurzel der für die

---

angenähert exponentiell gefunden worden ist, erhalten die genannten Herren, bei gleicher graphischer Auftragung, auch für den Beginn des Abklingens eine gerade Linie, für den späteren Verlauf eine andere; beide Linien gehen allmählich ineinander über. Betrachtet man das phosphorescierende Zinksulfid als gleichartig mit den Erdalkalisulfiden (vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 15. p. 649), so sieht dies nach meinen Resultaten aus, als hätten sich bei den Herren Nichols und Merritt die Dauerprozesse zweier verschiedener Banden übereinander gelagert.

Zeit 0 vorhandenen Anfangsintensität $J_0$ des Dauerprozesses der Bande, die wir kurz Bandenintensität nennen wollen, dar. Bezeichnen wir weiter die reziproke Tangente des Neigungswinkels der Geraden als Bandendauer $D$ — die Bande klingt um so langsamer ab, je kleiner die Neigung —, so würde die Gerade auch durch

$$\frac{1}{\sqrt{J}} - \frac{1}{\sqrt{J_0}} = \frac{t}{D}$$

darstellbar sein und sich in dieser Form zur direkten Ermittelung der Bandenintensität $J_0$ und Bandendauer $D$ verwerten lassen, für welche Größe somit nunmehr ebenfalls ein exaktes Maß gewonnen ist.

In der folgenden Tab. VI sind für sämtliche Versuche bei Erregung im direkten Licht und in Tab. VII im gefilterten Licht diese Bandenintensitäten und Bandendauern zusammengestellt.

Tabelle VI.

| Erregungsdauer | Abhängigkeit der Bandenintensität von Erregender Intensität | | | Abhängigkeit der Bandendauer von Erregender Intensität | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0,0646 | 0,0162 | 1 | 0,0646 | 0,0162 |
| 2″ | 5,9 | — | — | 471 | — | — |
| 5 | 8,4 | — | — | 607 | — | — |
| 10 | 8,7 | — | — | 688 | — | — |
| 30 | 13,7 | — | — | 854 | — | — |
| 1m 17 | — | 4,5 | — | — | 490 | — |
| 3 — | 20,7 | — | — | 959 | — | — |
| 5 10 | — | — | 2,3 | — | — | 470 |
| 7 44 | — | 6,5 | — | — | 686 | — |
| 10 — | 12,8 | — | — | 832 | — | — |
| 10 — | 10,4 | — | — | 786 | — | — |
| 31 28 | — | — | 3,3 | — | — | 676 |
| 46 27 | — | 4,9 | — | — | 806 | — |
| 60 — | — | — | 4,0 | — | — | 590 |

Tabelle VII.

| Erregungsdauer | Abhängigkeit der Bandenintensität von Erregender Intensität | | | Abhängigkeit der Bandendauer von Erregender Intensität | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0,045 | 0,020 | 1 | 0,045 | 0,020 |
| ca. 40″ | 3,1 | 2,5 | 2,0 | 516 | 434 | 500 |
| | 3,3 | 2,0 | 1,5 | 456 | 440 | 429 |
| | 2,9 | — | — | 455 | — | — |
| | 4,6 | — | — | 437 | — | — |
| | 2,8 | — | — | 443 | — | — |

Die Bandenintensität nimmt mit der Größe der erregenden Intensität zu, erreicht aber offenbar sehr bald einen Maximalwert, wie es auch für die Anklingung der gesamten Bande früher beobachtet war. Auch die Erregungsdauer verursacht eine sehr deutliche Steigerung der Bandenintensität bis zu einem Maximum, das um so schneller erreicht ist, je intensiver die erregende Strahlung. Bei noch längerer Erregung scheint, wie die Anklingung schon zeigte, wieder ein Abfall der Bandenintensität einzutreten. Betrachtet man schließlich noch die durch gleiche erregende Lichtmengen bei verschiedenen Intensitäten erhaltenen Phosphorintensitäten (vgl. die Kurven Nr. 8, 10 und 11), so zeigt sich auch hier in ganz ähnlicher Weise wie bei photographischen Platten eine sehr deutliche Abweichung vom Reziprozitätsgesetz, wonach der gleichen Lichtmenge $it$ derselbe Effekt entsprechen würde.

Wenn hier eine Steigerung der Intensität durch die Dauer der Bestrahlung resultiert in scheinbarem Gegensatz zu dem bei der Anklingung konstatierten Verhalten des Phosphors, so läßt sich eine Erklärung hierfür wohl dadurch geben, daß der durch die Ermüdung bedingte Intensitätsabfall sich nicht kompensieren läßt durch den infolge des Anklingens der Dauerbande sich ergebenden Intensitätszuwachs.

Eine wesentliche Abhängigkeit der *Bandendauer* von der erregenden Intensität besteht weder beim direkten noch beim gefilterten Licht; das letztere zeigt dies besonders deutlich (Tab. VII).

Es ist dies eine quantitative Bestätigung der bereits von den Herren Lenard und Klatt aus der einheitlichen An-

und Abklingung für die gesamte Erregungsverteilung einer Bande erkannten Eigenschaft der Bandendauer.[1]) Mit der *Dauer* der Erregung scheint auch die Bandendauer etwas zuzunehmen, ebenso wie es für die Bandenintensität konstatiert war.

### Der Momentanprozeß.

Um jetzt die Erscheinung der anfänglich rascheren Abklingung für sich getrennt verfolgen zu können, war der soeben studierte Dauerprozeß in Abzug zu bringen von der anfänglichen Gesamtemission durch Rückwärtsberechnung der für die Anfangszeiten der Abklingung bestehenden Intensitäten des Dauerprozesses. Den Verlauf des Momentanprozesses gibt für einen willkürlich herausgegriffenen Fall beifolgende Zeichnung[2]) (Fig. 7).

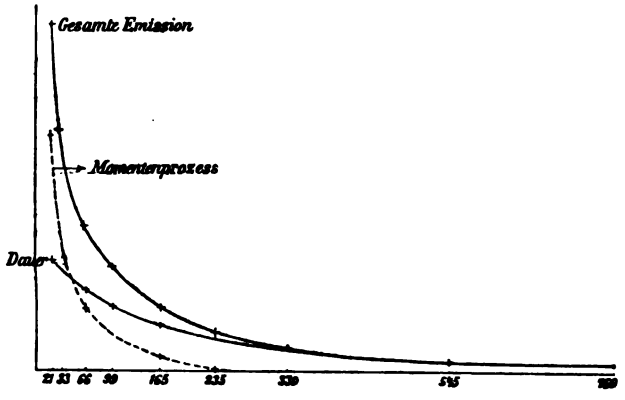



Fig. 7.

Es wurde nun versucht, einen analytischen Ausdruck aufzustelllen für den Vorgang des momentanen Abklingens. Das Resultat war, daß sich der der Beobachtung zugängliche Teil des momentanen Prozesses darstellen läßt durch eine Exponentialfunktion nach einer Potenz der Zeit

$$J = J_1 e^{-\alpha t^m},$$

1) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 467.
2) Der Momentanprozeß ist gestrichelt gezeichnet.

wo $m$ für alle untersuchten Kurven gleich oder doch sehr nahe gleich $^1/_2$ war.

Die folgenden Tabb. VIIIa und VIIIb geben für einige Abklingungen verschiedener erregender Intensität in Kolumne 2 immer zu den einzelnen Beobachtungszeiten das Gesamtlicht, in Kolumne 3 und 4 getrennt die Intensitäten des Dauer- und Momentanprozesses und in Kolumne 5 endlich die für den betreffenden Wert von $m$ berechneten Abklingungskonstanten. Man sieht, daß von etwa 4 Min. nach Schluß der Erregung an ein Einfluß des Momentanprozesses auf den Dauerprozeß nicht mehr besteht. Für sehr starke erregende Intensität, wie sie durch Exposition im direkten Licht der Hg-Lampe erreicht wird, scheint $m$ einen etwas kleineren Wert als $^1/_2$ anzunehmen, bei den schwächsten erregenden Intensitäten einen etwas größeren Wert. In Tab. VIIIa liegt mittlere erregende Intensität vor, d. h. die stärkste des gefilterten Lichtes; $m = 0{,}5$. In Tab. VIIIb sind die Abklingungskonstanten des Momentanprozesses berechnet für stärkste und schwächste Erregung; $m = 0{,}4$ und $m = 0{,}6$.

Tabelle VIIIa.

| Zeit nach Schluß der Erregung | Gesamtintensität | Dauerprozeß | Momentanprozeß | $\alpha$ $m = ^1/_2$ | Gesamtintensität | Dauerprozeß | Momentanprozeß | $\alpha$ $m = ^1/_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21,5″ | 15,48 | 2,44 | 13,04 | 0,43 | 16,40 | 4,5 | 11,90 | 0,51 |
| 33 | 10,33 | 2,27 | 8,06 | | 10,71 | 4,0 | 6,71 | |
| 66 | 4,65 | 1,80 | 2,85 | 0,44 | 5,38 | 3,09 | 2,29 | 0,45 |
| 99 | — | — | — | | — | — | — | |
| 145 | — | — | — | 0,44 | — | — | — | 0,50 |
| 165 | 1,45 | 1,09 | 0,36 | | 1,79 | 1,56 | 0,23 | |
| 235 | 0,95 | 0,83 | 0,12 | 0,44 | 1,01 | 1,03 | | |
| 330 | 0,55 | 0,56 | — | | 0,74 | 0,73 | | |
| 545 | 0,32 | 0,33 | — | | 0,35 | 0,36 | | |
| 760 | 0,19 | 0,19 | — | | 0,21 | 0,21 | | |
| 800 | — | — | — | | — | — | | |
| 975 | 0,13 | 0,13 | — | | 0,14 | 0,14 | | |
| 1205 | 0,083 | 0,080 | — | | — | — | | |
| 1305 | — | — | — | | 0,085 | 0,086 | | |

Tabelle VIIIb.

| Zeit nach Schluß der Erregung | Gesamtintensität | Dauerprozeß | Momentanprozeß | $\alpha$ $m = 0{,}4$ | Gesamtintensität | Dauerprozeß | Momentanprozeß | $\alpha$ $m = 0{,}6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21,5″ | 22,58 | 7,3 | 15,28 | 0,82 | 4,28 | 1,82 | 2,46 | 0,22 |
| 33 | 15,64 | 6,62 | 9,02 | | 3,33 | 1,69 | 1,64 | |
| 66 | 9,4 | 5,3 | 4,1 | 0,70 | 2,17 | 1,45 | 0,72 | 0,20 |
| 99 | 6,8 | 4,27 | 2,53 | 0,51 | — | — | — | 0,21 |
| 145 | — | — | — | 0,57 | 1,13 | 1,02 | 0,11 | |
| 165 | 4,1 | 2,97 | 1,13 | | — | — | | |
| 235 | 2,6 | 2,15 | 0,45 | 0,80 | 0,78 | 0,80 | | |
| 330 | 1,5 | 1,50 | | | 0,54 | 0,54 | | |
| 545 | 0,738 | 0,77 | | | 0,31 | 0,31 | | |
| 760 | 0,473 | 0,45 | | | 0,19 | 0,20 | | |
| 800 | — | — | | | — | — | | |
| 975 | 0,329 | 0,323 | | | 0,134 | 0,14 | | |
| 1205 | — | — | | | — | — | | |
| 1305 | 0,186 | 0,20 | | | 0,086 | 0,09 | | |

**Zusammenhang zwischen An- und Abklingung.**

Die früher beobachteten Werte der Anklingung gestatten nun einen Vergleich mit den soeben mitgeteilten Werten der Abklingung, beide Werte im erregenden gefilterten Licht erhalten. Um aber einen zahlenmäßigen Zusammenhang auffinden zu können, war die Kenntnis der Verstärkung der photographischen Wirkung erforderlich, welche eintrat beim Übergang von dem zur Ermittelung der Anklingung benutzten Apparat zur Kontaktmethode. Durch vergleichende photographische Aufnahmen einer dem Phosphor nachgebildeten konstanten künstlichen Lichtquelle mit beiden Apparaten fand sich, daß die mit der Kamera erhaltenen Intensitäten mit 728 zu multiplizieren sind, um einen direkten Vergleich mit den durch die Kontaktmethode erhaltenen Intensitäten zu haben.[1])

Während die früheren Anklingungsversuche die Intensität des Phosphorescenzlichtes während der Beleuchtung ergaben, begann bei den Abklingungsversuchen die erste Intensitäts-

1) Näheres hierüber vgl. in der Dissertation.

messung immer erst nach Verlauf von etwa 20 Sek. nach Schluß der Erregung. Die letzteren Intensitäten müssen sich demnach als merklich geringer erweisen als diejenigen während der Erregung. Da nun aus den weiter oben angestellten Beobachtungen für die zu Beginn des Abklingens den gesamten Prozeß überwiegend darstellende Momentanbande eine einfache Gesetzmäßigkeit gefunden ist, muß sich danach auch die zur Zeit Null bestehende Phosphorintensität rückwärts aus den Abklingungsversuchen berechnen lassen. Dieser Versuch ergibt, für eine Anzahl von Kurven durchgeführt, die in der folgenden Tab. IX zusammengestellten Anfangsintensitäten und zum Vergleich die bei der unmittelbar vorhergehenden Erregung gefundenen Intensitäten, welche noch mit dem die ungleichartigen Verhältnisse bei der Exposition berücksichtigenden Faktor multipliziert sind.

Tabelle IX.

| Erregende Intensität | Anfangsintensität | |
|---|---|---|
| | aus der Abklingung berechnet; $m = 1/2$ | aus der Abklingung entnommen |
| 1 | 72,3<br>67,1<br>105,2<br>98,3 } 85,7 | 1522<br>1296<br>1179<br>1201 } 1299 |
| 0,045 | 23<br>22 } 22,5 | 72,8<br>87,4 } 80,1 |
| 0,020 | 13,7 | 43,7 |

Es fällt hier zunächst der außerordentliche Unterschied auf, welcher für die zur Zeit Null bestehende Anfangsintensität einerseits aus der Abklingung, andererseits aus der Anklingung entnommen sich zeigt. Man hat danach, was das Nächstliegende ist, anzunehmen, daß für den ersten Anfang des Momentanprozesses das Exponentialgesetz $e^{-at^m}$ nicht gültig ist, oder auch, daß die Strahlungsfähigkeit des Phosphors während äußerer Energieaufnahme eine viel größere ist als die ohne gleichzeitige Erregung mögliche. Beachtet man, daß die gesamte Abklingung definiert ist durch die Größe der Aufspeicherungsfähigkeit des Phosphors, so würde die Beob-

achtung der Vorstellung entsprechen, daß die aus der Abklingung berechnete Intensität ein Maß ist für die Größe der Aufspeicherung, während die bei der Anklingung beobachtete Intensität die Größe eines unter dem gleichzeitigen Einfluß zugestrahlter Energie möglichen momentanen Leuchtvermögens angibt, das selbst vom Aufspeicherungsvermögen unabhängig sein kann, und das auch — wie die Abhängigkeit der Phosphorstrahlung von der erregenden Intensität in den beiden Fällen zeigt — nicht so rasch mit wachsender Erregungsenergie ein Maximum zu erreichen scheint wie das Aufspeicherungsvermögen. Wie schon die Herren Lenard und Klatt gezeigt haben [1]), laufen bei erregender Belichtung in der Tat zwei die Bande betreffende Vorgänge gleichzeitig im Phosphor ab, nämlich erstens schnell an- und abklingendes Leuchten der Bande, und zweitens eine mit der Dauer und der Intensität der Bestrahlung asymptotisch anwachsende Aufspeicherung von Erregung. Das momentane Leuchten wird unmittelbar bei Schluß der Erregung plötzlich abfallen, und der gesamte folgende zeitliche Intensitätsverlauf wird dann nur noch durch die beiden ermittelten Gesetzmäßigkeiten für den Momentan- und Dauerprozeß, die beide ihre Energie der Aufspeicherung entnehmen, beschrieben sein.

Diesen plötzlichen Intensitätsabfall zeigt auch die unmittelbare Beobachtung. Wird nämlich die Erregung plötzlich unterbrochen, so fällt die Phosphorintensität, okular betrachtet, völlig momentan beträchtlich ab, um danach erst langsamer abzuklingen. Auch die speziell in dieser Richtung angestellten photographischen Versuche stimmen hiermit vollkommen überein.

### Das Verhältnis zwischen Momentan- und Dauerprozeß in der Gesamtemission.

Die gesamte Phosphoremission wäre nach vorstehendem aufzufassen als ein nur während der Erregung und Aufspeicherung von Energie in sehr hohem Maße stattfindendes momentanes Leuchten und ein gleichzeitiges Abklingen, das in zwei getrennten, sich übereinander lagernden Prozessen abläuft, einem sehr rasch abfallenden Momentanprozeß und einem sehr viel langsamer abklingenden und die gesamte Emission

1) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 666.

des Phosphors bald nach Schluß der Erregung — nach Verlauf von 4 Min. etwa — beschreibenden Dauerprozeß. Gewisse Beobachtungen deuten darauf hin, daß der Momentan- und Dauerprozeß nicht immer in gleichem Maße die Emission darstellen, sondern daß der eine gegen den anderen mehr oder weniger zurücktreten kann, wie schon von den Herren Lenard und Klatt bemerkt worden ist[1]), die ein deutliches Auftreten des Momentanprozesses im Dauerzustand des Leuchtens bei Erregung mit Licht nicht, dagegen bei Erregung mit langsamen Kathodenstrahlen geringer Intensität beobachtet haben. Hier zeigen sich nunmehr, auch bei Erregung durch Licht, im Dauerzustand der Bande beide Prozesse, Momentan- und Dauerprozeß, in voller Deutlichkeit. Man muß danach, da auch schon die Herren Lenard und Klatt es für sehr unwahrscheinlich gehalten[1]), daß der Prozeß des momentanen Leuchtens während der Erregung, der sich sowohl im unteren als im oberen Momentanzustand der Bande vorfindet, im dazwischen liegenden Dauerzustande ganz und allgemein fehlen solle, vermuten, daß die Ursache für diese abweichende Beobachtung zu suchen ist in der verschiedenen spektralen Zusammensetzung der benutzten erregenden Lichtquellen oder vielleicht auch in der Bereitungsweise der Phosphore. Okulare Beobachtungen ergaben bereits, daß nicht alle zu verschiedenen Zeiten hergestellten $SrZnCaF_2$-Phosphore den Momentanprozeß in gleicher Deutlichkeit zeigten. Es konnte ferner nachgewiesen werden, daß der Momentanprozeß mit dem Alter des Phosphors mehr und mehr hervortritt.

In dem von den Herren Lenard und Klatt in der Regel benutzten Filterultraviolett[2]) erregt, zeigte der von mir hergestellte Phosphor fast nur Momentanprozeß, bei stärkerer Intensität, die durch Heranrücken an den Brennpunkt erreicht wurde, trat der Dauerprozeß mehr hervor. Diese Erscheinung steht im Einklang mit dem bereits von den Herren Lenard und Klatt beobachteten auffallenden Unterschied in der Erregung von Dauer- und Momentanprozeß.[3]) Momentanbanden werden im allgemeinen schon durch sehr geringe Lichtstärken

1) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 668.
2) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 244.
3) P. Lenard u. V. Klatt, l. c. p. 477.

gut erregt, während Dauerbanden meist besonders hoher erregender Intensitäten bedürfen, um hell zu erscheinen.

Als nun, um noch größere Intensität zu erzielen, eins der blauen Farbgläser des Filterultravioletts entfernt und damit gleichzeitig eine andere spektrale Verteilung des erregenden Lichtes benutzt wurde, war wieder fast ausschließlich Momentanprozeß vorhanden. Also je nach der spektralen Zusammensetzung der erregenden Lichtquelle wird Momentan- oder Dauerprozeß vorzugsweise erregt. Das ist aber nur dann möglich, wenn *beide Prozesse durch besondere Lichtwellenlängen erregt werden,* wenn sie getrennte Erregungsverteilungen besitzen.

Als nun das durch ein Quarzprisma spektral zerlegte Licht der Hg-Lampe auf den flächenhaft ausgebreiteten Phosphor fiel, ergab sich in der Tat das überraschende Resultat, daß je nach der Wellenlänge Momentan- oder Dauerprozeß erregt wurde.

Diese Abhängigkeit der beiden Prozesse von der Art der Erregung erklärt wohl auch das früher konstatierte Verhalten bei der Anklingung, die in allen hier beobachteten Fällen, im scheinbaren Gegensatz zu entsprechenden Versuchen der Herren Lenard und Klatt, niemals einen allmählichen Anstieg der Phosphorintensität erkennen ließ. Da die Abklingungsversuche für den Dauerprozeß ein zweifelloses Anwachsen mit der Dauer der Erregung zeigen, während der Momentanprozeß sehr rasch seine maximale Erregbarkeit unter bestimmten Verhältnissen erreicht zu haben scheint, so wurde offenbar das von den Herren Lenard und Klatt beobachtete Anwachsen während der Erregung in unserem Falle durch das starke Überwiegen des hier gleichzeitig vorhandenen, dort fehlenden, Momentanprozesses verdeckt.

Vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut zu Kiel ausgeführt auf Anregung von Hrn. Geheimrat Prof. Lenard, dem ich für die wertvollen Ratschläge und vielfachen Unterstützungen im Verlauf der Untersuchungen zu bleibendem Dank verpflichtet bin. Ebenso spreche ich Hrn. Privatdozent Dr. Becker für mannigfache Förderung meinen freundlichsten Dank aus.

Kiel, Physikalisches Institut, August 1907.

(Eingegangen 31. August 1907.)

## 11. *Zur Mechanik der Kapillarschicht; Antwort an K. Fuchs;* *von G. Bakker.*

Durch van der Waals wurde der ordentlichen Versammlung der naturphil. Abteilung der Koninkl. Akad. van Wetensch. zu Amsterdam am 25. November 1899 meine Arbeit: „De potentiaalfuncties

$$\varphi(r) = \frac{Ae^{-qr} + Be^{-qr}}{r}, \quad \varphi(r) = \frac{A\sin(qr+\alpha)}{r}$$

en de potentiaalfunctie von van der Waals" vorgelegt. In dieser Arbeit berechne ich u. a. für einen Punkt in der Kapillarschicht mit Hilfe der Potentialfunktion:

$$-f\frac{e^{-qr}}{r}$$

die Kohäsionen bzw. in einer Richtung senkrecht und parallel der (ebenen) Oberfläche der Kapillarschicht. In der Zeitschr. für physik. Chemie[1]) habe ich diese Rechnungen auch ohne Hilfe einer speziellen Form für die Potentialfunktion durchgeführt und weiter habe ich, sowohl durch eine elementare Betrachtung, wie durch die Rechnung gezeigt, daß die Kapillarkonstante von Laplace betrachtet werden kann als die totale Abweichung von dem Pascalschen Gesetz, und *mit Hilfe dieser Gedanken die Theorie der Kapillarschicht vollständig ausgebildet.*

Fuchs bemerkt nun[2]), daß er die Berechnungen der genannten Kohäsionen schon ausgeführt hat in seiner Arbeit vom November 1889.[3]) Ich danke Hrn. Fuchs für den Hinweis auf seine Arbeit und sie soll die nötige Aufmerksamkeit erhalten. Es sei mir aber gestattet, eine einzige Bemerkung zu

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chem. **28.** p. 708—718. 1899; **33.** p. 477—499. 1900.

2) K. Fuchs, Ann. d. Phys. **23.** p. 807 u. 808. 1907.

3) K. Fuchs, Wiener Ber. **98.** 2. Nov. 1889.

machen. Fuchs sagt: „Meine Arbeit *geht* also geradezu *von dem*, wie mir scheint, selbstverständlichen *Satze aus*, daß die Spannung der Kapillarschicht nichts anderes ist, als die totale Abweichung von dem Pascalschen Gesetz in der Kapillarschicht.“[1]) Nun haben verschiedene Forscher seit langem die große Wichtigkeit einer eingehenden Studie der Kapillarschicht eingesehen. So sieht schon James Thomson in der Grenzschicht zwischen Flüssigkeit und Dampf die Phasen auf dem theoretischen Teil der durch ihn komplettierten Isotherme. Er sagt: „We cannot expect experimental evidence on this part of the curve unless this state of things may exist in some part of the thin superficial stratum of transition from the liquid to its own gas, in which the phenomena of capillarity take place.“[2]) Weiter bemerkt Maxwell: „The surface which forms the boundary between a liquid and its vapour is the seat of phenomena, on the careful study of which depends much of our future progress in the knowledge of the constitution of matter“ und Rayleigh und van der Waals haben eingehende Untersuchungen über die Eigenschaften der Kapillarschicht angestellt. Hervorragende Forscher, wie James Thomson, Maxwell, Rayleigh und van der Waals haben sich also mit der Natur der Kapillarschicht bemüht und dessenungeachtet ist ihnen die Auffassung, wobei die Spannung der Kapillarschicht betrachtet wird, als die totale Abweichung von dem Pascalschen Gesetz, entgangen. Deswegen kam es mir, bevor ich diesen Gedanken als Ausgangspunkt für eine vollständige Ausarbeitung der Theorie der Kapillarität zugrunde legte, *nicht* überflüssig vor, sowohl auf elementare Weise wie durch die Rechnung zu zeigen, daß die genannte Auffassung den Rayleighschen Wert der Laplaceschen Konstante gibt.

1) K. Fuchs, Ann. d. Phys. **23**. p. 808. 1907.

2) J. Thomson, Proc. Roy. Soc. London **20**. p. 1. 1871. Vgl. auch J. P. Kuenen, „Die Zustandsgleichung“.

(Eingegangen 7. September 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 12.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 24.

## 1. *Betrachtungen über die komplizierteren Formen des Zeemaneffektes;* *von W. Voigt.*

### 1. Problemstellung.

Die merkwürdige Gesetzmäßigkeit, die Hr. Runge[1]) bei den komplizierten Typen des Zeemaneffektes nachgewiesen hat, lenkt die Aufmerksamkeit erneut auf jene wunderbaren Phänomene. Zweifellos würde eine theoretische Begründung der Rungeschen Regel einen wichtigen Schritt vorwärts zur vollständigen Theorie der Zeemaneffekte bedeuten, und es werden gewiß schon Versuche in dieser Richtung gemacht worden sein. Bei der großen Wichtigkeit des Problems und bei den ganz außerordentlichen, seiner Lösung anscheinend entgegenstehenden Schwierigkeiten hat vielleicht die nachstehende Betrachtung, die das bescheidenere Ziel verfolgt, *die jetzt in ihren Gesetzmäßigkeiten weiter aufgeklärten Formen des Zeemaneffektes theoretisch einigermaßen verständlich zu machen*, ein gewisses Interesse.

Es ist bekannt, daß die *strenge* Elektronentheorie von Lorentz bisher nicht über das normale Triplet hinausführt. Auch der bekannte verallgemeinerte Lorentzsche Ansatz[2]), der für die Elektronenbewegung beliebige Lagrangesche Koordinaten einführt und die Wirkung des Magnetfeldes nur dahin bestimmt, daß seine an den schwingenden Elektronen geleistete Arbeit verschwinden soll, hat kompliziertere Fälle vollständig, d. h. nach den Verhältnissen der Perioden, Polarisationen und Intensitäten, so viel mir bekannt, nicht zu erledigen gestattet.

Resultate von Interesse hat Robb[3]) in einer hier gearbeiteten Dissertation gewonnen, indem er eine Anzahl von

1) C. Runge, Physik. Zeitschr. 8. Nr. 8. 1907.

2) H. A. Lorentz, Wied. Ann. 63. p. 278. 1897.

3) A. A. Robb, Götting. Diss. 1904; Ann. d. Phys. 15. p. 107. 1904.

(zwei oder vier) Elektronen bei ihren Bewegungen durch eine Bedingung gekoppelt annahm, die durch eine homogene Funktion zweiten Grades in deren Koordinaten dargestellt ist. Er fand, daß diese Systeme Zeemaneffekte in Form von Quintetten und Nonetten liefern, die mit beobachteten Typen große Ähnlichkeit zeigen. Die hauptsächliche bei Robb übrig bleibende Schwierigkeit ist die, daß *Bedingungen zweiten Grades* für die Theorie der *Fortpflanzung* des Lichtes allem Anschein nach unzulässig sind, da sie dem bisher allgemein bestätigten Prinzip der Superposition widersprechen. Man wird deshalb fürs erste wohl auf dem von Hrn. Robb verfolgten Wege nicht weitergehen.

Eine vergrößerte Fruchtbarkeit gewinnt der allgemeine Lorentzsche Ansatz, wenn man *die Forderung der Isotropie der schwingenden Gebilde aufgibt* und demgemäß eine Orientierung derselben im Magnetfelde annimmt. Meines Erachtens wird dergleichen schon durch die einfache Tatsache gefordert, daß zahlreiche Triplets nicht die normalen Intensitätsverhältnisse (Mittellinie doppelt so stark wie die äußeren) zeigen. Dies läßt sich innerhalb der elementaren Theorie kaum anders erklären, als durch die Annahme, daß die auf die Elektronen wirkende Widerstandskraft keine kugelige Symmetrie um die Ruhelage hat, und daß die Richtung ihres größten oder kleinsten Wertes sich parallel den magnetischen Kraftlinien einstellt.[1]) Es erklären sich daraus dann beiläufig auch leicht die bekannten Beobachtungen von Egoroff und Georgiewsky.[2])

Daß unter Aufgeben der Isotropie der schwingenden Gebilde sich Ansätze bilden lassen, die den beobachteten komplizierteren Typen entsprechen, habe ich seinerzeit gezeigt.[3]) Diese Ansätze weichen formell von dem Lorentzschen etwas ab, doch kann man auch von dem letzteren ausgehend bei Aufgabe der Forderung der Isotropie zu analogen Resultaten gelangen, und ich will hier an ihn anknüpfen. Dabei werde ich, wie früher jederzeit, den *Absorptions*vorgang behandeln, da aus den für *diesen* geltenden Gleichungen sich auch die

1) W. Voigt, Wied. Ann. **69.** p. 290. 1899.
2) N. Egoroff u. N. Georgiewsky, Compt. rend. **124.** p. 949. 1897.
3) W. Voigt, Wied. Ann. **68.** p. 352. 1899.

*Intensitäts*verhältnisse der Komponenten bestimmen; die für die *Emission* maßgebenden Gleichungen des frei schwingenden Systems sagen darüber nichts aus, solange man nicht eine Annahme über den Anfangszustand macht — dergleichen natürlich sehr willkürlich sein würde.

Bei der Theorie von Robb sind Schwingungen parallel und normal zum Magnetfeld gekoppelt. Dies würde im allgemeinen verlangen, daß eine einfallende Schwingung der *einen* Art solche der *anderen* Art erregte. Dergleichen ist meines Wissens nie beobachtet, allerdings wohl auch noch nicht systematisch untersucht, — wie denn die Beobachtung des inversen Zeemaneffektes wegen der offenliegenden Schwierigkeiten weniger gefördert ist, als die des direkten. Jedenfalls bietet die Einführung solcher Koppelungen bei dem Vorgang der Fortpflanzung von Schwingungen wegen der Symmetrieverhältnisse Schwierigkeiten und soll daher hier unterbleiben. Es lassen sich dann die Schwingungen parallel und senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien gesondert behandeln.

Indem demgemäß unten verfahren wird, soll untersucht werden, *welche allgemeinen Gesetze der Zerlegung von Absorptionslinien im Magnetfelde aus dem, wie gesagt, modifizierten Lorentzschen Ansatz folgen, sowie, welche Schlüsse aus den festgestellten Eigenschaften der komplizierteren Zeemaneffekte auf die Parameter dieses Ansatzes und somit auf die Umstände gezogen werden können, unter denen sich die Elektronen bei ihnen bewegen.*

Zu diesen Gesetzmäßigkeiten gehören z. B. die Erfahrungen, daß die Komponenten der Absorptionslinien in jeder der beiden parallel den magnetischen Kraftlinien fortschreitenden Wellen häufig *zentrisch symmetrisch*, ja *äquidistant* angeordnet sind, dabei aber *unsymmetrische Intensitätsverteilung* besitzen.[1]) Ganz besondere Wichtigkeit besitzt die Rungesche Regel, wonach die Abstände aller Komponenten einer Zerlegung von der ursprünglichen Lage einer Linie durch Vielfache *desselben* Bruchteiles des *Normal*abstandes (der sich aus dem bekannten Verhältnis $e/m$ berechnet) gegeben sind.

---

1) Vgl. hierzu z. B. W. Lohmann, Beiträge zur Kenntnis des Zeemanphänomens, Hall. Diss. 1907.

Daß eine Betrachtung auf der vorstehend geschilderten Grundlage nur innerhalb bescheidener Grenzen als Elektronentheorie zu bezeichnen ist, läßt sich nicht leugnen. Nur das eine Glied jeder Bewegungsgleichung eines Elektrons, welches die direkte Wirkung des Magnetfeldes auf dieses ausdrückt, folgt aus der allgemeinen Theorie, die übrigen, welche Einwirkungen anderer Elektronen darstellen und durch Koppelungen zustande kommen werden, sind nur unter Zuhilfenahme gewisser allgemeiner Prinzipien (lineäre Form aller Bedingungen, verschwindende Arbeit des magnetischen Feldes) hinzugefügt und entbehren bisher durchaus der anschaulichen Deutung. Es ist auch nicht zu verkennen, daß der Lorentzsche Ansatz der Deutung ganz besondere Schwierigkeiten entgegensetzt; folgen doch z. B. die Koppelungen zwischen zwei Elektronen nach ihm keineswegs der Forderung der Gleichheit von actio und reactio.

Aus dem Bestreben, den letzteren Gegensatz zu vermeiden, ist zum Teil mein in den Resultaten der Modifikation des Lorentzschen Ansatzes gleichwertiges Erklärungssystem hervorgegangen. Trotzdem möchte ich gegenwärtig dem ersteren den Vorzug geben.

### 2. Die allgemeinen Formeln.

Wir betrachten ein System von $q$ gleichen gekoppelten Elektronen, die außerhalb des Magnetfeldes alle dieselbe Eigenfrequenz $\nu_0$ besitzen. Es entspricht dies außerhalb des Magnetfeldes einem Spektrum mit nur *einem* Absorptionsstreifen. Die Übertragung der sich auf dieser Grundlage ergebenden Resultate auf den Fall von Spektren mit *mehreren* Absorptionsstreifen ist bekanntlich dann jedenfalls ohne weiteres gestattet, wenn diese Absorptionsstreifen nicht zu nahe aneinander liegen.

Was die zu den Kraftlinien, d. h. der $z$-Achse, *parallelen* Schwingungen angeht, so kann man für sie das Gleichungssystem des Lorentzschen Typus in folgender Weise ansetzen:

$$(1)\qquad \begin{cases} m z_1'' + k z_1 + h_{11} z_1' + h_{12} z_2' + \ldots = e Z, \\ m z_2'' + k z_2 + h_{21} z_1' + h_{22} z_2' + \ldots = e Z, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h_{jj} = h, \quad h_{jk} = - h_{kj}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnen die oberen Indizes Differentialquotienten nach der Zeit; die $h_{jk}$ für $j \leqq k$ sind lineäre Funktionen der magnetischen Feldstärke, die $h_{jj} = h$ sind *Dämpfungs*konstanten und vom Magnetfeld unabhängig, $Z$ ist die Komponente des schwingenden elektrischen Feldes.

Für die zu den Kraftlinien *normalen* Schwingungen kann man analog setzen

$$(2)\quad \begin{cases} m x_1'' + k x_1 + f_{11} x_1' + f_{12} x_2' + \ldots + g_{11} y_1' + g_{12} y_2' + \ldots = e X, \\ m x_2'' + k x_2 + f_{21} x_1' + f_{22} x_2' + \ldots + g_{21} y_1' + g_{22} y_2' + \ldots = e X, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m y_2'' + k y_1 - g_{11} x_1' - g_{21} x_2' - \ldots + f_{11} y_1' + f_{12} y_2' + \ldots = e Y, \\ m y_2'' + k y_2 - g_{12} x_1' - g_{22} x_2' - \ldots + f_{21} y_1' + f_{22} y_2' + \ldots = e Y, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{jj} = f, \quad f_{jk} = -f_{kj}, \end{cases}$$

wozu man im Interesse der Symmetrie fügen kann

$$(3)\qquad g_{jj} = g, \quad g_{jk} = +g_{kj}.$$

Dieser Ansatz trägt der Gleichwertigkeit der $X$- und $Y$-Richtung Rechnung.

Was die Bedeutung der Symbole in (2) angeht, so bezeichnen $X$ und $Y$ die Komponenten des elektrischen Feldes der Lichtwelle; die $f_{ii} = f$ sind *Dämpfungs*konstanten und vom Magnetfeld unabhängig; die übrigen $f_{ik}$ und sämtliche $g_{jk}$ können nach der Erfahrung als der Stärke des magnetischen Feldes proportional angesehen werden. Von ihnen stellen die $g_{ii} = g$ die Wirkung dar, welche die elementare Lorentzsche Theorie allein berücksichtigt. Alle $f_{jk}$ und $g_{jk}$ mit $j \gtrless k$ stellen Koppelungen dar, wie sie dem verallgemeinerten Lorentzschen Ansatz entsprechen, und zwar ersichtlich von zwei verschiedenen Typen, die als erster und zweiter bezeichnet werden mögen.

Verschwinden in (1) und (2) die Koppelungen, so bleiben die Formeln übrig, welche das Triplet ergeben; die Gleichheit aller $g_{jj} = g$ entspricht der Bedeutung (Ladung mal Feldstärke), welche dieser Parameter in der Theorie des Triplets hat, wobei vorausgesetzt ist, daß die Koppelung auf seinen Wert keinen Einfluß hat.

Faßt man alle entsprechenden Gleichungen der beiden Systeme von (2) mit den Faktoren 1 und $\pm i$ zusammen und setzt kurz

$$x_h \pm i y_h = \zeta_h, \quad X \pm i Y = Z, \tag{4}$$

so erhält man

$$\begin{cases} m\zeta_1'' + k\zeta_1 + f_{11}\zeta_1' + f_{12}\zeta_2' + \ldots \mp i(g_{11}\zeta_1' + g_{12}\zeta_2' + \ldots) = eZ, \\ m\zeta_2'' + k\zeta_2 + f_{21}\zeta_1' + f_{22}\zeta_2' + \ldots \mp i(g_{21}\zeta_1' + g_{22}\zeta_2' + \ldots) = eZ, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{5}$$

oder indem man noch abkürzt

$$f_{jk} \mp i g_{jk} = h_{jk}, \tag{6}$$

auch

$$\begin{cases} m\zeta_1'' + k\zeta_1 + h_{11}\zeta_1' + h_{12}\zeta_2' + \ldots = eZ, \\ m\zeta_2'' + k\zeta_2 + h_{21}\zeta_1' + h_{22}\zeta_2' + \ldots = eZ, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{7}$$

Dies System ist übereinstimmend mit (1), abgesehen davon, daß die $h_{jk}$ jetzt *komplex* sind. Und zwar ist

$$h_{jj} = f \mp i g = h, \tag{8}$$

und sind $ih_{jk}$ und $ih_{kj}$ konjugiert komplex; *sie werden rein imaginär, wenn die $g_{jk}$ und damit die Koppelungen zweiter Art verschwinden.*

*Auf dieser formalen Übereinstimmung von (1) und (7) beruht, daß man die Schwingungen parallel und normal zu den Kraftlinien eine Strecke Weges zugleich behandeln kann.*

Führt man komplexe Lösungen von der Frequenz $\nu$ für die $z_h$ bzw. $\zeta_h$ ein und setzt kurz

$$k + ih\nu - m\nu^2 = p, \tag{9}$$

so erhält man

$$\begin{cases} pz_1 + ih_{12}\nu z_2 + ih_{13}\nu z_3 + \ldots = eZ, \\ ih_{21}\nu z_1 + pz_2 + ih_{23}\nu z_3 + \ldots = eZ, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{10}$$

und analog für die $\zeta_h$ und $Z$.

Aus diesen Gleichungen sind die $z_h$ bzw. $\zeta_h$ zu berechnen.

$$4\pi\alpha e \sum z_h = PZ \text{ bzw. } 4\pi\alpha e \sum \zeta_h = \Pi Z,$$

unter $\alpha$ die Zahl der Elektronengruppen der betrachteten Art in der Volumeneinheit verstanden, stellen die auf ihnen beruhenden (komplexen) Teilpolarisationen für das Medium dar.

Die Faktoren $P$ und $\Pi$ stehen im engen Zusammenhang mit den komplexen Brechungsindizes gewisser in dem betrachteten Körper im Magnetfeld fortgepflanzten Wellen.

*Wir bezeichnen die ebene homogene Welle, die (elektrisch) parallel den Kraftlinien des Feldes schwingt und sich normal zu denselben fortpflanzt, weiterhin stets kurz als die z-Welle, und charakterisieren Funktionen, die sich auf sie beziehen, durch den unteren Index z.* Dann gilt für den komplexen Brechungsindex $\mathfrak{n}_z$ dieser $z$-Welle die Gleichung $Z(\mathfrak{n}_z^2 - 1 - P) = 0$, woraus, da $Z$ nicht verschwinden soll, folgt:

$$\mathfrak{n}_z^2 = 1 + P. \tag{11}$$

*Wir bezeichnen ferner eine ebene homogene Welle, die normal zu den Kraftlinien des Feldes schwingt und sich ihnen parallel fortpflanzt, weiterhin kurz als eine $\zeta$-Welle und charakterisieren die auf sie bezüglichen Funktionen durch den Index $\zeta$.* Dann gilt für diese $\zeta$-Welle die Beziehung $Z(\mathfrak{n}_\zeta^2 - 1 - \Pi) = 0$, die durch das Verschwinden jedes der beiden Faktoren erfüllt werden kann, denn $Z = X \pm iY$ kann verschwinden, ohne daß die Welle aufhört, zu existieren. Wegen des doppelten Vorzeichens, das nach (6) und (8) auch in $\Pi$ vorhanden ist, drückt die letzte Gleichung die Existenz *zweier* $\zeta$-Wellen mit verschiedenen $\mathfrak{n}_\zeta$ aus. Für die eine (1) ist $X - iY = 0$, d. h. die Schwingung rechtsrotierend zirkular; für sie muß $\mathfrak{n}_1^2 - 1 - \Pi$ mit dem *oberen* Zeichen in $\Pi$ verschwinden; für die andere (2) ist $X + iY = 0$, d. h. die Schwingung links rotierend zirkular; für sie muß $\mathfrak{n}_2^2 - 1 - \Pi$ mit dem *unteren* Zeichen in $\Pi$ verschwinden. Wir fassen beides zusammen in die eine Formel

$$\mathfrak{n}_\zeta^2 = 1 + \Pi, \tag{12}$$

in der die zwei Vorzeichen, so wie vorstehend gesagt, in Anwendung zu bringen sind.

Nun ist $\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$, unter $n$ den reellen Brechungsindex, unter $\varkappa$ den Absorptionsindex verstanden; es folgt sonach, wenn man den imaginären Teil einer Größe durch vorgesetztes $J$ bezeichnet:

$$(2n^2\varkappa)_z = -JP, \quad (2n^2\varkappa)_\zeta = -J\Pi. \tag{13}$$

Ist $n$ wenig von Eins verschieden, wie wir im allgemeinen annehmen wollen, so folgt hieraus sofort der für die Beobachtung maßgebende Absorptionskoeffizient $n_z\varkappa_z$ bzw. $n_\zeta\varkappa_\zeta$.

*Für die normal zu den Kraftlinien fortschreitende Welle, in der die Schwingungen gleichfalls normal zu den Kraftlinien liegen, und die die s-Welle heißen möge*, ergibt sich bekanntlich der komplexe Brechungsindex $n_s$ durch die Formel

$$\frac{1}{n_s^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right); \tag{14}$$

wegen $\mathfrak{n} = n(1 - ik)$ gibt dies

$$\frac{1 + 2ix_s - x_s^2}{n_s^2(1 + x_s^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1 + 2ix_1 - x_1^2}{n_1^2(1 + x_1^2)^2} + \frac{1 + 2ix_2 - x_2^2}{n_2^2(1 + x_2^2)^2}\right].$$

Ist sonach, wie in unserem Falle anzunehmen erlaubt, $x^2$ klein neben Eins und $n$ wenig von Eins verschieden, so berechnet sich der Absorptionskoeffizient der letztgenannten linear polarisierten $s$-Welle in Annäherung durch das arithmetische Mittel der Absorptionen der beiden vorher behandelten zirkularen $\zeta$-Wellen. *Wir können sonach die Diskussion des gesamten Zeemaneffektes bei der hauptsächlich geübten Beobachtung normal zu den Kraftlinien an die relativ bequemen Ausdrücke für $\mathfrak{n}_s^2$ und $\mathfrak{n}_\zeta^2$ anknüpfen.*

### 3. Entwickelung der Ausdrücke für die Absorptionskoeffizienten.

Die Ausdrücke $P$ bzw. $\Pi$ erhalten als *Nenner* die Determinante $D$ des Gleichungssystems (10), welche lautet

$$D = \begin{vmatrix} p & ih_{12}\nu & ih_{13}\nu & \dots \\ ih_{21}\nu & p & ih_{23}\nu & \dots \\ ih_{31}\nu & ih_{32}\nu & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Da $ih_{jk}$ und $ih_{kj}$ konjugiert komplex sind, so ist $D$ eine Funktion $q^{\text{ten}}$ Grades von $p$ mit reellen Koeffizienten, wobei $q$ die Anzahl der gekoppelten Elektronen bezeichnet. Den Zähler von $P$ bzw. $\Pi$ bildet bis auf den irrelevanten Faktor $F = 4\pi\alpha e^2$ die Summe aller Unterdeterminanten $D_{mn}$ $(q-1)^{\text{ten}}$ Grades von $D$. Diese Summe ist eine Funktion $(q-1)^{\text{ten}}$ Grades von $p$ mit gleichfalls reellen Koeffizienten; denn wenn $ih_{jk}$ und $ih_{kj}$ konjugiert komplex sind, gilt das gleiche (abgesehen von dem Vorkommen von $p$, das in beiden dasselbe ist) von $D_{mn}$ und $D_{nm}$; ihre Summe ist demgemäß reell.

Die Gleichung $D = 0$ gibt für $p/\nu$ nur reelle Wurzeln. Sie resultiert nämlich aus (10), wenn $Z = 0$ ist, also das Elek-

tronensystem frei schwingt. Faßt man aber die betreffenden Gleichungen mit den zu $z_1, z_2 \ldots$ konjugierten Größen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots$ zusammen[1]), so resultiert

$$(16)\quad p(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \ldots) + \nu(ih_{12}z_2\bar{z}_1 + ih_{21}z_1\bar{z}_2 + \ldots) = 0,$$

und hier ist der Faktor von $p$, wie der von $\nu$ reell, somit auch $p/\nu$ reell. Schreibt man diese Gleichung

$$p + \nu R = 0$$

und setzt für $p$ seinen Wert aus (9) ein, so ergibt sich eine Gleichung für $\nu$, nämlich

$$(17)\qquad (k + ih\nu - m\nu^2) + \nu R = 0.$$

Ist $h = 0$, so schwingt das freie System ohne Dämpfung, wie das bei Lorentz und Runge vorausgesetzt ist; dann liefert die Gleichung für $\nu$ reelle Wurzeln. In diesem Falle folgen also aus $D = 0$ auch für $\nu$ nur reelle Werte.

Da die Gleichung $D = 0$ nur reelle Wurzeln für $p/\nu$ hat, so kann man die Funktionen $P$ und $\Pi$ in Partialbrüche zerlegen nach dem Schema

$$(18)\qquad P = \frac{Q_1}{p + R_1\nu} + \frac{Q_2}{p + R_2\nu} + \ldots,$$

wobei die $Q_h$ und die $R_h$ sämtlich reell sind und $p$ nicht enthalten. Und da

$$p = k - m\nu^2 + ih\nu = \Pi + ih\nu$$

und für die $z$-Welle $h$ reell ist, so erhält man wegen $(2n^2\varkappa)_z = -JP$

$$(19)\quad (2n^2\varkappa)_z = h\nu\left[\frac{Q_1}{(H + R_1\nu)^2 + h^2\nu^2} + \frac{Q_2}{(H + R_2\nu)^2 + h^2\nu^2} + \ldots\right].$$

Der Ausdruck für $\Pi$ stimmt mit dem für $P$ formal überein, er soll auch durch dieselben Buchstaben wiedergegeben werden, da die $Q_h$, $R_h$, sowie auch $p$, sich in den Konstanten $h_{jk}$ ganz genau gleich ausdrücken. Dabei ist aber zu beachten, daß die Parameter $h_{jk}$ selbst bei der $z$- und der $\zeta$-Welle verschiedene Bedeutung haben, in $P$ reell, in $\Pi$ komplex sind. Speziell hat für die $\zeta$-Wellen $h$ selbst die Bedeutung $f \mp ig$, wo $f$ die Dämpfungskonstante, $g$ das Maß der direkten Wirkung

1) Ähnlich bei C. Runge, vgl. Kayser, Spektroskopie 2. p. 638. Leipzig 1902.

des Feldes auf das einzelne Elektron ist. Verglichen mit $P$ steht somit in $\Pi$ $f$ an Stelle von $h$, an Stelle von $H$ aber $K = k \pm g\nu - m\nu^2$, so daß für die $\zeta$-Wellen resultiert

$$(20)\quad (2n^2\varkappa)_\zeta = f\nu\left[\frac{Q_1}{(K+R_1\nu)^2+f^2\nu^2}+\frac{Q_2}{(K+R_2\nu)^2+f^2\nu^2}+\cdots\right].$$

Jedes Glied in den Formeln (19) und (20) stellt einen Absorptionsstreifen dar, der bei den faktischen Kleinheitsverhältnissen der $f$ und $k$ nahe bei derjenigen Frequenz $\nu$ liegt, welche die in dem betreffenden Nenner stehende Klammer $(H + R_h\nu)$ bzw. $(K + R_h\nu)$ zu Null macht. Es sind dies dieselben $q$ Frequenzen, die aus der Gleichung $D = 0$ bei verschwindenden Dämpfungskonstanten $h$ bzw. $f$ folgen.

*Somit liefern $q$ gekoppelte Elektronen für jede der $z$- bzw. $\zeta$-Wellen die Zerlegung des einen ursprünglichen Absorptionsstreifens in $q$ Komponenten, die genau den dreimal $q$ Komponenten entsprechen, in die die Emissionslinie zerfällt.*

Da es sich für uns nur um die Zerlegungen sehr schmaler Absorptionsstreifen handelt, bei denen die Komponenten sehr nahe bei dem Ort des ursprünglichen Streifens von der Frequenz $\nu_0 = \sqrt{k/m}$ bleiben, so kann man

$$\nu = \nu_0 + \mu$$

setzen, und $\mu$ als eine neben $\nu_0$ kleine Größe betrachten, die überall vernachlässigt werden darf, wo nicht die Differenz $\nu - \nu_0$ auftritt. Demgemäß können wir in (19) und (20)

$$k - m\nu^2 = k - m(\nu_0^2 + 2\mu\nu_0) = -2m\nu_0\mu$$

setzen und erhalten

$$(21)\quad \begin{cases} (2n^2\varkappa)_z = \dfrac{h}{\nu_0}\left[\dfrac{Q_1^0}{(R_1^0 - 2m\mu)^2+h^2}+\cdots\right], \\ (2n^2\varkappa)_\zeta = \dfrac{f}{\nu_0}\left[\dfrac{Q_1^0}{(R_1^0 \mp g - 2m\mu)^2+f^2}+\cdots\right], \end{cases}$$

wobei die oberen Indizes 0 andeuten, daß in den bezüglichen Ausdrücken $\nu$ mit $\nu_0$ vertauscht ist.

Die Frequenzen der $q$ Komponenten der Absorptionslinie in jeder der $z$- und $\zeta$-Wellen sind gemäß diesen Formeln durch

$$2m\mu = R_j^0 \quad \text{bzw. durch} \quad 2m\mu = R_j^0 \mp g,$$

ihre Intensitäten durch

$$Q_j^0/h\nu_0 \quad \text{bzw. durch} \quad Q_j^0/f\nu_0$$

gegeben.

### 4. Allgemeine Diskussion der Lagen- und Intensitätsverhältnisse der Absorptionslinien der $z$-Welle.

Wir wollen nun einige allgemeine Sätze über die Lagen- und Intensitätsverhältnisse der Komponenten ableiten.

Die Nenner des Ausdruckes (18) für $P$ und des analogen für $\Pi$ sind die Faktoren, in die $D$ zerlegt werden konnte; die in den Nennern der Ausdrücke (19) und (20) für $(2n^2\varkappa)_z$ und $(2n^2\varkappa)_\zeta$ auftretenden Klammern $(H + R_h \nu)$ bzw. $(K + R_h \nu)$ sind die *gleichen* Faktoren nach Aussonderung der auf Dämpfung beruhenden imaginären Teile, also die Faktoren der Gleichung $D_0 = 0$, falls der Index 0 das Verschwinden der Dämpfungskonstanten bezeichnet. Wo einer dieser Klammerwerte verschwindet, liegt ein Absorptionsstreifen. Wir wollen daher die allgemeine Diskussion über die Lage der Komponenten der Zerlegung an die Formel

$$D_0 = 0$$

anknüpfen.

Das Verschwinden der Dämpfungskonstanten macht sich innerhalb des Ausdruckes (15) für $D$ nur in dem Gliede $p$ geltend, das sich für die $z$-Welle auf $-2m\mu\nu_0$, für die $\zeta$-Welle auf

$$p_0 = (-2m\mu \pm g)\nu_0 = l\nu_0 \tag{22}$$

reduziert. Wir wollen von dem letzteren Ausdruck, in dem $l$ eine Abkürzung bezeichnet, ausgehen; der Übergang von den $\zeta$-Wellen zur $z$-Welle vollzieht sich dann durch die Verfügung $g = 0$.

Wegen dieses Wertes von $p_0$ und wegen der Vertauschung der in die $h_{jk}$ multiplizierten $\nu$ mit $\nu_0$ erhält $D_0$ die Form

$$D_0 = \Delta \nu_0^q,$$

wobei

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & ih_{12} & ih_{13} \dots \\ ih_{21} & l & ih_{23} \dots \\ ih_{31} & ih_{32} & l \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Aus der Gleichung $D_0 = 0$, die sich jetzt auf

$$\Delta = 0$$

reduziert, ist hiermit $\nu_0$ völlig verschwunden. Dies ergibt die Folgerung, daß nach der hier verfolgten Theorie *bei gleichen Koppelungskonstanten $h_{jk}$ die in der Skala der Schwingungszahlen $\nu$ bzw. $\mu$ dargestellte Zerlegung von der Eigenfrequenz $\nu_0$ der zerlegten Absorptionslinie unabhängig wird.* Hierdurch tritt die verallgemeinerte Theorie in Parallele zu der Lorentzschen Theorie der normalen Triplets. Wenn also z. B. verschiedene Linien einer spektralen Serie in der Skala der Schwingungszahlen gleiche Zerlegungen geben, wie das nach der Erfahrung sehr wahrscheinlich ist, so kann man daraus auf gleiche Koppelungskonstanten schließen.

Die Entwickelung der Gleichung $\Delta_0 = 0$ nach Potenzen von $l$ führt auf die Form

$$l^q + l^{q-1}\Sigma_1 + l^{q-2}\Sigma_2 + \ldots + \Sigma_q = 0, \tag{24}$$

wobei $\Sigma_h$ die Summe aller Partialdeterminanten $h^{ten}$ Grades von $\Delta_0$ von der Form

$$\vartheta = \begin{vmatrix} 0 & ih_{jk} & \ldots \\ ih_{kj} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \tag{25}$$

bezeichnet, in der die Diagonalglieder verschwinden, und die dazu symmetrischen konjugiert komplex sind.

$\Sigma_1$ ist hiernach *in jedem Falle* identisch Null; für die $z$-Welle, wo die $h_{jk}$ reell und $= -h_{kj}$ sind, verschwinden aber auch $\Sigma_3$, $\Sigma_5$, ..., da nach einem bekannten Satz der Determinantentheorie Determinanten vom Typus $\vartheta$ bei ungeradem Grad gleich Null sind.

Für die $z$-Welle reduziert sich also (24) auf

$$l^q + l^{q-2}\Sigma_2 + l^{q-4}\Sigma_4 + \ldots + \Sigma_q = 0, \tag{26}$$

wobei auch $\Sigma_q = 0$, wenn $q$ ungerade ist. Dies ergibt für $l$ Wurzeln, die paarweise symmetrisch zu $l = 0$ liegen; bei ungeradem $q$ gehört $l = 0$ zu ihnen. Da nun für die $z$-Welle $l = -2m\mu$, so liegen in derselben die Komponenten der Zerlegung gleichfalls paarweise symmetrisch zu $\mu = 0$, letzteren Wert bei ungeradem $q$ eingeschlossen.[1])

Was die *Intensitätsverteilung* in den Komponenten der $z$-Welle betrifft, so erkennt man leicht, daß sie in den zur

1) Ähnlich von C. Runge nachgewiesen l. c.

Welle $\mu = 0$ symmetrisch liegenden Streifen *gleich* sein muß. Nach der Form der Determinante $D$ für diese Welle ergibt sich nämlich, daß die Summe aller Partialdeterminanten $(q-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche nach (p. 200) den Zähler von $P$ bildet, $p$ nur in der $(q-1)^{\text{ten}}$, $(q-3)^{\text{ten}}$, ... Potenz enthalten kann. Die $(q-2)^{\text{te}}$, $(q-4)^{\text{te}}$, ... Potenz von $p$ würde nämlich in ein Produkt ersten, dritten, ... Grades der $ih_{jk}$ multipliziert sein; da aber der ganze Zähler von $P$, wie wir sahen, reelle Faktoren haben muß, so heben diese Glieder sich fort.

Hat nun die Gleichung $D = 0$, außer etwa $p = 0$, nur paarweise gleiche Wurzeln, so muß nach (18) $P$ die Form besitzen

$$P = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p-\alpha} + \frac{A_2}{p+\alpha} + \frac{B_1}{p-\beta} + \frac{B_2}{p+\beta} + \ldots,$$

wobei die Zähler die Intensitäten der betreffenden Absorptionsstreifen messen. Soll dann bei Reduktion auf einen gemeinsamen Nenner der Zähler nur die $(q-1)^{\text{te}}$, $(q-3)^{\text{te}}$, $(q-5)^{\text{te}}$... Potenz von $p$ enthalten, so muß $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, ... sein. In der Tat liefert die letzte Formel, wenn wir sie mit den hingeschriebenen Gliedern abbrechen, so daß $q = 5$ ist,

$$P = \frac{1}{D}\Big[A_0(p^2-\alpha)(p^2-\beta^2) + p\left(A_1(p+\alpha) + A_2(p-\alpha)\right)(p^2-\beta^2) + p\left(B_1(p+\beta) + B_2(p-\beta)\right)(p^2-\alpha^2)\Big],$$

woraus das Gesagte erhellt.

*Die Absorptionslinien in der z-Welle bei Einwirkung des Magnetfeldes liegen somit nach Lage und Intensität symmetrisch zu dem Ort der ursprünglichen Linie.*

### 5. Die Absorptionslinien der $\zeta$-Wellen.

Die erhaltenen Resultate gestatten in einem speziellen Falle die unmittelbare Übertragung auf die $\zeta$-Wellen, bei denen im allgemeinen die Verhältnisse viel komplizierter liegen.

Nach dem p. 198 Gesagten reduzieren sich nämlich die Parameter $h_{jk}$ der $\zeta$-Wellen auf den reellen Teil, *wenn die Koppelungen zweiter Art verschwinden.* In diesem Falle hat die Determinante $D$, bzw. $\Delta$, für die $\zeta$-Wellen genau dieselbe Natur wie für die $z$-Welle, nur hat $h$ die in (8), $p_0$ die in (22) gegebene allgemeinere Bedeutung. Hier liegen dann gleichfalls

innerhalb jeder $\zeta$-Welle die Wurzeln $l$ symmetrisch zu $l = 0$; daraus würde folgen, daß für $\mu$ und somit für die Abstände der Komponenten der Zerlegung von der Urlage des Streifens sich Werte finden, die sich symmetrisch um $\mu = \pm g/2m$ gruppieren. Letzterer Wert ist bei einer ungeraden Zahl vom Komponenten *eingeschlossen*. Ebenso haben die symmetrisch gelegenen Komponenten gleiche Intensitäten; denn die in dieser Hinsicht oben für die $z$-Welle angestellten Betrachtungen behalten gleichfalls Gültigkeit.

Indessen zeigt die Erfahrung in den $\zeta$-Wellen zwar sehr häufig eine der *Lage* nach zentrische Anordnung der Absorptionslinien, aber nur selten ist damit eine symmetrische *Intensitäts*verteilung verbunden. Hieraus ist zu schließen, *daß bei den $\zeta$-Wellen im allgemeinen die Koppelungen erster und zweiter Art nebeneinander auftreten*, wodurch dann die Verhältnisse sich erheblich komplizieren.

Da für die $\zeta$-Wellen $\Sigma_3$, $\Sigma_5$, ... im allgemeinen nicht verschwinden, so führt die Theorie für jede einzelne auch nicht auf Wurzeln $l$, die paarweise symmetrisch zu $l = 0$ liegen; die Komponenten innerhalb jeder einzelnen $\zeta$-Welle sind somit auch nicht in sich zentrisch symmetrisch angeordnet. Dagegen läßt sich allgemein zeigen, daß *die Linien beider $\zeta$-Wellen gegen die Lage der ursprünglichen Absorptionslinie symmetrisch liegen*, wie dies auch der Erfahrung entspricht.

In der Tat ist $i h_{jk} = \pm g_{jk} + i f_{jk}$, wobei das obere Vorzeichen der einen, das untere der anderen $\zeta$-Welle entspricht; dabei gilt $g_{jk} = g_{kj}$, $f_{jk} = -f_{kj}$. Hieraus folgt, daß die Unterdeterminanten von der Form (25) bei geradem Grade für beide Wellen identisch, bei ungeradem einander entgegengesetzt gleich sind. Denn kehrt man in einer von ihnen das Vorzeichen aller $i h_{jk}$ um, so erhält die Determinante vom Grade $n$ den Faktor $(-1)^n$, behält aber, da $i h_{jk}$ und $i h_{kj}$ konjugiert komplex sind, ihren absoluten Wert bei.

Hieraus ergibt sich, daß bei Anwendung der Gleichung (24) auf die beiden $\zeta$-Wellen die $\Sigma_n$ mit geradem Index einander *direkt*, die mit ungeradem einander *entgegengesetzt gleich* werden. Die Gleichung gibt hiernach für beide $\zeta$-Wellen entgegengesetzt gleiche Wurzeln $l$. Da aber $l = -2m\mu \pm g$, wo wieder die zwei Vorzeichen den beiden $\zeta$-Wellen entsprechen, so gibt

es zu jedem Streifen im Abstand $\mu = (g + l)/2m$ in der einen Welle einen solchen im Abstand $\mu = -(g + l)/2m$ in der anderen. Die Streifen in beiden liegen also symmetrisch zur Stelle $\mu = 0$. Ahnlich folgt für die symmetrischen Linienpaare die Gleichheit der Intensitäten.

Aus der Tatsache, daß auch für die $\zeta$-Wellen $\Sigma_1$ verschwindet, ergibt sich eine eigentümliche allgemeine Folgerung.

Nach der Erfahrung bilden die Komponenten in *jeder* der beiden $\zeta$-Wellen (ebenso wie in der $z$-Welle) sehr häufig eine ***nach den Lagen*** zentrisch symmetrische Gruppe. In diesem Falle muß die Gleichung $\Delta = 0$ für gerade $q$ in der Form

$$(27) \qquad ((l + l_0)^2 - \alpha^2)\,((l + l_0)^2 - \beta^2)\,(\ldots) = 0,$$

für ungerade in der Form

$$(28) \qquad (l + l_0)\,((l + l_0)^2 - \alpha^2)\,((l + l_0)^2 - \beta^2)\,(\ldots) = 0$$

darstellbar sein, wobei $l = -l_0$ die Lage des Symmetriezentrums bestimmt. Man erkennt, daß diese Form bei verschwindendem $\Sigma_1$ mit (24) nur dann vereinbar ist, wenn $l_0 = 0$, d. h. wenn das Symmetriezentrum an der durch $l = 0$ gegebenen Stelle liegt.

$l = 0$ d. h $2m\mu = \pm g$ bestimmt aber die Absorptionsstreifen, die in den $\zeta$-Wellen *bei fehlenden Koppelungen* auftreten würden. *Somit könnten die im allgemeinen Falle auftretenden Komponentensysteme symmetrisch sein nur zu diesen Positionen.*

Die Symmetrie der Lage verlangt dann das gleichzeitige Verschwinden von $\Sigma_3$, $\Sigma_5$, $\Sigma_7$, ... in der Formel (26). Die allgemeinsten Bedingungen für die Erfüllung dieser Beziehungen sollen hier nicht erörtert werden. Ein interessanter spezieller Fall ihrer Erfüllung, der sich durch Symmetrie auszeichnet, ist der, daß in der Determinante $\Delta$ die $h_{jk}$ jeder Reihe abwechselnd verschwinden, derart, daß $\Delta$ die Form annimmt

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & ih_{12} & 0 & ih_{14} & 0 & ih_{16} \ldots \\ ih_{21} & l & ih_{23} & 0 & ih_{25} & 0 \ldots \\ 0 & ih_{32} & l & ih_{34} & 0 & ih_{36} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Hier ist jedes Elektron $j$ nur mit denen von der Ordnungszahl $j \pm 1$, $j \pm 3$, $j \pm 5$, ... gekoppelt.

Daß unter diesen Umständen wirklich $\Sigma_3$, $\Sigma_5$, ... verschwinden, ergibt sich daraus, daß jede Determinante von der Form

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \dots \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \dots \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

verschwindet, wenn sie von ungeradem Grade ist. Der Beweis führt sich durch Vertauschung geeigneter Reihen bzw. Kolonnen untereinander. Ist z. B. der Grad von $\delta$ gleich $2n+1$, so kann man auf diesem Wege die Determinante $\delta$ auf eine Form bringen, wo die ersten $n+1$ Reihen an den ersten (oder letzten) $n+1$ Stellen, die letzten $n$ Reihen an den letzten (oder ersten) $n$ Stellen Nullen enthalten, woraus sogleich das Verschwinden folgt. Ist der Grad gleich $2n$, so führt dieselbe Operation dazu, daß die ersten $n$ Reihen an den $n$ ersten (oder letzten) Stellen, die letzten $n$ Reihen an den $n$ letzten (oder ersten) Stellen Nullen haben; in diesem Falle zerfällt $\delta$ in das Produkt zweier Determinanten vom $n^{ten}$ Grade; z. B. ist

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Sind $a_{jk}$ und $a_{kj}$ konjugiert komplex, so ist das Produkt reell und eine Summe von zwei Quadraten.

Die für den Grad $2n$ gemachte Bemerkung kann dazu dienen, die Berechnung der $\Sigma_2$, $\Sigma_4$, ... in speziellen Fällen zu vereinfachen.

In vielen Fällen sind die Komponenten in jeder $\zeta$-Welle äquidistant. Es müssen dann die verbleibenden $\Sigma_3$, $\Sigma_4$, ... diejenigen Relationen erfüllen, die den Beziehungen

$$\beta = 3\alpha, \quad \gamma = 5\alpha, \dots \text{ in (27)},$$
$$\beta = 2\alpha, \quad \gamma = 3\alpha, \dots \text{ in (28)}$$

entsprechen.

### 6. Eine Erfahrungstatsache.

Hier mag noch eine Erfahrungstatsache eingeschaltet werden.

Das Symmetriezentrum der Komponenten jeder $\zeta$-Welle soll nach dem eben Abgeleiteten den Ort einnehmen, der dem Verhalten eines *ungekoppelten* Elektrons entspricht, d. h. den einer Außenkomponente eines Triplets. Man möchte erwarten, daß hierbei das *normale* Triplet eine Rolle spielen würde; dem ist aber im allgemeinen nicht so.

Bezeichnet man den Abstand der Außenkomponenten von der Mittellinie beim *normalen* Triplet mit $a$, so liegen vielmehr nach Runge die Symmetriezentren für die von Lohmann untersuchten Ne-Linien in folgenden Positionen, bei denen die Gesamtzahl aller Komponenten durch römische Zahlen angedeutet ist.

| $\lambda =$ | 6678 | 6599 | 6507 | 6402 | 6383 |
|---|---|---|---|---|---|
| | IX $\frac{5}{4}a$ | VI $\frac{8}{7}a$ | IX $\frac{13}{12}a$ | XV $\frac{4}{3}a$ | VI $\frac{12}{11}a$ |
| $\lambda =$ | 6335 | 6305 | 6218 | 6143 | 6096 |
| | XII $\frac{14}{11}a$ | IX $\frac{5}{4}a$ | IX $\frac{3}{2}a$ | XII $\frac{17}{12}a$ | IX $\frac{13}{11}a$ |
| $\lambda =$ | 6030 | 5976 | 5945 | 5882 | |
| | VI ? | IX $\frac{3}{2}a$ | XII $\frac{13}{10}a$ | IX $\frac{19}{12}a$ | |

Für die erste Nebenserie des Hg-Spektrums ergibt sich aus den Angaben Runges analog

| $\lambda =$ | 3664 | 3663 | 3655 | 3132 | 3131,7 | 3126 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | XII $\frac{5}{4}a$ | IX $\frac{3}{2}a$ | XIII $\frac{14}{11}a$ | IX $a$ | VI $a$ | X $\frac{12}{11}a$ |

Die Symmetriezentren haben also nur bei zwei Hg-Linien den normalen Abstand.

Dies braucht indessen keineswegs zu befremden, da auch die bei den genannten Substanzen vorkommenden *Triplets* keineswegs den normalen Abstand *als Regel* zeigen. Für Ne ergibt sich z. B. aus den Angaben von Hrn. Lohmann folgende Tabelle

| $\lambda =$ | 6717 | 6553 | 6267 | 6164 | 6075 | 5853 | 5401 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $\frac{2}{3}a$ | $a$ | $\frac{4}{3}a$ | $\frac{3}{2}a$ | $a$ | $\frac{7}{5}a$? |

und für Hg gilt nach Runge

| $\lambda =$ | 3650 | 2968 | 2967 |
|---|---|---|---|
| | $\frac{7}{6}a$ | $a$ | $\frac{1}{2}a$ |

Die Bedeutung, welche die Lage des Schwerpunktes der Komponentengruppen in den $\zeta$-Wellen besitzt, veranlaßt, die sie betreffenden Zahlen noch etwas genauer zu betrachten. Berücksichtigt man, daß die Angaben, in denen *klein*zahlige Bruchteile von $a$ auftreten, die genauesten sind, so wird man sich dem Eindruck nicht verschließen können, daß für die Lage der Symmetriezentren Abstände von der Form $(b+1)/a\,b$, wo $b = 2, 3, 4 \ldots$ nahezu die Regel bilden. Es ist vielleicht auch nicht ausgeschlossen, daß Quotienten wie 17/12 und 19/12 eigentlich 3/2 lauten, 14/11 eigentlich 5/4, 13/11 und 13/10 eigentlich 6/5; denn die Lohmannschen Messungen sind bei *verschiedenen* Feldstärken angestellt und auf *gleiche* reduziert, wodurch die Zahlen höchstwahrscheinlich an Genauigkeit eingebüßt haben.

Nimmt man einmal die Form $(b+1)/a\,b$ als wahrscheinlich gemacht an, so bietet sich die Frage nach der Erklärung der so einfach gestalteten Abweichung von dem normalen Wert $a$.

Die Lorentzsche Theorie bestimmt $a$ proportional mit $e/m$, die fraglichen Abstände würden also mit $(b+1)e/b\,m$ proportional sein. Die Sache verläuft demnach in den bezeichneten Fällen ebenso, als wenn die innerhalb der ponderabeln Moleküle schwingenden elektrischen Teile Systeme von $b+1$ Elektronen wären, die aber nur $b$ träge Elementarmassen mit sich führten. (Bei zwei der obigen Triplets würden umgekehrt $b-1$ Elektronen mit $b$ trägen Elementarmassen verbunden erscheinen.)

Die Sicherheit, mit der gerade die *klein*zahligen Quotienten $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ festgestellt sind, gibt der hervorgehobenen Tatsache ein gewisses Gewicht. Wenn nun auch an eine Erklärung derselben noch nicht zu denken ist, so kann doch vielleicht die Regel, daß der Abstand des Symmetriezentrums der Komponenten in den $\zeta$-Wellen dem Gesetz $(b+1)/a\,b$ folgt, bei der Deutung der Beobachtungen nach dem Rungeschen Gesetz nützlich sein.

### 7. Zwei gekoppelte Elektronen.

Die Gleichungen (10) nehmen hier die Form an

$$\left\{\begin{array}{rr} p z_1 + i\nu h_{12} z_2 = eZ, \\ i\nu h_{21} z_1 + p z_2 = eZ, \end{array}\right. \tag{29}$$

woraus folgt

$$P = \frac{4\pi\alpha e^2 (2p - i\nu(h_{12} + h_{21})}{p^2 + \nu^2 h_{12} h_{21}}. \tag{30}$$

Für die $z$-Welle sind die $h_{jk}$ reell und einander entgegengesetzt gleich, hier gilt also

$$P = 4\pi\alpha e^2 \frac{2p}{p^2 - \nu^2 h_{12}^2} = 4\pi\alpha e^2 \left(\frac{1}{p - \nu h_{12}} + \frac{1}{p + \nu h_{12}}\right) \tag{31}$$

und wegen $p = k + ihv - m\nu^2$ gemäß (19)

$$\left\{\begin{array}{l} (2n^2\varkappa)_z = 4\pi\alpha e^2 h\nu \left(\dfrac{1}{(k - m\nu^2 - \nu h_{12})^2 + h^2\nu^2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{(k - m\nu^2 + h_{12}\nu) + h^2\nu^2}\right); \end{array}\right. \tag{32}$$

dies stellt zwei gleiche Absorptionslinien symmetrisch zur ursprünglichen dar in den Positionen

$$2m\mu = +h_{12} \quad \text{und} \quad 2m\mu = -h_{12},$$

wobei, wie p. 202, $\nu = \nu_0 + \mu$ gesetzt und eine Annäherung eingeführt ist.

Für die $\zeta$-Wellen ist nach (6), (2) und (3)

$$h_{12} = f_{12} \mp ig, \quad h_{21} = -f_{12} \mp ig_{12}$$

zu setzen, also

$$\Pi = \frac{8\pi\alpha e^2 (p \pm \nu g_{12})}{p^2 - \nu^2 (f_{12}^2 + g_{12}^2)} = \frac{8\pi\alpha e^2 (p \pm \nu g_{12})}{p^2 - \nu^2 r^2}, \tag{33}$$

wobei $r$ eine Abkürzung darstellt. Dies gibt weiter

$$\Pi = 4\pi\alpha e^2 \left(\frac{1 \pm g_{12}/r}{p - \nu r} + \frac{1 \mp g_{12}/r}{p + \nu r}\right), \tag{34}$$

während $p = k + (if \pm g)\nu - m\nu^2$.

Demgemäß wird

$$\left\{\begin{array}{l} (2n^2\varkappa)_\zeta = 4\pi\alpha e^2 f\nu \left(\dfrac{1 \pm g_{12}/r}{(k \pm g\nu - r\nu - m\nu^2)^2 + f^2\nu^2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1 \mp g_{12}/r}{(k \pm g\nu + r\nu - m\nu^2)^2 + f^2\nu^2}\right). \end{array}\right. \tag{35}$$

Nach dem p. 199 Gesagten bestimmt diese Formel unmittelbar die Absorptionen der zwei parallel den Kraftlinien

fortschreitenden zirkularen Wellen; das obere Vorzeichen entspricht der rechts-, das untere der linksrotierenden Welle. Die Absorptionslinien liegen an den Stellen

$$2m\mu = \pm g + r \quad \text{und} \quad = \pm g - r, \quad \text{wobei} \quad \mu = \nu - \nu_0;$$

sie liegen also *symmetrisch* zu den Stellen $2m\mu = \pm g$, haben aber, soweit Koppelungen zweiter Art existieren, *verschiedene* Intensität.

Nach den Angaben von Hrn. Lohmann haben bei Neon die Außenkomponenten der Linien 6599, 6883, 6030 (der einzigen von ihm beobachteten Sextuplets) *gleiche* Intensitäten; hier würde also eine bloße Koppelung erster Art zur Erklärung ausreichen. In anderen Fällen z. B. bei der Na-Linie $D_1$ gilt dies nicht; hier wären also beide Arten von Koppelungen anzunehmen.

Was die Verhältnisse der Abstände zwischen den Linien des Sextuplets angeht, so ist nach p. 210 $g/2m$ wahrscheinlich immer entweder gleich $a$ oder $(b+1)/ab$, wo $a$ den Normalabstand und $b$ eine ganze Zahl bezeichnet. Die drei bei Neon beobachteten Sextuplets führen bei Anwendung der Rungeschen Regel zum Teil auf große Zahlen $b$, deren Festsetzung relativ willkürlich ist. Die Linie 6599 gibt $b = 7$, und ihr würde zugleich $r/2m = a/b$, $h_{12}/2m = 2a/b$ entsprechen. Da bei Ne die Koppelungen zweiter Art unmerklich sind, würde $r$ mit $f_{12}$ merklich identisch sein. Die Verhältnisse liegen hier also ziemlich einfach.

Ein sehr gutes Beispiel bietet die Hg-Linie 3131,7, für die $g/2m = a$ ist, die sich also normal verhält. Hier ist $h_{12}/2m = a$, $r/2m = \frac{1}{2}a$, die verschiedenen Koppelungen stehen also in sehr einfachen numerischen Beziehungen. Die Faktoren $1 \pm g_{12}/r$, welche die Stärken der Absorptionslinien zu beurteilen gestatten, sind hierdurch noch nicht bestimmt, da $r^2 = f_{12}^2 + g_{12}^2$; die Absorptionsstärken würden aber umgekehrt mit den Abständen zusammen zur Bestimmung von $f_{12}$ führen, so daß hier alle Parameter aus der Beobachtung ableitbar wären.

Noch mag auf den interessanten Spezialfall aufmerksam gemacht werden, daß $f_{12} = 0$, also nur eine Koppelung *zweiter Art* vorhanden ist. Hier ist $g_{12}/r = \pm 1$, und es verschwindet in jeder $\zeta$-Welle die Intensität des einen der beiden im all-

gemeinen möglichen Absorptionsstreifen. Dies weist zunächst im allgemeinen darauf hin, daß bei $q$ gekoppelten Elektronen, trotz der möglichen $q$ Frequenzen für jede $\zeta$-Welle, doch nicht stets $q$ Absorptionsstreifen wahrnehmbar sind. Ferner bietet der spezielle hier vorliegende Fall die *Möglichkeit einer Erklärung der Triplets mit anormalen Abständen, ohne Benötigung der Annahme eines anormalen Wertes von e/m.*

In der Tat würde eine Koppelung erster Art von zwei Elektronen, die sich nur in den $\zeta$-Wellen geltend macht, ein Triplet mit einem von dem normalen verschiedenen Abstand bei normalem $e/m$ liefern. Dies ist vielleicht nicht ganz ohne Bedeutung.

Die Ausdrücke für die Brechungsindizes der $z$- und der $\zeta$-Wellen sind aus (31) und (33) leicht zu gewinnen; ihre Angabe mag aber unterbleiben, da in dieser Darstellung das Hauptgewicht auf die Absorptionen gelegt ist.

### 8. Drei gekoppelte Elektronen.

Die Gleichungen (10) lauten hier:

$$(36)\qquad \begin{cases} p z_1 + i\nu h_{12} z_2 + i\nu h_{13} z_3 = eZ, \\ i\nu h_{21} z_1 + p z_2 + i\nu h_{23} z_3 = eZ, \\ i\nu h_{31} z_1 + i\nu h_{32} z_2 + p z_3 = eZ, \end{cases}$$

woraus folgt

$$(37)\qquad P = 4\pi\alpha e^2 \frac{\left[\begin{array}{l} 3p^2 - i\nu p\left((h_{23}+h_{32})+..\right) \\ \quad +\nu^2\left(h_{23}h_{32}+..(h_{31}h_{12}+h_{13}h_{21})-..\right)\end{array}\right]}{p^3+\nu^2 p(h_{23}h_{32}+..) - i\nu^3(h_{13}h_{23}h_{31}+h_{21}h_{32}h_{13})};$$

dabei bedeuten die Punkte die Hinzufügung der Glieder, die sich aus den hingeschriebenen durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben.

Für die $z$-Welle, wo die $h_{jk}$ und $h_{kj}$ einander entgegengesetzt gleich und reell sind, resultiert hieraus sehr einfach

$$(38)\qquad P = 4\pi\alpha e^2 \frac{3p^2 - \nu^2(h_{23}+h_{31}+h_{12})^2}{p\left(p^2 - \nu^2(h_{23}^2+h_{31}^2+h_{12}^2)\right)},$$

was in

$$P = 4\pi\alpha e^2 \frac{3p^2 - \nu^2 s^2}{p(p^2-\nu^2 r^2)}$$

abgekürzt werden mag. Dies gibt

$$(39)\qquad P = 4\pi\alpha e^2\left[\frac{s^2}{r^2 p} + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{s^2}{r^2}\right)\left(\frac{1}{p+\nu r} + \frac{1}{p-\nu r}\right)\right],$$

woraus in früherer Weise drei Absorptionsstreifen folgen, deren mittlerer mit dem ursprünglichen zusammenfällt, während die äußeren zu ihm symmetrisch liegen. Die Intensität des ersteren ist mit $s^2/r^2$, die der letzteren mit $\frac{1}{2}(3 - s^2/r^2)$ proportional. Ist $s = r$, so sind alle drei gleich stark. Hr. Lohmann gibt an, daß sich die mittleren Gruppen der Nonette 6678, 6305, 6217, 5882 von Ne demgemäß verhalten. Der Fall $s = r$ tritt nicht etwa ein, wenn $h_{23} = h_{31} = h_{12}$ ist, also die drei Koppelungen gleich stark sind (hier sind vielmehr die äußeren Komponenten verschwindend schwach), sondern z. B. wenn zwei von ihnen sehr schwach gegen die dritte sind. Ergänzen sich $h_{23}$, $h_{31}$, $h_{12}$ nahezu zu Null, so ist die mittlere Komponente unmerklich.

Für die $\zeta$-Wellen werden die Verhältnisse hier bereits sehr kompliziert. Wegen

$$h_{jk} = f_{jk} \mp i g_{jk}, \quad f_{jk} = -f_{kj}, \quad g_{kj} = +g_{kj}$$

erhalten wir hier

$$(40) \quad \Pi = 4\pi\alpha e^2 \frac{\left[\begin{array}{l} 3p^2 \pm \nu p (g_{23} + g_{31} + g_{12}) \\ -\nu^2 (f_{23}^2 + .. + g_{23}^2 + .. + 2 f_{31} f_{12} + .. - 2 g_{31} g_{12} - ..) \end{array}\right]}{\begin{array}{l} p^3 - \nu^2 p (f_{23}^2 + .. + g_{23}^2 + ..) \\ \pm \nu^3 \left((g_{23} g_{31} g_{12} - g_{23} f_{31} f_{12}) - ..\right) \end{array}}.$$

Sollen, wie das die Erfahrung in vielen Fällen gibt, die hierdurch dargestellten Absorptionslinien für jede der beiden $\zeta$-Wellen zentrisch symmetrisch liegen, das Triplet also äquidistant sein, so muß

$$g_{23} g_{31} g_{12} - g_{23} f_{31} f_{12} - g_{31} f_{12} f_{23} - g_{12} f_{23} f_{31} = 0$$

sein. Eine einfache symmetrische Art, dies zu bewirken, ist nach p. 207 das vollständige Verschwinden eines der $h_{jk}$, d. h. des betreffenden $f_{jk}$ und $g_{jk}$, etwa von $f_{12}$ und $g_{12}$, wodurch dann $\zeta_2$ und $\zeta_3$ nicht mehr untereinander, sondern nur noch mit $\zeta_1$ gekoppelt sind. Hier gilt dann einfacher

$$(41) \quad \Pi = 4\pi\alpha e^2 \frac{3p^2 \pm \nu p (g_{12} + g_{23}) - \nu^2 [(f_{12} + f_{23})^2 + (g_{12} - g_{23})^2]}{p\left(p^2 - \nu^2 (f_{12}^2 + f_{23}^2 + g_{12}^2 + g_{23}^2)\right)},$$

wofür wir kurz schreiben

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi = 4\pi\alpha e^2 \frac{3p^2 \pm \nu p t - \nu^2 s^2}{p(p^2 - \nu^2 r^2)}, \text{ d. h.} \\ \quad = 4\pi\alpha e^2 \left[ \frac{s^2}{r^2 p} + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{s^2}{r^2} \mp \frac{t}{r}\right) \frac{1}{p + \nu r} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{s^2}{r^2} \pm \frac{t}{r}\right) \frac{1}{p - \nu r} \right]. \end{array} \right.$$

Diese Formel drückt das Auftreten dreier äquidistanter Streifen mit unsymmetrischen Intensitäten aus. Da die Faktoren

$$\tfrac{1}{2}\left(3-\frac{s^2}{r^2}\mp\frac{t}{r}\right),\quad \frac{s^2}{r^2},\quad \tfrac{1}{2}\left(3-\frac{s^2}{r^2}\pm\frac{t}{r}\right)$$

dieselbe Größenfolge haben, wie

$$3\mp\frac{t}{r},\quad \frac{3s^2}{r^2},\quad 3\pm\frac{t}{r},$$

und $r$, $s$, $t$ voneinander unabhängig sind, so können ersichtlich die Verteilungsgesetze der Intensitäten sehr verschieden ausfallen. Es ist bemerkenswert, daß, wenn $s$ nahe gleich $r$ ist, dann die Faktoren von links nach rechts (oder umgekehrt) um gleiche Beträge wachsen. Dies Verhalten findet Hr. Lohmann bei allen den von ihm beobachteten Nonetten des Neon. Die Gleichheit von $s$ und $r$ würde das Verschwinden noch eines weiteren $f_{jk}$ und $g_{jk}$ verlangen.

Ist $t=0$, so werden die Intensitäten symmetrisch, bei $s=r$ sämtlich einander gleich.

Was die Gesetze der Abstände der Komponenten angeht, so hat Hr. Lohmann bei Ne Nonette von besonders einfachen Zahlenverhältnissen beobachtet (6678, 6305, 6218, 5976), für die ausnahmslos $g/2m$ sich in der Form $(b+1)/ab$ darstellt. $r/2m$ ergibt sich dabei sowohl für die $z$- wie für die $\zeta$-Wellen gleich $a/b$. Ähnliche Einfachheit zeigen die Nonette 3663 und 3132 bei Hg; letzteres ist in dem Sinne *normal*, als $g/2m=a$; $r/2m$ folgt für beide Wellen $=\frac{1}{2}a$.

Eine Mittelstellung zwischen den Sextetten und Nonetten nehmen die *Oktette* ein, welche die Satelliten in der ersten Nebenserie von Cu, Ag, Al, Tl zeigen, und die aus einem normalen Triplet dadurch abgeleitet werden können, daß die *äußeren* Komponenten desselben sich in *drei*, die *inneren* in *zwei* zur ursprünglichen symmetrische Komponenten trennen.

### 9. Vier gekoppelte Elektronen.

Dieser Fall ist der einfachste von denjenigen, wo die zentrische Symmetrie der Anordnung der Komponenten noch nicht notwendig deren Äquidistanz zur Folge hat, und er soll deswegen, trotz seiner Komplikation, noch erörtert werden. Dabei ist in Betracht zu ziehen, daß nach der Erfahrung bei dieser Zerlegung die Liniensysteme der $\zeta$-Wellen trotz zentrisch

symmetrischer (bzw. äquidistanter) Lage unsymmetrische Intensitätsverteilung besitzen können.

Die Gleichungen (10) werden hier

$$(43)\quad \begin{cases} p z_1 + i\nu h_{12} z_2 + i\nu h_{13} z_3 + i\nu h_{14} z_4 = eZ, \\ i\nu h_{21} z_1 + p z_2 + i\nu h_{23} z_3 + i\nu h_{24} z_4 = eZ, \\ i\nu h_{31} z_1 + i\nu h_{32} z_2 + p z_3 + i\nu h_{34} z_4 = eZ, \\ i\nu h_{41} z_1 + i\nu h_{42} z_2 + i\nu h_{43} z_3 + p z_4 = eZ. \end{cases}$$

Für die $z$-Welle, bei der $h_{jk} = -h_{kj}$, folgt hieraus

$$(44)\quad P = 4\pi\alpha e^2 \frac{2p^3 - p\nu^2(h_{12}^2 + .. + h_{12}h_{23} + . + h_{23}h_{31} + . + h_{31}h_{12} + .)}{p^4 - p^2\nu^2(h_{12}^2 + ..) + \nu^4(h_{12}^2 h_{24}^2 + . - h_{12}h_{23}h_{34}h_{41} + ..)}.$$

Hierin bezeichnet $h_{12}^2 + ..$ die Summe der Quadrate aller sechs voneinander unabhängigen $h_{jk}$, die Glieder $h_{12}h_{23} + .$ je die Summe der vier aus dem Anfangsglied durch zyklische Vertauschung der Indizes zu entwickelnden. Die letzte Klammer im Nenner ist die Determinante des Systems (43) für $p = 0$.

In dem Ausdruck für $P$ treten die sechs unabhängigen $h_{jk}$ nur in drei Aggregaten auf. Jede numerische Beziehung zwischen diesen Aggregaten kann also im allgemeinen auf unendlich viele Weisen erfüllt werden; eine Diskussion ist deshalb sehr umständlich. Man schränkt die Unbestimmtheit ein, wenn man von vornherein eine Anzahl Koppelungen ganz ausfallen läßt. Es bietet sich daher insbesondere die p. 207 erwähnte Verfügung, durch welche $h_{13}$ und $h_{24}$ gleich Null gemacht werden, und bei den $\zeta$-Wellen die symmetrische Anordnung der Komponenten bewirkt wird.

Bei dieser Annahme wird, falls die durch zyklische Vertauschung aus dem Anfangsglied folgenden Terme nur angedeutet werden,

$$(45)\quad P = 4\pi\alpha e^2 \frac{4p^3 - p\nu^2[(h_{12} + h_{23})^2 + ..]}{p^4 - p^2\nu^2(h_{12}^2 + ..) + \nu^4(h_{12}h_{34} - h_{23}h_{41})^2},$$

was in

$$P = 4\pi\alpha e^2 \frac{4p^3 - p\nu^2 s^2}{p^4 - p^2\nu^2 r^2 + \nu^4 u^2}$$

abgekürzt werden mag.

In vielen Fällen, z. B. bei Ne stets, sind die Quadruplette der $z$-Welle so gebaut, daß der Mittelabstand das Doppelte

der Seitenabstände ist; hier muß dann für die vier Komponenten $p$ bzw. $= -2p'$, $-p'$, $= p'$, $+2p'$ sein, wo $p'$ den Seitenabstand mißt.

In diesem Falle müssen für die noch übrigen $h_{jk}$ die Beziehungen gelten

$$(46) \quad \begin{cases} \nu^2 r^2 = \nu^2(h_{12}^2 + h_{23}^2 + h_{34}^2 + h_{41}^2) = 5p'^2, \\ \nu^4 u^2 = \nu^2(h_{12}h_{34} - h_{23}h_{41})^2 = 4p'^4. \end{cases}$$

Die einfachste Art, diesen Bedingungen zu genügen, ist eine Annahme von der Form

$$\nu h_{12} = p', \quad \nu h_{23} = 0, \quad \nu h_{34} = 2p', \quad \nu h_{41} = 0.$$

Aber, wie man leicht erkennt, hört hierbei das Koppelungssystem auf, alle vier Elektronen zu verbinden; es sind nur die ersten beiden und die letzten beiden verknüpft, das Quadruplet ist damit als die Superposition von zwei Duplets gedeutet. Vielleicht läßt sich für eine solche Auffassung etwas geltend machen, aber sie fällt jedenfalls aus der allgemeinen Betrachtungsweise heraus.

Alle vier Elektronen bleiben verkoppelt bei dem Wertsystem

$$(47) \quad \begin{cases} \nu h_{12} = p'/\sqrt{2}, \quad \nu h_{23} = \mp p'/\sqrt{2}, \quad \nu h_{34} = 2p'/\sqrt{2}, \\ \nu h_{41} = \pm 2p'/\sqrt{2} \end{cases}$$

bzw. den damit äquivalenten. Hier kommen nur Koppelungen vor, deren Stärken sich wie 1 : 2 verhalten. Zugleich wird, je nachdem das obere oder das untere Vorzeichen benutzt wird,

$$P = 8\pi\alpha e^2 \frac{4p^3 - pp'^2\{{}^{1}_{7}{}^{3}\}}{(p^2 - p'^2)(p^2 - 4p'^2)},$$

was bzw. gibt

$$(48) \quad P = 2\pi\alpha e^2 \left[ \left\{ {3 \atop 1} \right\} \left( \frac{1}{p+p'} + \frac{1}{p-p'} \right) + \left\{ {1 \atop 3} \right\} \left( \frac{1}{p+2p'} + \frac{1}{p-2p'} \right) \right].$$

Die beiden Koppelungen, welche durch (47) dargestellt sind und welche so wenig voneinander abweichen, geben also vier Komponenten des $z$-Quadruplets in den Abständen $p'$ und $2p'$ von der Mitte, wobei das eine Mal das innere, das andere Mal das äußere Paar die überwiegende Intensität besitzt. Bei Ne ist nur der *zweite* Fall beobachtet. —

Während bei den Nonetten *symmetrische Intensitätsverteilungen* in den Triplets der $\zeta$-Wellen die Ausnahme bildeten,

z. B. bei den so gesetzmäßigen Nonetten von Ne ganz fehlten, scheinen sie bei den Systemen von zwölf Komponenten in den Quadrupletten der $\zeta$-Wellen mitunter vorzukommen. Hr. Lohmann fand bei Ne *nur* diesen Fall.

Hier kann die Theorie unmittelbar an die Formeln für die $z$-Welle anknüpfen, denn der Fall läßt sich ohne Koppelungen zweiter Art erledigen. Es sind nur die Konstanten $h_{jk}$ mit $f_{jk}$ zu vertauschen, und ist die nach p. 211 geänderte Bedeutung von $p$ zu berücksichtigen. So wird hier aus (45)

$$(49)\quad \begin{cases} \Pi = 4\pi\alpha e^2 \dfrac{4p^3 - p\nu^2\left((f_{12}+f_{23})^2 + ..\right)}{p^4 - p^3\nu^2(f_{12}^2 + ..) + \nu^4(f_{12}f_{34} - f_{23}f_{41})^2} \\ \quad = 4\pi\alpha e^2 \dfrac{4p^3 - p\nu^2 s^2}{p^4 - p\nu^2 r^2 - \nu^4 u^2}. \end{cases}$$

Äquidistanz der Komponenten der Quadruplets verlangt Wurzeln des Nenners von dem Gesetz $p$ bzw. $= -3p'$, $-p'$, $+p'$, $+3p'$.

Dazu muß

$$(50)\quad \begin{cases} \nu^2 r^2 = \nu^2(f_{12}^2 + f_{23}^2 + f_{34}^2 + f_{41}^2) = 10p'^2, \\ \nu^4 u^2 = \nu^4(f_{12}f_{34} - f_{23}f_{41})^2 \qquad\quad = 9p'^4 \end{cases}$$

sein. Man befriedigt diese Bedingungen in einfachster Weise, indem man setzt

$$(51)\qquad \nu f_{12} = \nu f_{34} = \pm 2p', \quad \nu f_{23} = \nu f_{41} = \pm p'.$$

Die Vorzeichen können unabhängig voneinander gewählt werden. Nimmt man alle vier Parameter von gleichem Vorzeichen oder die ersten beiden von entgegengesetztem, wie die letzten beiden, so erhält man

$$\Pi = 16\pi\alpha e^2 \frac{p^3 - p\,p'^2\{{}^0_1\}}{(p^2 - p'^2)(p^2 - 9p'^2)},$$

was ergibt

$$\Pi = \frac{16\pi\alpha e^2 p}{p^2 - p'^2\{{}^1_0\}}.$$

Die einfachste Verfügung führt also, wie oben, auf ein Duplet.

Eine etwas kompliziertere Verfügung ist

$$(52)\quad \begin{cases} \nu f_{12} = \nu f_{23} = \pm\dfrac{3p'}{\sqrt{2}}, \quad \nu f_{34} = -\nu f_{41} = \pm\dfrac{p'}{\sqrt{2}}, \\ \text{oder} \\ \nu f_{12} = -\nu f_{23} = \pm\dfrac{3p'}{\sqrt{2}}, \quad \nu f_{34} = \nu f_{41} = \pm\dfrac{p'}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

hier müssen bei den doppelten Vorzeichen *gleiche* gewählt werden; welches man benutzt, ist ohne Bedeutung.

Aus (49) wird hier

$$(53)\quad \begin{cases} \Pi = 16\,\pi\,\alpha\,e^2 \dfrac{p^3 - p\,p'^2 \left\{\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right\}}{(p^2 - p'^2)(p^2 - 9\,p'^2)}, \\ \text{d. h.} \\ \Pi = 2\,\pi\,\alpha\,e^2 \left[ \left\{\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right\} \left( \dfrac{1}{p+p'} + \dfrac{1}{p-p'} \right) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left\{\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right\} \left( \dfrac{1}{p+3\,p'} + \dfrac{1}{p-3\,p'} \right) \right]. \end{cases}$$

Man erhält also zwei Intensitätsverteilungen, die den durch (48) gegebenen genau entsprechen. —

Für die *allgemeine* Behandlung der $\zeta$-Wellen (bei Berücksichtigung beider Arten Koppelungen) führen wir gleichfalls von allem Anfang die Annahme

$$h_{13} = h_{31} = h_{24} = h_{42} = 0$$

ein und erhalten dann

$$(54)\quad \Pi = 4\,\pi\,\alpha\,e^2 \frac{\left[\begin{array}{l} 4\,p^3 - i\,\nu\,p^2\,(h_{12} + h_{21} + \ldots) \\ + \nu^2\,p\,(2\,h_{12}\,h_{21} + \ldots - (h_{12}\,h_{23} + h_{21}\,h_{32}) + \ldots) \\ - i\,\nu^3\,(h_{12}\,h_{21}\,(h_{34} + h_{43}) + \ldots - (h_{12}\,h_{23}\,h_{41} + h_{21}\,h_{32}\,h_{14}) + \ldots) \end{array}\right]}{p^4 + \nu^2\,p^2\,(h_{12}\,h_{21} + \ldots) + \nu^4\,(h_{12}\,h_{34} - h_{14}\,h_{32})\,(h_{21}\,h_{43} - h_{23}\,h_{41})}.$$

Dabei ist

$$i\,h_{jk} = \pm\,g_{jk} + i\,f_{jk} \quad \text{und} \quad g_{jk} = g_{kj}, \quad f_{jk} = -\,f_{kj}$$

und es sind von zyklischen Reihen nur die Anfangsglieder geschrieben. Es ergibt sich weiter

$$(55)\quad \Pi = 8\,\pi\,\alpha\,e^2 \frac{\left[\begin{array}{l} 2\,p^3 \mp \nu\,p^2\,(g_{12} + \ldots) - \nu^2\,p\,\big((g_{12}^2 + f_{12}^2) + \ldots \\ \qquad\qquad - (g_{12}\,g_{23} - f_{12}\,f_{23}) - \ldots\big) \\ \pm \nu^3\,\big((g_{12}^2 + f_{12}^2)\,g_{34} + \ldots + g_{12}\,g_{23}\,g_{41} + \ldots - g_{12}\,f_{23}\,f_{41} - \ldots \\ \qquad\qquad - f_{12}\,g_{23}\,f_{41} - \ldots - f_{12}\,f_{23}\,g_{41} - \ldots\big) \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l} p^4 - \nu^2\,p^2\,\big((g_{12}^2 + f_{12}^2) + \ldots\big) \\ + \nu^4\,\big((g_{12}\,g_{34} - g_{14}\,g_{23} - f_{12}\,f_{34} + f_{14}\,f_{32})^2 \\ \qquad\qquad - (f_{12}\,g_{34} + f_{34}\,g_{12} - g_{14}\,f_{32} - f_{14}\,g_{32})\big)^2 \end{array}\right]}.$$

Wieder ist die Anzahl der auftretenden Parameter (8) größer, als die der sie enthaltenden Kombinationen, und man kann demgemäß die Diskussion vereinfachen, wenn man von den vorgesehenen Koppelungen noch einige gänzlich ausfallen läßt.

Eine symmetrische Verfügung ist die Beseitigung zweier Koppelungen erster und zweier zweiter Art, z. B. die Annahme

$$g_{12} = 0, \quad f_{23} = 0, \quad g_{34} = 0, \quad f_{41} = 0;$$

sie führt auf

$$(56)\quad \Pi = 8\pi\alpha e^2 \frac{\left[\begin{array}{r} 2p^2 \mp \nu p^2(g_{23}+g_{41}) - \nu^2 p\,(f_{12}^2+g_{23}^2+f_{34}^2+g_{41}^2) \\ \pm \nu^3 (g_{23}+g_{41})(g_{23}g_{41}+f_{12}f_{34})\end{array}\right]}{p^4 - \nu^2 p^2 (f_{12}^2+g_{23}^2+f_{34}^2+g_{41}^2) + \nu^4 (g_{41}g_{23}+f_{12}f_{34})^2},$$

deren Nenner mit dem von (45) formal übereinstimmt.

Die Beobachtungen gaben in vielen Fällen für die Quadruplets der $\zeta$-Wellen äquidistante Lagen, wie sie den Werten $p = -3p',\ -p',\ +p',\ +3p'$ entsprachen. Hier müßte dann

$$(57)\quad \left\{\begin{array}{l} \nu^2 r^2 = \nu^2 (f_{12}^2 + g_{23}^2 + f_{34}^2 + g_{41}^2) = 10\,p'^2, \\ \nu^4 u^2 = \nu^4 (g_{41}g_{32} + f_{12}f_{34})^2 = 9\,p'^4 \end{array}\right.$$

sein. Dem entsprechen in einfachster Weise die folgenden Wertsysteme

$$(58)\quad \left\{\begin{array}{llll} \nu f_{12} = 2p', & \nu g_{23} = (\pm)p', & \nu f_{34} = 2p', & \nu g_{41} = (\mp)p', \\ \nu f_{12} = (\pm)2p', & \nu g_{23} = p', & \nu f_{34} = (\mp)2p', & \nu g_{41} = p', \\ \nu f_{12} = (\pm)p', & \nu g_{23} = 2p', & \nu f_{34} = (\mp)p', & \nu g_{41} = 2p', \\ \nu f_{12} = p', & \nu g_{23} = (\pm)2p', & \nu f_{34} = p', & \nu g_{41} = (\mp)2p'; \end{array}\right.$$

die doppelten Vorzeichen haben hierbei keine Beziehungen zu denen in den obigen Formeln, wo sie die beiden $\zeta$-Wellen unterscheiden.

Indessen führen ähnlich, wie in dem Falle von p. 217, diese einfachsten Wertsysteme auf Zerlegungen von spezieller und nicht weiter interessierender Form. Wenn $g_{23} + g_{41} = 0$ ist, so werden die Intensitäten der Komponenten symmetrisch auf die Mitte, ein Fall, der oben ohne Koppelungen zweiter Art erledigt ist. Demgemäß kann das erste und das letzte Wertsystem außer Betracht bleiben. Das zweite und dritte System führt auf Fälle, wo je eine Komponente der Art $p = \pm p'$ und eine der Art $p = \pm 3p'$ verschwindende Intensität besitzt, also das Quadruplet zu einem Duplet degeneriert, das nun aber dissymmetrisch zu den Außenkomponenten des korrespondierenden Triplets liegt. Dieser letzte Fall ist insofern

nicht ohne Interesse, als er die Konstruktion anormaler Duplets in den $\zeta$-Wellen mit normalem Wert $e/m$ gestattet; er soll aber nicht weiter verfolgt werden.

Wir wollen daher nur die mit (52) korrespondierender Lösung des Systems (57) betrachten, welche gegeben ist durch

$$(59)\quad \nu f_{12} = \pm \nu g_{23} = (\pm)\frac{3p'}{\sqrt{2}}, \quad \nu f_{34} = \pm \nu g_{41} = (\pm)\frac{p'}{\sqrt{2}};$$

dabei sind beiderseits gleiche Vorzeichen zu nehmen, doch sind die $\pm$ und $(\pm)$ voneinander unabhängig. Aus diesen Werten folgt

$$(60)\quad \left\{ \Pi = 4\pi\alpha e^2 \left[ \begin{Bmatrix} 1 \pm 1/\sqrt{2} \\ 1 \mp 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} \frac{1}{p+p'} + \begin{Bmatrix} 1 \mp 1/\sqrt{2} \\ 1 \pm 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} \frac{1}{p-p'} \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{(1 \pm 1/\sqrt{2})}{p+3p'} + \frac{1 \mp 1/\sqrt{2}}{p-3p'} \right] . \right.$$

Dies gibt vier äquidistante Komponenten, deren zwei Intensitäten so gruppiert sind, daß entweder $-3p'$ und $+p'$ bzw. $+3p'$ und $-p'$ gleich sind oder $-3p'$ und $-p'$ bzw. $+3p'$ und $+p'$.

Da über derartige Quadruplets in den $\zeta$-Wellen nur erst wenige Beobachtungen vorliegen, so hat es keinen Zweck, andere Möglichkeiten zu diskutieren.

### Zusammenfassung.

1. Es ist der allgemeine Lorentzsche Ansatz in der Weise spezialisiert worden, daß die Forderung der Isotropie aufgegeben ist, und daß die Schwingungskomponenten parallel und diejenigen normal zu den Kraftlinien des Feldes ihm *für sich* unterworfen sind. In dem Ansatz für die erstere Komponente kommt dann nur *eine* Art von Koppelungen zwischen verschiedenen Elektronen vor, in dem für letztere tritt noch *eine zweite* auf. Diese zwei Arten von Koppelungen spielen bei den Anwendungen merklich verschiedene Rollen.

2. Die Ansätze sind in die allgemeinen Dispersionsformeln eingeführt, es ist also der *inverse* Zeemaneffekt untersucht worden, da bei diesem sich *neben den Frequenzen* auch die *Intensitätsverhältnisse* der Komponenten bestimmen lassen, welche letztere bei der Beurteilung des das Phänomen bewirkenden Mechanismus ganz wesentlich in Betracht kommen.

3. Der parallel den magnetischen Kraftlinien schwingenden und normal zu ihnen fortgepflanzten Welle (die $z$-Welle genannt) lassen sich weitgehend parallel behandeln die beiden normal zu den Kraftlinien zirkular schwingenden und diesen parallel fortgepflanzten Wellen (die $\zeta$-Wellen genannt). Letztere *zwei Wellen* geben merklich dieselben Absorptionslinien, wie die *eine* normal zu den Kraftlinien schwingende und normal zu ihnen fortgepflanzte $s$-Welle. Man kann sich also bei Untersuchung der Absorptionsverhältnisse auf die Behandlung der $z$- und $\zeta$-Wellen beschränken.

4. Die $z$-Welle hat im Magnetfeld jederzeit Absorptionslinien, die *nach Lage* und *Intensität* sich symmetrisch um die ursprüngliche Lage der Linie gruppieren. Dieselbe Symmetrie besitzt das von *beiden* $\zeta$-Wellen *zusammen* gelieferte System von Absorptionslinien. Jede der $\zeta$-Wellen einzeln hat im allgemeinen Absorptionslinien, denen keinerlei Symmetrie eignet; die Komponenten sind indessen immer *dann* nach Lage *und* Intensität zentrisch angeordnet, wenn *nur Koppelungen erster Art* zwischen den Elektronen stattfinden. Da im allgemeinen aber die Erfahrung wenigstens bezüglich der Intensitäten unsymmetrische Verteilungen aufweist, so sind die Koppelungen zweiter Art beizubehalten.

5. Geht man von den derartig allgemeinen Ansätzen für die $\zeta$-Wellen aus, so kann man zeigen, daß, *wenn eine zentrische Symmetrie der Lage* vorhanden ist, die Zentren notwendig je einer *derjenigen* Positionen entsprechen, welche die Linien ohne alle Koppelungen einnehmen würden, d. h. einer der Außenkomponenten des Triplets. Es lassen sich auch einfache und symmetrische Spezialisierungen des allgemeinen Ansatzes angeben, die für beide $\zeta$-Wellen auf Komponentensysteme führen, die in sich *der Lage (nicht aber der Intensität) nach zentrisch symmetrisch* sind.

6. Das Symmetriezentrum derartig symmetrischer Komponentensysteme scheint nach der Erfahrung in der großen Mehrzahl der bekannten Fälle den Abstand $(b+1)\,a/b$ von der ursprünglichen Lage der Absorptionslinie zu haben, wobei $a$ der Normalabstand im Triplet und $b$ eine (kleine) ganze Zahl ist. Der normale Abstand $a$ selbst ist relativ selten.

7. Bei nur *zwei* gekoppelten Elektronen treten in den

Gleichungen für die $z$-Welle und die $\zeta$-Wellen nur ein bzw. zwei Koppelungsparameter auf, die sich aus der Trennung der Komponenten allein, bzw. aus der Trennung und den Intensitätsverhältnissen bestimmen lassen. Demgemäß kann man hier auch stets diejenigen Koppelungen angeben, die irgend einem Falle der Rungeschen Regel bei gegebenen Intensitätsverhältnissen entsprechen.

8. Von Interesse ist, daß bei der Koppelung von zwei Elektronen doch unter Umständen in jeder $\zeta$-Welle nur *eine* Absorptionslinie auftritt. Man kann demgemäß versuchen, die Triplets mit anormalen Abständen dadurch zu erklären, daß man sie als Quintuplets mit zwei verschwindenden Komponenten auffaßt. Dies würde den Vorteil bieten, daß bei diesen anormalen Triplets doch der *normale* Wert für $e/m$ beibehalten werden könne.

9. Bei der Koppelung von *drei* Elektronen treten in den Formeln der $z$-Welle drei, in denen der $\zeta$-Welle sechs Parameter auf; Erfahrungstatsachen über die Lagen und die Stärken der Absorptionslinien reichen hier nicht mehr aus, um sie sämtlich zu bestimmen, man kann vielmehr noch willkürliche vereinfachende Annahmen machen. Es bietet keine Schwierigkeiten, Fälle zu konstruieren, die nach Anordnung und Intensitätsverteilung speziellen Nonetten entsprechende Resultate ergeben. Auch hier kann man Koppelungen angeben, bei denen die Anzahl der in jeder $z$- und $\zeta$-Welle wahrnehmbaren Absorptionsstreifen kleiner als drei ist.

10. Der Fall der Koppelung von *vier* Elektronen bietet das spezielle Interesse, daß bei ihm die Annahme der zentrischen Verteilung der vier Absorptionslinien einer Welle noch nicht die Annahme der Äquidistanz in sich schließt, und ist deshalb gleichfalls diskutiert. Die Verhältnisse werden hier bereits sehr kompliziert. Für die $z$-Wellen erscheinen sechs Koppelungsparameter, die in den Schlußformeln aber nur in drei Kombinationen vorkommen; für die $\zeta$-Wellen sind die betreffenden Zahlen im allgemeinsten Fall zwölf und sechs. Ein Rückschluß von Beobachtungen über Verteilung und Intensität der Linien auf die Parameter ist also im hohen Grade unbestimmt, und man wird ohne willkürliche Spezialisierungen, für die sich gewisse Symmetrien empfehlen, kaum vorgehen

können. Die bei Ne beobachteten Zerlegungen in zwölf Komponenten, die hierher gehören, haben relativ einfachen Charakter, und man kann Analoga zu ihnen leicht konstruieren.

11. Die letzten Resultate machen es zweifelhaft, ob es überhaupt rationell ist, die Fälle des Auftretens von drei, vier, fünf und mehr Linien in jeder $z$- und $\zeta$-Welle auf die Koppelung der *gleichen* Anzahl von Elektronen zurückzuführen; es empfiehlt sich vielleicht mehr, vier Linien als Superposition von zwei Duplets anzusehen, also in der Substanz zwei Arten von Koppelungen der Elektronen zu zwei anzunehmen usf. Die Art, in welcher sich die Abstände der Komponenten bei den komplizierteren Koppelungen durch die Koppelungskonstanten ausdrücken (es treten in den betreffenden Formeln z. B. vielfach Quadratwurzeln aus Quadratsummen dieser Konstanten auf), macht es überdies nicht wahrscheinlich, daß in jenen Fällen die Rungesche Regel sich aus einfachen Zahlenverhältnissen zwischen Koppelungskonstanten gewinnen lassen möchte.

Göttingen, September 1907.

(Eingegangen 30. September 1907.)

## 2. *Über die Verteilung der Kondensationskerne in staubfreier gesättigter Luft, und über ihre Beobachtungsmethoden;*[1] *von Carl Barus.*

1. *Kondensationskerne.* Verfasser bemerkt, daß die beschriebenen Untersuchungen sich durchweg auf staubfreie Luft beziehen, d. h. die gewöhnlichen oder Aitkenschen Nuclei sind der Luft durch Filtration entzogen. Es ist Sorge getragen, daß die Luft durchweg gesättigt erhalten bleibt (ausgespannte nasse Tücher u. dgl.). Die Prüfung geschieht in einer horizontalen zylindrischen Kondensationskammer (45 cm lang, über 13 cm weit) aus Glas mit Metalldeckel. Diese ist durch eine weite Messingröhre (40 cm lang, 6 cm im Durchmesser) mit einer großen eisernen Vakuumkammer (150 cm lang, über 30 cm im Durchmesser) verbunden. In der Verbindungsröhre befindet sich der massive Hahn, welcher eine lichte Weite von mehr als 6 cm haben muß. Ferner ist derselbe mit Öldichtung gegen die äußere Luft zu versehen, um sich zugleich rasch und leicht drehen zu lassen. Die Fig. 1 zeigt zwei solche Apparate ($V, F$, Vakuum- bzw. Kondensationskammer) nebeneinander stehend. Die Schläuche dienen zur Druckmessung, zu Filtrier- bzw. Nukleationszwecken usw. Die Luft wird zum Teil im reinen Zustande untersucht, zum Teil unter dem Einfluß der $X$-Strahlen oder der $\beta$- und $\gamma$-Strahlen des Radiums (schwache Exemplare, 10000 $X$, 100 mg, in einer dünnen Röhre aus Aluminium hermetisch verschlossen). Die Strahlen kommen stets von außen. Nach jeder Kondensation müssen die Wasserkerne (vgl. § 8), wenn sie nicht selbst das Beobachtungsmittel bilden, strengstens entfernt werden.

1) Die vollständige Arbeit, auf welcher sich obiger Auszug bezieht, wird in den Carnegie Publications Washington erscheinen; ferner vgl. man Carnegie Publications No. 62. 1907.

Es handelt sich also in der vorliegenden Mitteilung wesentlich 1. um die Dampfkerne der staubfreien gesättigten Luft (dieselben sind wahrscheinlich Aggregate aus verhältnismäßig wenigen Wassermolekeln); 2. um die Ionen, welche durch ein künstliches oder natürliches äußeres Strahlenfeld in der Kammer selbst hervorgerufen sind; 3. um die Wasserkerne, welche in staubfreier Luft durch die Verdampfung von Nebelpartikelchen entstehen. Hier ist dann weiter zu unterscheiden zwischen den Wasserkernen, die aus der Verdampfung der Nebel entstehen, welche bzw. auf Lösungskerne (wie die des Phosphor usw.), oder auf Ionen, oder auf Dampfkerne niedergeschlagen wurden. Bei der Eichung wird man am sichersten mit Lösungskernen operieren.

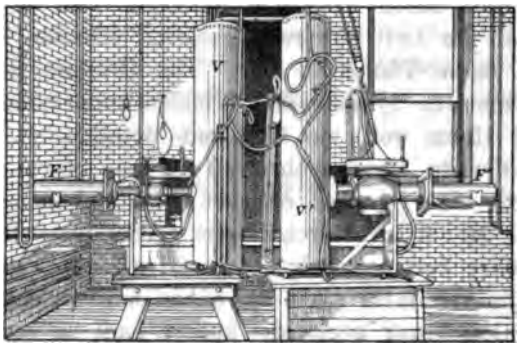


Fig. 1. Nebel- und Vakuumkammern.

2. *Beobachtungsmethoden.* Die Anzahl der Nuclei bestimmt sich aus dem Winkeldurchmesser der Koronen der nebelartigen Kondensation, bei gegebenem Druck- bzw. Temperaturabfall der gesättigten Luft. Die Eichungsmethode wurde vom Verfasser u. a. in der Boltzmannschen Festschrift (1904. p. 204) beschrieben. Später ist daran vieles verbessert worden. Zieht man von dem künstlich hochnukleierten Medium (am besten eignen sich *P*-Nuclei) bestimmte Mengen durch sukzessive identische Exhaustionen ab, indem man nach der Beobachtung die Nebelkammer jedesmal mit staubfreier Luft nachfüllt, so bilden die aufeinander folgenden Nukleationen (Kernzahlen pro Kubikzentimeter) eine geometrische Progression. Bei den Ver-

suchen muß man sich an vorbestimmte Zeitintervalle halten, z. B. 5 Sek. zwischen Öffnung des Hahnes und der folgenden Schließung desselben, sowie der Einleitung der staubfreien Luft, 60 Sek. zwischen aufeinander folgenden Exhaustionen oder dgl. Wegen des geringen Herausfallens der gravitierenden Nebeltropfen ist zu korrigieren. Es verhält sich dann die letzte Nukleation ($n_s$) zur ersten $n_1$, folgendermaßen:

$$n_s = n_1 y^{s-1} \Pi \left(1 - \frac{S}{s_{s-1}^2}\right).$$

Hier ist $y$ die jedesmalige Verdünnung, das Produkt $\Pi$ die Korrektion wegen des Absetzens der Tropfen, wobei $S$ eine Experimentalkonstante und $s_{s-1}$ der Öffnungswinkel der vorhergehenden Korone bedeuten. Wegen anderen Zeitverlusten braucht man bei systematischer Ausführung des Beobachtungsganges nicht zu korrigieren. Letzteren sollte man mit jedem neuen Apparat vorläufig wiederholen.

Um den Winkeldurchmesser der Hauptfarbenringe der Koronen zu bestimmen, bediente sich der Verfasser früher

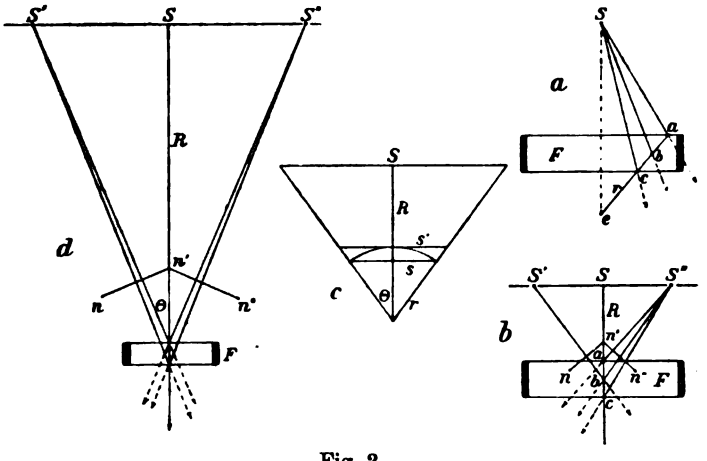



Fig. 2.

eines rasch einstellbaren Goniometers. Der Öffnungswinkel muß stets der Koronenfarbe zugeordnet werden. Es genügt hier eine einzige kleine Lichtquelle (vgl. Fig. 2a). Bei größeren Koronen liegen aber dann die diffraktierenden Nebeltropfen $a, b, c$, welche zugleich Strahlen dem Auge $e$ zusenden, mehr und

mehr am Ende der Nebelkammer $F$, was zu Refraktionsfehlern Veranlassung gibt. Schließlich werden sogar die Strahlen abgeschnitten.

Es würde daher die Methode Fig. 2b, welche in Fig. 2d skalenmäßig wiedergegeben ist, vorgezogen. Man operiert hier mit zwei identischen, zum Auge bei $c$ symmetrischen Lichtquellen $S', S''$, welche sich durch zweckmäßige Mechanismen (Kette und Zahnrad), längs der Schiene $S$, in gleichen Beträgen parallel zur Achse der Nebelkammer zusammenrücken oder voneinander entfernen lassen. Die Beobachtung geschieht in der Weise, daß man die maßgebenden Ringe der beiden Koronen $nn'$ und $n'n''$ bei $n'$ zum Kontakt bringt und dann den entsprechenden Abstand $S$, bei festen Radius $R$, mißt. Die Einstellung wird rasch durch eine in der Hand des Beobachters vermittelnde Stange (etwa 250 cm lang) bewerkstelligt. Ist der Beugungswinkel $\theta$, so gilt $S = 2R \operatorname{tg} \theta$, im Gegensatz zu $S = 2r \sin \theta$ im Falle der Fig. 2a. Die zusammengehörigen Größen $S$, $s$, $s'$, $R$, $r$, $\theta$ sind in der Fig. 2c angedeutet. Die Vorzüge dieser neuen Kontaktmethode bestehen darin, daß die beugenden Nebeltropfen $a$, $b$, $c$ in der Äquatorialebene der Nebelkammer $F$ gelegen sind. Man hat es im ganzen mit weniger schiefen Strahlen, daher mit einer geringeren schiefen Refraktion zu tun. Koronen jeder Größe sind beobachtungsfähig, eine sehr wichtige Sachlage, da bei den großen Koronen die Öffnungswinkel $2\theta = 60°$ übersteigen. Schließlich kann man beide Augen anwenden und bei $c$ dicht an der Nebelkammer beobachten, was ein bedeutend geschärftesund weniger angestrengtes Sehen ermöglicht.

In praktischer Hinsicht vermeidet man bei Anwendung des Auerstrumpfes die außerordentlich große Farbenkomplikation, welche die Koronen bei elektrischem Licht zeigen. Weil man die Farbe der Winkelöffnung zuordnen muß, ist das Arbeiten mit Koronen nicht nur mühsam, sondern zahlenmäßig unscharf. Wo alle anderen Beobachtungsmethoden fehlen, wird man es aber gerne anwenden, zumal es bei einem großen Bereiche von Erscheinungen (z. B. die Molekularstruktur des Dampfes) recht brauchbare Aufschlüsse ergibt.

3. *Berechnungsmethode.* Beobachten lassen sich nur die Anfangsdrucke $p$ und $p'$ der Nebel- bzw. der Vakuumkammer,

bei der isothermen Temperatur $\tau$ und der Enddruck $p_3$, wenn nach der Exhaustion beide Kammern bei derselben Temperatur $\tau$ kommunizieren. Alle anderen Größen, sowohl Drucke wie Temperaturen und Wasserniederschläge, sind aus diesen vorbestimmten Größen in Anbetracht des gegebenen Volumverhältnisses $[v/V]$ zwischen Nebel und Vakuumkammer, der Zustands- und adiabatischen Gleichungen der Gasmasse zu berechnen. So z. B. ist der adiabatische Druck $p_1$, wenn sich die gestrichelten Buchstaben auf die Nebelkammer beziehen, und wenn $\pi$ mit Strich oder Index die entsprechenden Dampfspannungen, $c$ und $k$ die beiden spezifischen Wärmen bezeichnen:

$$\frac{p_1 - \pi_1}{p_1^{1-c/k}} = \frac{(p_3 - \pi)(1 + [v/V])}{p'^{(1-c/k)}\left(1 - \frac{\pi_1' - \pi_1}{p_1 - \pi_1}\right) + \left[\frac{v}{V}\right] p^{(1-c/k)}},$$

wo man rechts anstatt $p_1$ den genäherten Wert $p_3$ setzen darf. Daher der Vorteil der großen Vakuumkammer.[1])

Die Volumausdehnung $v_1/v$ der Nebelkammer folgt dann aus $p_1$ und $p$; ebenfalls die adiabatisch verringerte Temperatur $\tau_1$ aus $\tau$ vor der Kondensation. Ist $\varrho$ die Anfangsdichte (bei $p$ und $\tau$), $L$ die latente Wärme der Luft, so berechnet sich der Niederschlag pro Kubikzentimeter analog der von C. T. R. Wilson[2]) und J. J. Thomson gebrauchten Näherungsmethode zu

$$m = \varrho \frac{c}{L} \frac{p_1 - \pi_1}{p - \pi} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1-c/k} (\bar{\tau}_1 - \tau_1),$$

wo $\bar{\tau}_1$ die adiabatische Temperatur der Luft in der Nebelkammer, erhöht durch die Kondensation des Wasserdampfes, bedeutet. Schließlich ist $\bar{\tau}_1$ durch Hinzuziehen des bekannten Verhältnisses zwischen der Dichte des gesättigten Wasserdampfes und der Temperatur zu bestimmen. Es läßt sich $p_1$ oft durch $p_3$ ersetzen. Für die Praxis ist es notwendig, eine $m$-Tabelle in bezug auf Druckabfall und Temperatur der Nebelkammer zu berechnen.

Außer $p$, $p_1$, $p_3$, $\tau$ sind weitere Beobachtungen an der Nebelkammer bedeutungslos. So ist z. B. in $^1/_4$ Sek. nach der

1) Vgl. C. Barus, Phil. Mag. (6) 13. p. 357. 1907. Genauer, mit Korrektion eines Fehlers in der adiabatischen Gleichung, im American Physical Review 24. p. 383. 1907.

2) C. T. R. Wilson, Phil. Trans. London 189. p. 298 ff. 1897.

Evakuation die Temperatur der Nebelkammer auf etwa 60 Proz. des ganzen Intervalles zwischen der adiabatischen $\tau_1$ und der isothermen Temperatur $\tau$ gestiegen. Nach 10 Sek. herrscht praktische Temperaturgleichheit.

4. *Die grünen Koronen.* Teilt man die Koronen in zwei Gruppen ein, diese mit rötlichem inneren Feld oder Hauptringen, jene mit grünlichem Feld, so sind die letzteren zur Vergleichung der laufenden Beobachtungsresultate geeignet. In den sukzessiven identischen Evakuationen der beschriebenen Methode erscheinen sie im Ablauf regelmäßiger Intervalle. Unter den größeren Koronen zeichnen sich wenigstens drei[1]) durch intensiv grüne Färbung aus. Die Durchmesser der zugehörigen Nebelpartikelchen bestimmten sich zu $d_4 = 0{,}00052$ cm, $d_3 = 0{,}00040$ cm, $d_2 = 0{,}00023$ cm.

Man ist geneigt, diese Zahlen gleichbedeutend mit dem Verhältnis 4, 3, 2 zu deuten, was auf einen ersten Zyklus hinweist, dem die grüne Korone mit $d_1 = 0{,}00013$ cm zugeordnet ist. Dem Verfasser ist es niemals gelungen, diese Korone zu verwirklichen; wohl aber wird die große rote Korone des ersten Zyklus bisweilen deutlich erhalten, einer Reihe von Partikelgrößen $d_1 = 0{,}00016$ cm bis $d_4 = 0{,}00064$ cm entsprechend. Der Winkeldurchmesser $d_1$ beträgt hier etwa 60°, woraus sich nicht nur die enorme Größe dieser ersten Koronen, wenn das Auge sich in einem Abstand von der Nebelkammer befindet, ergibt, sondern die Notwendigkeit großer Nebelkammern erhellt. Die Existenz dieses ersten Koronenzyklus findet sich im Einklang mit den entsprechenden (roten bis gelben) Axialfarben des Dampfstrahles. Nachher erlischt jede Farbenerscheinung und der Dampf wird klar.

Die Anzahl $n$ der Kondensationskerne, welche einer gegebenen Korone zukommen, hängt wegen $m$ wesentlich von dem plötzlichen Druckabfall $\delta p = p - p_3$ ab.

Variiert man also $\delta p$ bedeutend, etwa von 10 cm in einer ersten Beobachtungsserie bis 20 cm in einer folgenden, so muß sich aus den $n$-Werten derselben grünen Korone stets derselbe Tropfendurchmesser $d$ berechnen lassen. Es dient dies zur Kontrolle der Eichung.

1) Die kleineren grünen Koronen liegen zu dicht aneinander und werden gewöhnlich nur durch Zufall erhalten.

Die angegebene Größenordnung der Nebeltropfen gegebener Koronen hat der Verfasser an anderer Stelle[1]) durch photographische Aufnahme zu konstatieren geglaubt.

5. *C. T. R. Wilsons Ansichten über Zahl und Größe der Nebeltropfen.* Hrn. Wilson, dem die schwierige Kondensation des Wasserdampfes auf Ionen, und die schwierigere auf Dampfkerne zuerst gelang, äußert sich in seiner berühmten Abhandlung anders. Während im vorigen Paragraphen der Schluß gezogen wurde, daß die kleinsten koronenerzeugenden Nebeltropfen die Größe 0,0001 cm übersteigen, veranschlagt Wilson, daß wenn „all diffraction colors disappear and the fog appears white from all points of view (adiabatic expansion 1, 44) ... the diameter of the drops does not exceed one wave length of light or $50 \times 10^{-6}$ cm". Voraussichtlich bezieht sich Wilson hier auf das weiße schleierartige Zentralfeld der großen roten Korone des ersten Zyklus, entsprechend einer Partikelgröße von der Ordnung $d_1 = 0{,}00016$ cm. Die ursprüngliche Wilsonsche Kondensationskammer war nun einer Probierröhre ähnlich (2 cm weit, 5 cm lang). In einer solchen würde sich schwerlich die große grüne Korone $d_2$ nicht anders als „greenish-white" beurteilen lassen. Verfasser glaubt daher hier eher das Vorhandensein von $10^6$ Dampfkernen pro Kubikzentimeter vermuten zu müssen; oder daß dem Wilsonschen letzten „filmy-white" eher einige Millionen als nach seiner Angabe $10^8$ Dampfkerne der staubfreien Luft entsprochen haben dürften. Der Vergleich ist deswegen unsicher, weil Wilson bloß zwei grüne Farben angibt. Dasselbe gilt von den *W*-Kurven der Figg. 3 und 5, in welchen Verfasser aus den Wilsonschen Farben und Ausdehnungen eine Andeutung der Lage der entsprechenden Kurven versucht hat.

6. *Verteilung der Dampfkerne und der Ionen in der staubfreien Luft.* In obiger Nebelkammer stellt sich der relative adiabatische Druckabfall $(p - p_1)/p$, welcher bei großer Vakuumkammer nahezu gleich $(p - p_3)/p = \delta p$ wird, als bequeme Verteilungsvariable dar.

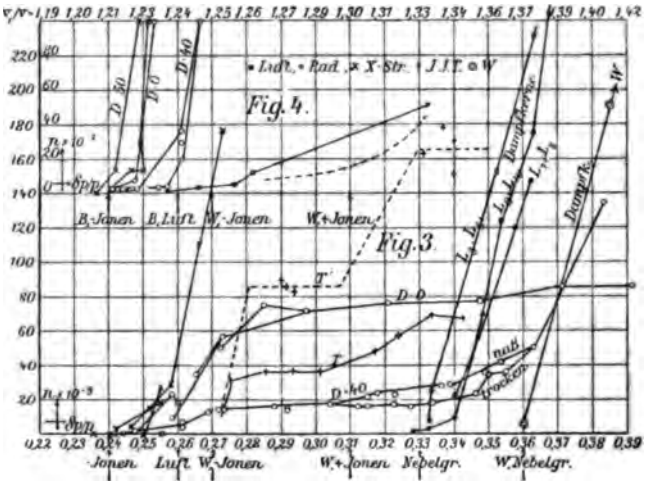
Hier ist $p$ der Anfangsdruck, $p_3$ der Enddruck der Nebelkammer bei derselben Temperatur und bei kommuni-

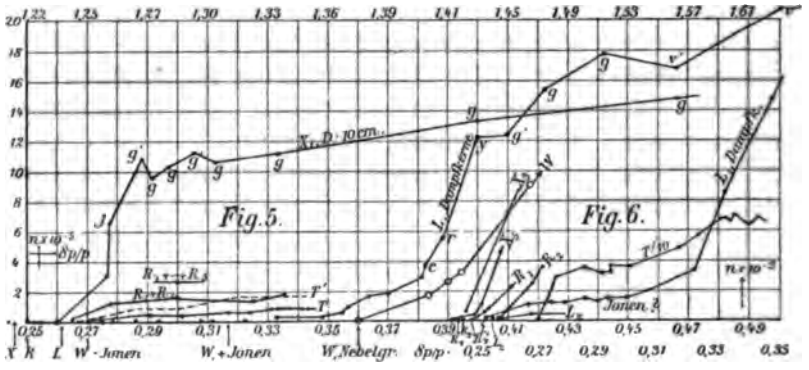
1) C. Barus, Physik. Zeitschr. 6. p. 718. 1905.

zierenden Kammern. Es ist also stets auf $p_s$ zu warten. Die adiabatische Volumausdehnung schreibt sich dann:

$$(v_1/v)^{k/c} = 1/(1 - \delta p/p),$$

und zwar sind $(v_1/v - 1)$ und $\delta p/p$ im allgemeinen ähnliche Größenordnungen.




In den Figg. 3, 4, 5 und 6 hat Verfasser eine Übersicht der älteren und neueren Resultate gegeben. Die Ordinate bezeichnet jedesmal die Anzahl $n$ der Kondensationskerne pro Kubikzentimeter in der staubfreien nassen Luft, und zwar in verschiedenen Skalen, je nachdem $n\,10^{-2}$, $n\,10^{-3}$, $n\,10^{-5}$. Die Abszisse ergibt (unten) den relativen adiabatischen Druckabfall

$\delta p/p$, oder auch (oben) die Volumausdehnung $v_1/v$. Die Hauptfarben der Koronen sind abgekürzt (*g* grün, *y* gelb, *r* rot, *c* tiefrot usw.). *W* bezieht sich auf Resultate C. T. R. Wilsons[1]), *T* auf die klassischen Resultate J. J. Thomsons, welche mit Wilson übereinstimmen. *X*, *R* beziehen sich auf Einwirkung der *X*-Strahlen, bzw. der $\beta$- und $\gamma$-Strahlen des Radiums, und zwar aus einer Entfernung *D* außerhalb der Nebelkammer. *L* ergibt sich für $D = \infty$ und entspricht also der staubfreien gesättigten Luft. Resultate, welche entweder mit *B* oder sonst nicht weiter bezeichnet sind, wurden mit verschiedenen Formen des Apparates Fig. 1 erhalten. Verschiedene Beobachtungsserien werden oft durch Indizes ($L_1$, $L_2$ usw.) bezeichnet.

Bei den Dampfkernen der staubfreien gesättigten Luft unterscheidet man nach Wilson eine Kondensationsgrenze, unterhalb welcher die Kondensation überhaupt aufhört, und eine Nebelgrenze, oberhalb welcher die Koronen rasch anwachsen. Der Verlauf ist aber kontinuierlich. Unter der Abszissenachse sind diese Punkte sowohl für gewöhnliche wie für hochionisierte Luft besonders angegeben.

Die Kurven sind also durchweg Verteilungskurven. Im allgemeinen nimmt die Größenordnung der Kerne mit zunehmendem $\delta p/p$ ab. Bei den Dampfkernen hat man es daher mit der inneren oder Molekularstruktur des Wasserdampfes zu tun und es sind die Resultate in dieser Hinsicht wichtig. Bei gegebenem Temperaturverhältnis usw., finden sich im gesättigten Wasserdampf stets ganz bestimmte Aggregate oder Molekularkomplexe definitiver Größe in ganz bestimmter relativer Anzahl vor. Dieselben werden in gleicher Anzahl sofort erneuert, wie oft auch man sie niederschlagen mag.

Alle Kurven laufen schließlich in einer Asymptote aus, die wahrscheinlich horizontal sein sollte und einer doppelten Interpretation fähig ist. Entweder sind bei der betreffenden Volumausdehnung, bzw. $\delta p/p$, alle Kerne abgefangen, welche der gegebenen Abkühlung entsprechen (z. B. bei den Kurven der Radiumeinwirkung), oder es läßt die Abkühlfähigkeit, daher die Kondensationsfähigkeit der Nebelkammer nach (z. B. bei

1) Die *W*-Kurven der Figg. 3 und 5 haben nur die Bedeutung eines Versuches, alle vorhandenen Resultate übersichtlich darzustellen. Wilson selbst gibt nur Farben und Ausdehnungen an.

den Kurven für staubfreie Luft). Es ist nicht immer leicht, zwischen diesen Bedingungen zu unterscheiden. Effektiv große Kerne verdecken die kleinen mehr und mehr, je nach dem Größenunterschiede. Nach J. J. Thomson ist die elektrische Ladung einer effektiven Vergrößerung des Kernes äquivalent und es würden sich die ungeladenen Ionen sogar kleiner als die Dampfkerne erweisen.

7. *Desgleichen spezielles.* In bezug auf die Kerne der gesättigten staubfreien Luft gibt Figg. 3 und 4 sechs ältere, zu verschiedenen Zeiten gemachte Beobachtungsserien. Die Unterschiede sind wahrscheinlich Temperaturfunktionen, da man einige Prozent Zunahme der Nukleation pro Grad Zuwachs der Temperatur annehmen muß. In den neueren Resultaten, Figg. 5, 6, erlischt die Kondensationsfähigkeit des Apparates oberhalb der grünen Koronen, etwa bei $1{,}5 \times 10^6$ Kernen pro Kubikzentimeter und bei $\delta p/p = 0{,}41$ oder $v_1/v = 1{,}45$. Unterhalb dieser Grenze ist die Kurve gut angedeutet. Der Anstieg oder die Nebelgrenze fängt etwa bei $\delta p/p = 0{,}31$, $v_1/v = 1{,}30$ an. Darunter verläuft (vgl. Fig. 6) die vermutete Ionenregion, in welcher etwas über tausend Kerne zugegen sind, sehr allmählich abnehmend bis $\delta p/p = 0{,}262$ oder $v_1/v = 1{,}24$. Das ist die vom Apparat (Fig. 1) gegebene Kondensationsgrenze der Dampfkerne. Es liegt dieser Punkt also definitiv unter Wilsons $1{,}25 = v_1/v$, welcher bei ihm mit den negativen Ionen zusammenfällt. Setzt man die Luft der Einwirkung des Radiums aus ($\beta$- und $\gamma$-Strahlen), so läßt sich die Nukleation über verhältnismäßig niedrige Asymptoten nicht leicht hinaufzwingen. Eine Radiumkapsel[1]) (10000 $X$, 300 mg), an der Außenwand der Kammer befestigt, gibt im Maximum unter 200000 Ionen, eine solche[2]) mit 10000 $X$, 700 mg, unter 300000 Ionen pro Kubikzentimeter.

Das hängt damit zusammen, daß die Anzahl Ionen, welche pro Sekunde erzeugt werden, schlechtweg (§ 9) mit dem Quadrat von der Gleichgewichtsnukleation $n$ anwachsen muß, also etwa mit der sechsten Potenz der Koronenöffnung. Es ist also immer die Vergrößerung des Koronendurchmessers durch ein

---

1) $R_1 + R_2$ in Fig. 5.
2) $R_1 + \ldots + R_5$ in Fig. 5.

enorm rasches Anwachsen des Erzeugungskoeffizienten bedingt. In dieser Beziehung ist die außerordentlich kräftige Einwirkung der *X*-Strahlen merkwürdig.

Bei den Ionen beginnt aber im Apparat (Fig. 1) die Kondensation bereits wesentlich unter $\delta p/p = 0{,}26$ oder unter $v_1/v = 1{,}23$, also deutlich unterhalb des Punktes für staubfreie Luft oder des Wilsonschen Punktes für negative Ionen, welcher letzterem gleichbedeutend ist.

Schließlich erniedrigen die *X*-Strahlen die Kondensationsgrenze der negativen Ionen noch weiter, bis auf etwa $\delta p/p = 0{,}247$ oder etwas unter $v_1/v = 1{,}223$, deutlich unterhalb des nämlichen Punktes der Einwirkung des schwachen Radiums. Im Vergleich mit den Luftkurven (Dampfkerne) ist der Anstieg bei der starken Ionisation im Feld der *X*-Strahlen ebenfalls steiler, fast plötzlich. Verfasser konnte aber im obigen Apparat nicht über die grünen Koronen hinauskommen, d. h. es ließen sich etwa $10^6$ Ionen bei dem adiabatischen Druckabfall $\delta p/p = 0{,}29$ oder $v_1/v = 1{,}27$ abfangen. Darüber hinauszukommen ist entweder deswegen unmöglich, weil der Apparat versagt, oder es sind sämtliche Ionen in der Tat niedergeschlagen. Wahrscheinlich ist letzteres der Fall.

Die Dampfkerne der gesättigten Luft in der Gegenwart der Ionen als Kondensationskerne zu verwenden, gelingt im allgemeinen nicht. Die Ionen beanspruchen den ganzen Wassergehalt der Luft für sich. Nur bei schwächerer Ionisation (vgl. Fig. 3; etwa bei $n = 20000$, z. B. im Falle des Radiums, 100 mg, 10000 *X*, im Abstand $D = 40$ cm) kommen die Dampfkerne bei erhöhter Ausdehnung, $v_1/v$, zur Geltung. Die Kurve verläuft dann auch etwas anders, je nachdem das Glasinnere durch stetiges Umspülen naß oder verhältnismäßig trocken (nicht umspült) erhalten wird. Auch bei etwas stärkerer Ionisation, $n = 40{,}000$ etwa, fängt man noch Ionen und Dampfkerne zugleich auf, aber nur bei sehr starker Exhaustion. Die Kondensation ist dann diffus und koronenlos.

Bemerkenswert ist, daß in Nebelkammern obiger Art sowohl die Kondensationsgrenzen wie die Verteilungskurven durchweg unter den Werten zu liegen kommen, welche Wilson (und andere, vgl. w. u.) in seinem Kolbenapparat ermittelten. Man vergleiche die *W*-Punkte in Figg. 3 bis 6 mit den übrigen.

Verfasser findet außerdem einen deutlich ausgesprochenen Gang der Kondensationspunkte mit der Stärke des Strahlenfeldes, während bei Wilson alles fest sitzt. Beurteilt man die Intensität der Strahlung nach dem Maximum $n_0$ der erzeugten Ionen (Asymptote), so liegen folgende Werte vor:

| | | |
|---|---|---|
| Staubfreie gesättigte Luft | $v_1/v = 1{,}24$ | $n_0 \times 10^{-3} = 1{,}5$ |
| $\beta$- und $\gamma$-Strahlen . . . | 1,225 | $n_0 \times 10^{-3} = 100$ bis 150 |
| $X$-Strahlen . . . . . | 1,22 | $n_0 = 10^6$ bis $2 \times 10^6$ |

Nun verhält sich die Stärke des Strahlenfeldes schlechtweg (§ 9) wie $n_0^2$, d. h. wenn die Strahlungsintensität von 1 bis $10^4$ oder 1 bis $10^6$ wächst, so fallen die Kondensationsgrenzen $v_1/v = 1{,}24$ um 1,2 bzw. 1,6 Proz. ab.

In den Figg. 3, 5, 6 (in letzterer zehnfach verkleinert) sind die Ionisationswerte, welche J. J. Thomson mit dem Wilsonschen Apparat bei Gelegenheit seiner $e$-Bestimmung erhielt, unter $T$ und $T'$ zur Übersicht eingetragen. Diese beziehen sich selbstverständlich auf die Wilsonschen Kondensationsgrenzen. Die beiden, den negativen sowie den positiven Ionen entsprechenden Stufen im Verhältnis $n_- : n_- + n_+ = 1:2$, welche Wilson[1]), Thomson[2]), Przibram[3]) mit dem Wilsonschen Apparat erkennen, lassen sich in obiger Kondensationskammer nicht nachbilden. Es ist dies etwas schwer zu erklären, weil sich die Dampfkerne in Gegenwart der mäßigen Ionenzahl sehr wohl abfangen lassen. Es müssen daher sämtliche positive Ionen, auf welche die Kondensation viel leichter stattfindet als auf Dampfkerne, vorher zur Fällung gebracht worden sein.

8. *Wasserkerne. Verhalten bei sukzessivem identischen Druckabfall.* Wasserkerne werden besonders bei der Verdampfung von Nebeltropfen erhalten, und zwar am bequemsten bei der Kompression vermittelst der durch das Filter hereintretenden staubfreien Luft. Dieselben unterscheiden sich je nach den Kondensationskernen, auf welchen die Nebeltropfen niedergeschlagen wurden. Unter vielen Unterscheidungsmethoden, welche Verfasser probierte, bewährte sich die oben vermerkte der sukzessiven Partialexhaustionen am besten. Die Kerne

1) C. T. R. Wilson, Phil. Trans. London 189. p. 265—307. 1897.
2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) 5. p. 346. 1903.
3) H. Przibram, Wiener Ber. 115. Abt. IIa. Januar 1906.

werden durch die zahlenmäßig aufeinanderfolgenden gleichen Ausdehnungen, mit Einschluß des Gravitierens, schließlich zum Verschwinden gebracht.

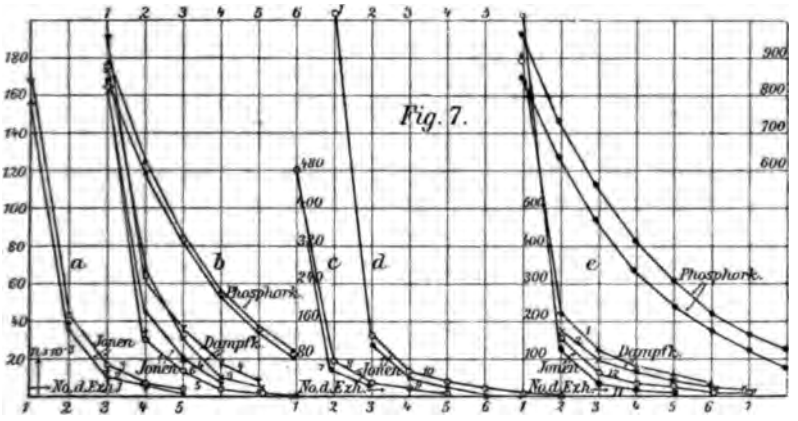



*Fig. 7.*

Einige typische Versuchsreihen mögen in Kurven wiedergegeben werden. In Fig. 7, *a* bis *e*, gibt die Abszisse die laufende Zahl der Partialexhaustion an, die Ordinaten zeigen die Anzahl der Wasserkerne pro Kubikzentimeter bzw. die Anzahl der Nebeltropfen, die sich darauf niederschlagen. Zwischen je zwei Exhaustionen findet in möglichst kurzer Zeit die entsprechende Verdampfung statt. Bei den ersten Exhaustionen wird natürlich auf den Originalkernen präzipitiert, wonach die Kurven benannt sind. Verwendet wurden Lösungskerne (Phosphoremanation), Ionen und Dampfkerne in staubfreier gesättigter Luft. Man überblickt sofort, daß das Verhalten dieser Kerne den sukzessiven Verdampfungen gegenüber ein ganz verschiedenes ist. Die Anfangs-$n$-Werte sind bedeutend variiert.

Knüpft man an obiger Gleichung für die $z^{\text{sche}}$ Nukleation $n_z$ in bezug auf die erste $n_1$ an, welche sich für Lösungskerne bewährt, so muß man nunmehr einen neuen Koeffizienten $(1 - x)$ einführen, welcher den relativen Verlust bei den Verdampfungen der Reihe nach anzeigt. Nun ist $x$ für jede Verdampfung verschieden, und zwar mit wachsender Anzahl abnehmend. Daher gilt

$$n_z = n_1 y^{z-1} x x' x'' \ldots \quad II.$$

Diese Überlebungskoeffizienten $x$, $x'$, $x''$... stellt man am besten in bezug auf den Durchmesser $d$ (in Zentimetern) der verdampfenden Nebeltropfen dar, wie dies in Fig. 8, $a$ bis $e$ ausgeführt ist. In Fig. 8, $a$, $b$ wurden als Originalkerne Ionen angewendet, und zwar in den neun Beobachtungsserien in sehr verschiedener Anzahl (vgl. Fig. 7); in Fig. 9, $c$, $d$ hingegen befinden sich vier Beobachtungsreihen mit verschiedener Anzahl der Dampfkerne der staubfreien gesättigten Luft. Bei Lösungskernen (Phosphoremanation) ist $x = 1$. Fig. 8, $e$ zeigt das parallele Verhalten im Falle von Dampfkernen und von Ionen in den ersten Exhaustionen.

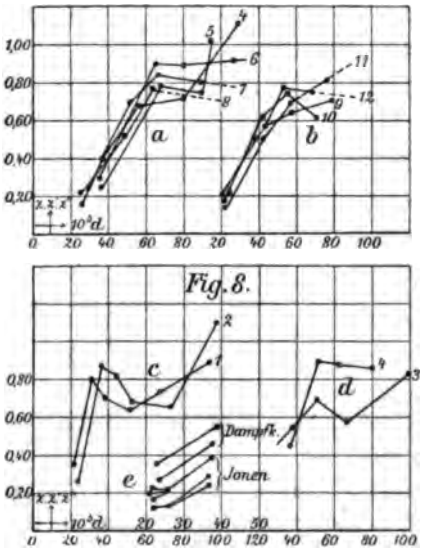


Fig. 8.

Man übersieht also, daß bei Lösungskernen, die Dampfdruckerniedrigung durch Lösung (bei fortschreitender Verdampfung) schließlich die Dampfdruckerhöhung infolge der Krümmung kompensiert und überkompensiert. Daher ist $x = 1$. Bei Wasserkernen, welche auf Ionen und Dampfkernen niedergeschlagen wurden, ist dies im ganzen nur bedingterweise der Fall. Es findet bei jeder Verdampfung ein Verlust, $1 - x$, an Wasserkernen statt. Dieser Verlust ist um so größer, je kleiner die Nebeltropfen. Er ist weitaus am bedeutendsten in der ersten Verdampfung der Nebeltropfen ausgesprochen, wo er $(1 - x)$ über 80 Proz. betragen kann. Der Verlust der Verdampfung ist ferner (*caet. par.*) größer bei ursprünglich auf Ionen niedergeschlagenen Wasserkernen als bei solchen, die auf Dampfkernen niedergeschlagen wurden (vgl. Fig. 8, $e$). Besonders bei letzteren spricht sich die Größe der Anfangsevaporation aus. Welche Bedeutung dem ferneren Verlauf des Koeffizienten $x$ in Fig. 8, $c$, $d$ zuzuschreiben ist, läßt Verfasser

dahingestellt. Wegen der Kleinheit dieser Werte sind mehr als drei, $x$, $x'$, $x''$, deswegen schwer zu erhalten, weil die Koronen rasch verschwinden. Zu bemerken wäre noch, daß die Ionen, wenn auch klein, in bezug auf die Wasserkerne, dennoch in der Gegenwart der letzten niedergeschlagen werden. Man muß sich also stets befleißigen, das Strahlenfeld ganz zu beseitigen, ehe man auf Wasserkerne prüft.

J. J. Thomson[1]) erklärt die Existenzfähigkeit der Wasserkerne im Falle, wo keine Lösung vorliegt, als Folge des Reinold-Rückerschen Minimums der Oberflächenspannung[2]) bei verschwindender Schichtendicke. Wenn sich Nebeltropfen auf den Dampfkernen der staubfreien Luft niederschlagen, so müßte ja ideal reines Wasser in jedem Partikelchen vorliegen. Warum aber nur ein kleiner Teil dieser Nebeltropfen durch die übrigbleibenden Wasserkerne repräsentiert wird, wäre noch zu erledigen. Man könnte glauben, daß unterhalb eines gewissen Durchmessers $d$ die Nebeltropfen vollständig verschwinden, oberhalb desselben aber Wasserkerne bilden. Das ist aber nicht der Fall; insbesondere weil ja alle Wassertropfen derselben Korone beisteuern. Ferner wäre der kritische Reinold-Rückersche Durchmesser bedeutend viel kleiner, als den Nebeltropfen zukommt. Daß die Zeitdauer zwischen den Verdampfungen keinen entsprechenden Einfluß hat, hat Verfasser dadurch geprüft, daß in verschiedenen Beobachtungsreihen Intervalle von 1, 2 bzw. 6 Min. eingehalten wurden. Im Verlauf der Zeit zeigen überhaupt die verschiedenen Wasserkerne keine bemerkenswerten Unterschiede. Was die Verschmelzung der Nebeltropfen bei Kollision usw. infolge der Unruhe während der Verdampfung anbetrifft, so müßte dies ja im gleichen Verhältnis ebenfalls bei Phosphornuclei zutreffen.

Es scheint also ein Verhalten eigener Art vorzuliegen, und Verfasser hat ursprünglich die ganze Erscheinung, sowohl bei Lösungskernen als bei Ionen und Dampfkernen (wahrscheinlich irrtümlich), als Lösungsphänomen aufzufassen gesucht.

---

1) J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases, Cambridge. chap. VII. p. 152—154. 1903.

2) Mit besonderer Rücksicht auf die langsam sich bewegenden Ionen haben Langevin und Bloch den Gegenstand eingehend verfolgt.

9. *Verlust der Ionen* (geladenen Kondensationskernen) *in gesättigter Luft im Laufe der Zeit.* Da die Verschwindungskoeffizienten der Ionen aus rein elektrischen Messungen bekannt sind, so könnte man daran denken, die Koronen in bezug auf die Kernzahl $n$ auf diese Weise zu eichen. Ein gegebenes Strahlfeld erzeuge $a$ Kerne pro Kubikzentimeter pro Sekunde, während $b n^2$ verschwinden. Dann ist:

$$dn/dt = a - b n^2.$$

Wird nun das Strahlfeld $t$ Sekunden vor der Exhaustion abgeschnitten ($a = 0$), so gilt:

$$1/n = 1/n_0 + b(t - t_0).$$

Kennt man nun die relative Nukleation $n/n_0$ (man könnte sie z. B. wie in § 2 ermitteln), so ließe sich die absolute Nukleation berechnen, d. h.

$$n_0 = (n_0/n - 1)/b(t - t_0).$$

Diese einfache Vermutung des Verfassers stieß aber in den Versuchen auf ungeahnte Schwierigkeiten, die darin fußten, daß der in der Nebelkammer ermittelte Koeffizient $b$ gewöhnlich über dreimal die Größenordnung $b = 10^{-6}$ des elektrischen Koeffizienten übertrifft, während er bei abnehmender Kernzahl wohl über das Zehnfache anwachsen kann. Folgendes Beispiel möge herausgegriffen werden:

| Zeit $t$ | Nukleation $n \times 10^{-3}$ | $b \times 10^6$ (sukzessiv) | $b \times 10^6$ (Gruppen) |
|---|---|---|---|
| 0 Sek. | 83 | 2,9 | 3,8 |
| 5 „ | 38 | 2,1 | 4,1 |
| 10 „ | 27 | 3,3 | 5,7 |
| 20 „ | 14 | 4,2 | 13,4 |
| 30 „ | 9 | 3,5 | |
| 60 „ | 5 | 15,0 | |
| 120 „ | 1 | | |

Man könnte nun glauben, daß sich durch die Exhaustion nur ein Teil der vorhandenen Ionen niederschlägt, z. B. der $m^{te}$ Teil. Dann wäre allerdings:

$$-dn/dt = m b n^2,$$

oder der Koeffizient $b$ wäre ver*m*facht. Auf diese Art erklärt sich aber nicht, warum $b$ bedeutend zunimmt, wenn $n$ ab-

nimmt. Die Versuche zeigen ferner, daß $b$ ganz allgemein mit $1/n$ wächst, sei es, daß die geringe Nukleation durch schwaches Strahlfeld (wenige Kerne erzeugt), oder durch geringe Exhaustion (wenige Kerne abgefangen), oder endlich durch Verluste im Laufe der Zeit (es bleiben nur wenige der ursprünglichen Kerne übrig) erhalten wurde.

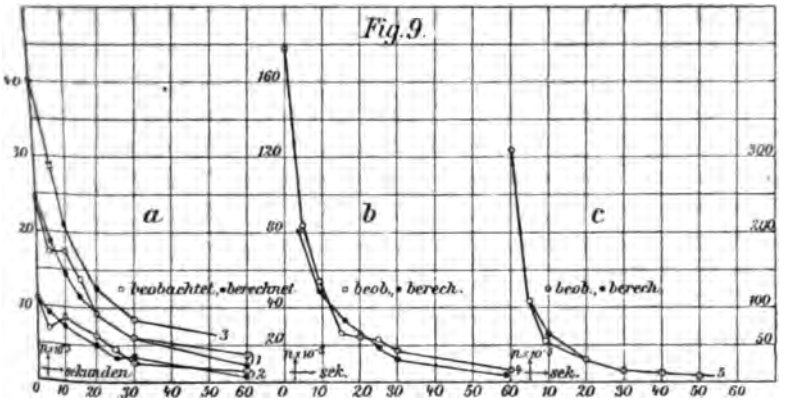
Verfasser hat nun zunächst die Annahme, welche ihm bei seinen Versuchen mit Phosphorkernen im Dampfstrahl gute Dienste leistete, herangezogen. Man mache den Ansatz, daß neben dem Verlust durch gegenseitige Koalescenz $b n^2$ ein Absorptionsverlust $c n$ besteht. Dann gilt also:

$$dn/dt = a - b n^2 - c n,$$

oder integriert für den Fall $a = 0$:

$$1/n = 1/n_0 + (1/n_0 + b/c)(\varepsilon^{c(t-t_0)} - 1).$$

Koronenversuche sind nun zahlenmäßig nicht scharf genug, um zwischen $b$ und $c$ genau zu unterscheiden. Konstantenpaare kompensieren sich. Setzt man aber $b = 10^{-6}$, so wird $c = 0{,}036$. Auf diese Weise sind die fünf Beobachtungsreihen in der Fig. 9, *a*, *b*, *c* dargestellt, wo die Beobachtungsresultate




selbst durch kleine Kreise von den berechneten Werten unterschieden sind. Die Übereinstimmung ist, in Anbetracht der Art der Versuchsbeschränkungen, eine befriedigende.

Man bemerkt, daß der Koeffizient

$$\frac{dn/dt}{n^2} = \frac{c}{n} + b$$

nur bei sehr großen $n$ mit $b$ übereinstimmt; bei kleinen $n$ aber über alle Grenzen wachsen kann. Ist z. B. $n = 10^6$, so ist der Einfluß des $c/n$ kaum merklich; fällt aber die Nukleation auf $n = 10^4$ herab, so muß $c/n$ bereits bedeutend überwiegen, in derselben Art, wie sich der Koeffizient aus den Beobachtungen selbst faktisch entnehmen läßt.

Man könnte daran denken, daß sich bei der Eichung systematische Fehler eingeschlichen haben. Wäre z. B. $n$ die wahre, $N$ die akzeptierte Nukleation, und $N = A + Bn$, wo $A$ und $B$ Konstanten sind, so ergebe sich zwar

$$-dN/dt = b'N + c'N + d' \text{ für } a = 0.$$

Nun verschwinden aber $c'$ und $d'$ wie die erste und zweite Potenz von $A$, während dem $A$ kein Sinn beizulegen ist.

Schließlich wird das Quadrat der Gleichgewichtsnukleation $dn/dt = 0$ bei einem gegebenen Strahlenfeld nicht mehr die Intensität $a$ messen. Es ist nun

$$n = \frac{a}{2b}\left(1 + \sqrt{1 + 4ab/c^2}\right).$$

Wollte man also die Eichung der Nebelkammer dadurch vermitteln, daß man verschiedene Radiumkapseln, deren Strahlfelder einzeln die Nukleationen $n_1$, $n_2$, $n_3$ ... erwecken, so ließe sich das Gesamtfeld $n$ nur dann $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \ldots}$ setzen, wenn $c = 0$ wäre. Versuche dieser Art hat Verfasser auch ausgeführt. Die Interpretation wird aber dadurch erschwert, daß die Nukleation in verschiedenen Teilen der großen Nebelkammer verschieden ist, nämlich von dem Abstand $D$ eines Punktes innerhalb der Kammer und dem in der Radiumkapsel abhängt.

Versuche, die Eichung der Koronen so auszuführen, daß man das Thomsonsche $e$ als Konstante einführt und die Ionisation (Kondensator) bzw. die Nukleation (Koronen) zugleich mißt, sind noch nicht erledigt.

Providence, Rhode Island, U.S.A., Brown University.

(Eingegangen 14. August 1907.)

## 3. *Über chemische Lichtwirkungen. II. Photochemisch sensibilisierte Gasreaktionen und eine Theorie der katalytischen Lichtwirkung; von Fritz Weigert.*

Vor kurzer Zeit war zum erstenmal experimentell festgestellt worden, daß das Gleichgewicht der Phosgenzersetzung und Bildung im Licht sich nicht verändert, daß die Bestrahlung dieselbe Wirkung hat, wie ein zugesetzter Katalysator.[1]) In diesem Sinne beschleunigt die Bestrahlung nicht nur die Vereinigung der beiden Gase Kohlenoxyd und Chlor, sondern wirkt in gleicher Weise auf die Dissoziation des Kohlenoxychlorids. Die bisher angenommenen Erklärungsversuche für die ziemlich allgemeine Beschleunigung von Chlorreaktionen durch Licht basieren fast durchweg auf der Annahme, daß durch die Bestrahlung das Chlor in einen neuen „aktiven", reaktionsfähigeren Zustand übergeht, und daß dadurch die Vereinigung des Halogens mit anderen Stoffen beschleunigt wird. Für eine Beschleunigung der Gegenreaktion, bei welcher das Chlor nicht in Reaktion tritt und verschwindet, sondern entsteht, scheint diese Annahme keine plausible Erklärung zu liefern.

### Anwendung der bisherigen Anschauungen.

Es fragt sich nun, wie die in der vorigen Mitteilung beobachteten Erscheinungen mit den bekannten katalytischen und photochemischen Erscheinungen in Zusammenhang gebracht werden kann. Es ergeben sich dann sofort bedeutende Schwierigkeiten. Wir wollen den beobachteten Fall der umkehrbaren Reaktion

$$CO + Cl_2 \rightleftharpoons COCl_2$$

zunächst im Dunkeln betrachten und die Konzentrationen der einzelnen Komponenten CO, $Cl_2$, $COCl_2$ mit $c_1$, $c_2$, $c_3$ be-

1) F. Weigert, Ann. d. Phys. 24. p. 55. 1907.

zeichnen, dann ist nach dem Massenwirkungsgesetz die Reaktionsgeschwindigkeit

$$\frac{dc}{dt} = k_1 \cdot c_1 c_2 - k_2 \cdot c_3,$$

und beim Gleichgewicht wird sie $= 0$

$$K = \frac{k_1}{k_2} = \frac{c_3}{c_1 c_2}.$$

Wenn wir nun den Einfluß der Bestrahlung auf das System berücksichtigen, so ist derselbe nach den bisherigen Anschauungen ein derartiger, daß in jedem Raumelement die obigen Formeln allerdings unverändert gelten, daß die Geschwindigkeitsfaktoren $k$ aber sich der Bestrahlung entsprechend ändern.[1]) Diese Auffassung führt aber beim Gleichgewicht aus mehreren Gründen zu Widersprüchen mit den im vorhergehenden festgestellten Tatsachen. Wenn wir unendlich dünne Schichten betrachten, so müßte der Fall eintreten, daß für beide Geschwindigkeitsfaktoren $k$ die Beschleunigung bei einer bestimmten Lichtstärke genau die gleiche wäre, denn ihr Quotient $K$, der das Gleichgewicht der Reaktion bedingt, müßte ungeändert bleiben. Da wir aber die Einwirkung des Lichtes in Beziehung zu der optischen Absorption der *verschwindenden* Stoffe bringen müssen, und da beide Komponenten: Phosgen und das Gemisch von Kohlenoxyd und Chlor zwei gänzlich verschiedene Absorptionsspektren haben[2]), so wäre

1) W. Nernst, Theoretische Chemie. V. Aufl. p. 765; vgl. auch R. Luther u. F. Weigert, Zeitschr. f. physik. Chem. 53. p. 396. 1906.

2) Um dies experimentell zu bestätigen, wurde das Absorptionsspektrum des Phosgens photographiert. Mir stand allerdings nur ein Instrument mit Glasoptik zur Verfügung, da aber bei den Versuchen stets nur in Glasgefäßen gearbeitet wurde, so kamen die von Glas absorbierten Strahlen nicht mehr in Betracht. Eine weitere Abgrenzung des wirksamen Strahlengebietes ergab die Tatsache, daß die Reaktion selbst hinter einer Glimmerplatte vom Licht beeinflußt wurde. Es wurden deshalb zum Vergleich in gleichen zugeschmolzenen Glasröhren flüssiges Phosgen und Wasser, welches alle hier interessierenden Strahlen hindurchläßt, untersucht und festgestellt, daß bei Absorption durch Phosgen der ultraviolette Teil des Spektrums eine größere Ausdehnung hatte, als wenn Wasser und eine Glimmerplatte gleichzeitig absorbierten. Die Stärke der photographischen Wirkung war bei Phosgen + Glimmer und Wasser + Glimmer ungefähr die gleiche. Es geht hieraus hervor, daß flüssiges

die gleiche Wirkung vielleicht zufällig bei einem bestimmten Konzentrationsverhältnis möglich; es ist aber nachgewiesen worden, daß das Gleichgewicht bei drei verschiedenen Temperaturen und somit bei drei verschiedenen Konzentrationsverhältnissen nicht verschoben wird.

Nun haben wir aber endliche Schichtdicken und endliche Konzentrationen in unseren Bestrahlungsgefäßen. Die Lichtintensität ändert sich also durch die Absorption von Schicht zu Schicht. Die rechnerische Behandlung dieser Verhältnisse unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Diffusion und Konvektion hat nun ergeben, daß die Ordnung der photochemischen Reaktion scheinbar kleiner wird, als die nach den stöchiometrischen Beziehungen erwartete, und für *vollständige* Absorption um eins fällt. Wie bei der Untersuchung der umkehrbaren photochemischen Reaktion

$$\text{Anthracen} \underset{\text{Dunkel}}{\overset{\text{Licht}}{\rightleftharpoons}} \text{Dianthracen}$$

festgestellt wurde, kommt diese scheinbare Änderung der „Ordnung" der Reaktion auch beim Gleichgewicht zum Ausdruck.[1])

Es würde auch bei dieser Betrachtung die Möglichkeit bestehen, daß bei ganz bestimmten Verhältnissen der Quotient der Geschwindigkeitskonstanten im Licht gleich der Dunkelgleichgewichtskonstante $K$ ist. Da aber bei *unvollständiger* Absorption die scheinbare Ordnung der Reaktion einen variablen Wert hat und da schon eine Änderung der Schichtdicke denselben verändert, so ergibt sich das natürlich unmögliche Resultat, daß es bei Bestrahlung durch einfache Veränderung der Schichtdicke möglich ist, das Gleichgewicht zu verschieben. Wenn man die Bildung von Zwischenkörpern zur Erklärung des charakteristischen Verlaufs photochemischer Reaktionen

---

und um so mehr gasförmiges Phosgen die Strahlen, welche in den Ofen durch die Glimmerplatte hindurchgelassen werden, und welche nachgewiesenermaßen seine Dissoziation beschleunigen, *nicht* oder *nur in sehr geringem Maße* absorbiert. Analog durchgeführte Versuche mit gasförmigem Chlor ergaben, daß das Licht schon bei längeren Wellen abgeschnitten wurde, als durch eine Glimmerplatte. Von Glimmer durchgelassene Strahlen werden also vom Chlor noch absorbiert.

1) R. Luther u. F. Weigert, l. c. p. 421.

heranzieht, so würden trotzdem die zuletzt gemachten Einwände bestehen bleiben.

### Eine Theorie der katalytischen Lichtwirkung.

Die Schwierigkeiten werden sofort gehoben, wenn man die Gegenwart eines *heterogenen* Katalysators in dem Gasgemisch annimmt, und es soll im folgenden versucht werden, auf Grund einer solchen Annahme eine Theorie der katalytischen Lichtreaktionen aufzustellen, welche mit dem bisher bekannten Beobachtungsmaterial nicht im Widerspruch zu stehen scheint.

Wenn man annimmt, daß in dem bestrahlten Chlor irgendwelche neue isolierte Molekülkomplexe entstehen, ähnlich den Nebelkernen in Gasen, die mit äußerst kurzwelligem Licht bestrahlt werden, und wenn man weiter annimmt, daß an der Oberfläche dieser Teilchen die Reaktion mit sehr großer Geschwindigkeit stattfindet, so wirken diese „*Reaktionskerne*", wie sie im folgenden genannt werden sollen, analog wie die einzelnen Platinteilchen in einer kolloidalen Platinlösung bei Gegenwart von Wasserstoffsuperoxyd als mikroheterogene Katalysatoren.[1])

Wenn wir die Reaktion zwischen Kohlenoxyd und Chlor bei gewöhnlicher Temperatur betrachten, bei der das Gleichgewicht fast völlig auf der Phosgenseite liegt, so verarmt das Gas an der Oberfläche der Reaktionskerne vollständig an Chlor und Kohlenoxyd, und nach der Nernstschen Theorie der heterogenen Reaktionen[2]) wird der Fortgang der Reaktion dann nur durch den langsam verlaufenden Vorgang der Diffusion der Reaktionsteilnehmer zum Katalysator hin geregelt. Es bildet sich um den Reaktionskern eine Hülle aus, in welcher die Gaszusammensetzung nach dem Zentrum hin kontinuierlich variiert, und welche bei ihrer Kleinheit im stationären Zustand konstante Dicke hat. Durch diese diffundieren die Gase proportional ihrem Diffusionskoeffizienten und proportional ihrer Konzentration hindurch.

Es ist bei diesen Überlegungen nicht nötig, das bestrahlte System im Sinne der Phasenregel, welche ja nur für wahre

1) G. Bredig u. Müller von Berneck, Zeitschr. f. physik. Chem. 31. p. 324. 1899; G. Bredig, Zeitschr. f. Elektrochemie 12. p. 482. 1906.

2) W. Nernst, Lehrbuch der theoretischen Chemie. V. Aufl. p. 577.

Gleichgewichtszustände gilt, als heterogen anzunehmen, vielmehr sind die Reaktionskerne wahrscheinlich als größere gasförmige Molekelkomplexe zu betrachten, welche in mehr oder weniger dichter Verteilung durch die bestrahlte Gasmasse diese inhomogen machen. Die Wirkungsweise einer solchen ausgezeichneten Stelle in einem System von demselben Aggregatzustand als heterogener Katalysator sei an einem Beispiel in einer Lösung kurz erläutert. In einem Reagenzglas sei eine wässerige Lösung von Jod und Stärke enthalten. Die blaue Jodstärke bildet sich in diesem Falle nicht, da die Reaktion nur bei Gegenwart des Trijodions eintritt. Wenn man nun auf den Boden des Glases einen Krystall Jodkalium bringt, so löst sich derselbe und es bildet sich eine schwere, unten verbleibende Salzlösung, in deren Übergangsgebiet zu der Jod-Stärkelösung die blaue Jodstärke entsteht, während an diesen Stellen die Flüssigkeit an freiem Jod und Stärke verarmt. Die Geschwindigkeit dieser Reaktion wird dann lediglich durch die Diffusionsgeschwindigkeit der beteiligten Stoffe geregelt. In diesem Beispiel ist die Substanz des heterogenen Gebietes, nämlich das Jodion, selbst an der Reaktion beteiligt. Dasselbe findet zweifellos bei den meisten photochemischen Reaktionen gleichfalls statt. Es ist jedoch durchaus denkbar, daß eine Katalyse an irgend einer Stelle, die von anderer Zusammensetzung, aber von gleichem Aggregatzustand wie das Gesamtsystem ist, auch ohne Bildung von Zwischenkörpern wirksam sein kann. Es wäre dies rein physikalisch durch eine Veränderung der Konzentrationen und Drucke in den Trennungsschichten zu verstehen.

Die beobachteten *Reaktionsgeschwindigkeiten* sind also *Diffusionsgeschwindigkeiten.* Eine gute Stütze für diese Annahme glaube ich in zwei Analogien zwischen Diffusions- und photochemischen Vorgängen zu sehen, welche allerdings, was die letzteren Erscheinungen betrifft, vorläufig meistens in gelösten Systemen geprüft wurden. Es sind dies die Temperaturkoeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit und die „Ordnung" der Reaktion.[1])

---

1) R. Luther u. F. Weigert, l. c. p. 403; R. Luther u. E. Goldberg, Zeitschr. f. physik. Chem. 56. p. 43. 1906.

Die Geschwindigkeit der photochemischen Chlorknallgasvereinigung wurde von Bunsen und Roscoe untersucht und nahezu unabhängig von der Temperatur gefunden. Ganz analog ist der Temperaturkoeffizient der Diffusion der Gase nur ein sehr kleiner. Die Reaktionsordnung der Phosgenbildung nach Wildermann, der photochemischen Jodwasserstoffzersetzung nach Bodenstein und der Ozonzersetzung im ultravioletten Licht nach Regener ist in jedem Fall die einer monomolekularen Reaktion. Die Diffusionsgeschwindigkeit ist proportional dem Konzentrationsgefälle und verläuft nach den obigen beim Phosgen für niedrige Temperaturen gemachten Annahmen ebenfalls proportional der ersten Potenz der Konzentration.

Für gelöste Systeme stimmt der stets beobachtete Temperaturkoeffizient photochemischer Reaktionen: 10—40 Proz. für eine Temperaturerhöhung von $10^0$, der viel kleiner ist als derjenige für gewöhnliche chemische Reaktionen[1]), in der Größenordnung mit dem Temperaturkoeffizient der Diffusion gelöster Stoffe überein. Der Verlauf dieser Reaktionen ist stets monomolekular. Die vorstehenden Betrachtungen behalten natürlich nur unter der zu Anfang aufgestellten Bedingung ihre Gültigkeit, daß die Reaktionsgeschwindigkeit an den Reaktionskernen sehr groß im Vergleich zu der Geschwindigkeit der Diffusion ist. Trifft dies nicht zu, so bestimmen nicht mehr die Diffusionserscheinungen allein den Verlauf der photochemischen Reaktion. Als einziges Beispiel hierfür ist mir jedoch nur der abnorm hohe Temperaturkoeffizient rotempfindlicher Reaktionen, den Trautz[2]) beobachtete, bekannt.

Auf den Fall des Phosgen*gleichgewichtes* bei höheren Temperaturen angewendet, würde die eingeführte Annahme besagen, daß bei Gegenwart von bestrahltem Chlor an den Reaktionskernen sich das der Temperatur entsprechende Gleichgewicht einstellt, und daß die reagierenden Gase proportional der Differenz ihres jeweiligen Partialdruckes $p$ und des Gleichgewichtsdruckes $\pi$ dorthin diffundieren. Es werden demnach

1) E. Goldberg, Zeitschr. f. physik. Chem. 41. p. 1. 1902.

2) M. Trautz, Zeitschr. f. wiss. Phot. 4. p. 358. 1906.

*beide Reaktionen* proportional der Anzahl $n$ der vorhandenen Reaktionskerne durch das Licht beschleunigt, bis in der ganzen Gasmasse die Gleichgewichtskonzentration herrscht. Die Reaktionsgeschwindigkeit $v$ läßt sich also durch eine Formel ausdrücken, deren einfachste Gestalt

$$v = \frac{k \cdot D \cdot n}{\delta}(p - \pi)$$

sein würde. $k$ bedeutet eine Konstante, in welcher das Volumen der Gasmasse, die Größe und andere Eigenschaften der Reaktionskerne enthalten ist, $\delta$ die Dicke der idealen Gashülle, durch welche die Gase diffundieren, und $D$ den mittleren[1]) Diffusionskoeffizienten der diffundierenden Gase. Die quantitative Prüfung dieser Beziehung wurde noch nicht in Angriff genommen. Sie wird in ihrer Gestalt wahrscheinlich noch zu modifizieren sein, da die Zahl $n$ der einzelnen Teilchen von der Konzentration des Chlors und der damit in direktem Zusammenhang stehenden Menge des absorbierten Lichtes abhängt. Die ideale Diffusionsschicht $\delta$ wird sich mit der Bewegung der Teilchen ändern, ähnlich wie dies Bredig für kolloidale Platinlösungen ermittelt hat. Hierüber können erst spätere Versuche entscheiden.

Nach der im vorstehenden ausgesprochenen und begründeten Annahme ist bei der durch das Licht beschleunigten Phosgen- und Salzsäurebildung aus den Komponenten nicht die Reaktion selbst lichtempfindlich, sondern nur das selektiv absorbierende Chlor. Die Reaktion selbst ist als nichts anderes anzusehen, als ein Indikator auf die Anwesenheit von Reaktionskernen. Es soll an dieser Stelle ausdrücklich betont werden, daß ich vorläufig noch keine Annahme über die Natur dieser Reaktionskerne, ob sie elektrisch neutral oder geladen sind, über die Art, wie die chemische Reaktion an ihnen statt findet, über die Rolle, die vielleicht das Wasser dabei spielt, ihre Eigenbewegung und andere Fragen machen will. Ihre Eigenschaften sind wahrscheinlich ähnliche wie die der Gasionen, auf welche, da ihre Anzahl im Vergleich zu der Ge-

1) Das Medium, durch welches die Gase hindurchdiffundieren, ist nicht homogen.

samtgasmenge eine äußerst geringe ist, die Betrachtungen für isolierte Massenteilchen anwendbar sind.

Es soll hier auf eine Beziehung zwischen den im vorliegenden betrachteten rein katalytischen Lichtreaktionen und den in der ersten Mitteilung erwähnten umkehrbaren photochemischen Reaktionen hingewiesen werden. Das Chlor steht mit der Substanz der Reaktionskerne sicher in einem wahren photochemischen Gleichgewicht, welches bei der Bestrahlung sich einstellt und nur unter steter Vernutzung von strahlender Energie aufrecht erhalten werden kann. Das Gleichgewicht liegt jedoch wahrscheinlich fast vollständig auf der Seite des unveränderten Chlors. Das Potential der gemessenen sogenannten lichtempfindlichen Reaktion wird aber durch die Gegenwart der durch die Bestrahlung erzeugten Katalysatoren nicht geändert. Es steht hiermit in Einklang, daß Burgess und Chapman bei Nachprüfung der von Bunsen und Roscoe entdeckten Erscheinung der photochemischen Extinktion diese Erscheinung, durch welche eine chemische Vernutzung von Lichtenergie erklärt wurde, nicht wieder auffinden konnten.

### Nebelbildung in bestrahltem Chlor.

Es kam nun darauf an, die Existenz der Reaktions- oder Nebelkerne in bestrahltem Chlor noch auf andere Weise zu erweisen. Zu dem Zwecke wurde in der von Lenard angegebenen Anordnung das Dampfstrahlphänomen untersucht.[1]) Chlor wurde aus einer Bombe in der schon von Lenard benutzten Anordnung in einen überhitzten Dampfstrahl geleitet und konnte auf dem Wege dorthin durch eine Quarzplatte hindurch mit einer großen Quarz-Hochspannungs-Quecksilberdampflampe von Heraeus bestrahlt werden. Dabei zeigte sich, daß die Dampfkondensation sehr viel deutlicher war, wenn das Chlor bestrahlt wurde. Die Erscheinung blieb auch bestehen, wenn zwischen die Lampe und die Quarzplatte eine Glimmerplatte oder ein blaues und violettes Glas eingeschaltet wurde. Die Dampfkondensation fand viel seltener statt, wenn das Licht gelbe, grüne, rote Gläser passierte, oder wenn es vollständig abgeblendet wurde. Mit bestrahlter Luft wurde

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 1. p. 491. 1900.

in der hier benutzten Versuchsanordnung keine Wirkung bemerkt. Nach Beendigung dieser Versuche fand ich, daß drei englische Chemiker: Bevan[1]) und Burgess und Chapman[2]) dieselbe Erscheinung beobachtet hatten, als sie feuchtes Chlor und Chlorknallgas schnell ausdehnten. Sie fanden, daß eine geringere Ausdehnung der *bestrahlten* Gase nötig war, um Tropfen- und Wolkenbildung zu beobachten, als wenn die Versuche im Dunkeln oder bei gelbem Licht angestellt wurden. Wenn Chlor entweder mit starkem weißen Licht bestrahlt wurde, oder durch ein $K_2Cr_2O_7$-Filter hindurch, fanden Burgess und Chapman das in der Tabelle angegebene Verhältnis der Drucke $p_1/p_2$, welches die notwendige plötzliche Ausdehnung der Gase angibt, um die am Anfang der Zeilen stehenden Kondensationserscheinungen hervorzurufen.

| Kondensations-erscheinung | $p_1/p_2$ weißes Licht | $p_1/p_2$ gelbes Licht |
|---|---|---|
| Feiner Regen . . . . . | 1,3 —1,33 | 1,42—1,44 |
| Regen . . . . . | 1,33—1,38 | 1,44—1,46 |
| Regenwolke . . . . . | 1,38—1,42 | 1,46—1,48 |
| Dicke Regenwolke . . . | 1,42—1,45 | 1,48—1,50 |
| Nebel . . . . . | 1,46 | 1,51 |

Bevan erklärt die Erscheinung so, daß durch die Bestrahlung in dem Gase Molekülkomplexe von Wasser, Chlor und Wasserstoff entstehen, welche die Eigenschaft haben, übersättigten Wasserdampf zu kondensieren. Diese können in Salzsäure und Wasser zerfallen. Die Kondensationseigenschaften werden aber als etwas völlig Sekundäres und Nebensächliches betrachtet. Burgess und Chapman glauben Beweise zu sehen, daß die von Bevan angenommenen Zwischenkörper nicht entstehen, daß die in diesem Fall entstehende Nebelbildung durch die gleichzeitige Anwesenheit von Salzsäure und Wasserdampf bedingt ist, und die Nebelkerne nicht andersartig sind, als die unter gewöhnlichen Bedingungen im Gase vorhandenen. Eine sehr gute Bestätigung der neuen Annahme ergibt sich jedoch aus einem Versuche Bevans: Wenn in einem Chlorknallgas-Aktinometer die Salzsäurebildung

1) E. J. Bevan, Phil. Trans. A. 202. p. 71. 1904.
2) Burgess u. Chapman, Trans. Chem. Soc. 89. p. 1423. 1906.

bei der Bestrahlung begonnen hatte, so hörte die Reakti dann sofort auf, wenn bei plötzlicher Ausdehnung des Ga in dem Reaktionsgefäß eine Wolke entstand. Im Sinne d Annahme würde dies bedeuten, daß die Reaktionskerne dem Augenblick, wo sie mit einer flüssigen Wasserschi bedeckt wurden, ihre katalytischen Eigenschaften einbüß Die Bildung von Kondensationskernen in Chlor, welches m solchem Licht bestrahlt wird, das von dem Gase absorbi wird, erscheint demnach sehr wahrscheinlich. Gegen d Existenz der Kerne spricht die Beobachtung, daß häu Dampfkondensationen eintreten, wenn gleichzeitig chemisc Reaktionen, z. B. Zerfall des Ozons etc. stattfinden[1]), und t sächlich findet ja eine Einwirkung von bestrahltem Chlor a Wasser[2]) und Wasserdampf statt; aber gerade durch den zule erwähnten Versuch von Bevan wird dieser Einwand hinfäll

**Sensibilisierung von Gasreaktionen.**

Von der Überlegung ausgehend, daß die Phosgen- u Salzsäurebildung lediglich einen Indikator auf die Anwesenh von Reaktionskernen darstellt, versuchte ich, ob es nic möglich wäre, irgend eine andere Reaktion durch die Reaktio kerne zu katalysieren. Eine solche durch bestrahltes Chl katalysierte lichtunempfindliche Reaktion ist z. B. die in d ersten Mitteilung nachgewiesene *Dissoziation* des Phosgens, ja festgestellt wurde, daß diese Substanz diejenigen Strahl welche seinen Zerfall beschleunigen, kaum absorbiert. M kann in diesem Fall von einer Gasreaktion sprechen, welc durch gleichzeitige Anwesenheit des Chlors, dessen Absorptio gebiet im sichtbaren Teil des Spektrums liegt, für die Strahlenarten sensibilisiert wird. Es lag nahe anzunehm daß durch einfaches Beimischen selektiv absorbierender Stof als welche bis jetzt nur die Halogene in Anwendung kam eine Sensibilisierung der verschiedensten Gasreaktionen mögli war, deren Verlauf ohne dieses Hilfsmittel durch *sichtba* Licht nicht oder nur in äußerst geringen Massen beschleuni wurde. Und es gelang in der Tat, eine Reihe solch Reaktionen aufzufinden.

1) A. Uhrig, Dissert. Marburg 1903; vgl. dort auch die Literat
2) Wittwer, Pogg. Ann. **94**. p. 598. 1855.

*Vereinigung von Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser.* Wie Baker[1]) feststellte, ist diese Reaktion etwas lichtempfindlich. Er beobachtete, daß feuchtes Knallgas sich bei monatelangem Stehen in der Sonne in geringem Maße zu Wasser vereinigt. Über eine Vereinigung im äußersten ultravioletten Licht fand ich keine sicheren Angaben, obgleich dieselbe wahrscheinlich ist. Ich versuchte nun die Reaktion durch Beimengen von Chlor zu sensibilisieren und verfuhr auf folgende Weise. Elektrolytisch erzeugtes Knallgas wurde mit $P_2O_5$ scharf getrocknet und demselben elektrolytisches Chlor, welches durch Wasser zunächst von mitgerissener Salzsäure, durch konzentrierte Schwefelsäure und entwässertes Kupfersulfat von Wasser befreit war, zugemischt. Die Gase wurden gemeinsam durch ein weites Rohr aus farblosem Glase, welches von einem Wasserkühler umgeben war, geleitet und analysiert. Da hier und in den folgenden Fällen stets der aufzufindende Stoff in Gegenwart einer Anzahl anderer überschüssiger Gase vorhanden war, war ein qualitativer Nachweis nicht ausreichend, es mußte vielmehr stets eine quantitative Bestimmung eines Teiles der aus dem Bestrahlungsgefäß austretenden Gase ausgeführt werden. Bei der Analyse von Wasser, Chlor und Salzsäure nebeneinander erhielt ich brauchbare Resultate, wenn ich die aus dem Rohr austretenden Gase zunächst durch ein kleines Absorptionsgefäß mit Wasser leitete, welches durch einen Schliff mit einem U-Rohr verbunden war, das mit entwässertem Kupfersulfat gefüllt war. Beide Absorptionsgefäße wurden vorher zusammen gewogen. Nach dem Versuch wurde bis zum Verschwinden der Chlorreaktion trockene Luft durch dieselben gesaugt, wieder gewogen und durch Titration die Menge der gebildeten Salzsäure bestimmt. Die Differenz derselben von der Gesamtgewichtszunahme wurde als Wasser in Rechnung gesetzt. Wenn das Rohr mit einer Quecksilberbogenlampe (160 Volt, 3 Amp.) bestrahlt wurde, wurden in einem Gasgemisch, welches ca. 24 Proz. Chlor enthielt, das fast vollständig in Chlorwasserstoff überging, der noch zur Wasserbildung zur Verfügung stehende Wasserstoff zu 44 Proz. zu Wasser oxydiert, welches sich in Tropfen an den Rohrwänden

1) H. B. **Baker**, Proc. Chem. Soc. 18. p. 40. 1902.

verdichtete. In anderen Versuchen wurden Ausbeuten von 37 und 38 Proz. erhalten. Die Ausbeute verringerte sich, wenn man das Gasgemisch in schnellerem Strome durch das Bestrahlungsgefäß streichen ließ. Ohne Chlor fand unter sonst gleichen Bedingungen keine merkliche Wasserbildung statt. Die Möglichkeit, daß das Wasser sich nicht direkt aus den Elementen, sondern nach den Reaktionsschema des Deakonschen Chlorprozesses

$$O_2 + 4HCl = 2H_2O + 2Cl_2$$

gebildet hat, wurde durch den Versuch widerlegt. Von Richardson[1]) war allerdings festgestellt worden, daß bei längerer Sonnenbestrahlung diese Reaktion beschleunigt wird. Unter den hier vorhandenen Bedingungen findet sie jedoch nicht oder in kaum merkbarer Weise statt. Vorher beigemengtes Chlor veranlaßt bei der Bestrahlung eine geringe Beschleunigung der Reaktion, welche jedoch weit hinter der bei der ersten Anordnung beobachteten zurückbleibt. Es ist dies gut im Sinne der oben ausgesprochenen Annahme zu deuten, daß bestrahltes Chlor einen Katalysator für den Deakonprozeß darstellt. Es soll hier auf eine interessante Analogie hingewiesen werden, welche bestrahltes Chlor zeigt, wenn es als „Reaktionskern" oder als „Nebelkern" wirkt. In letzterem Fall ist die kondensierende Wirkung nach Burgess und Chapman und Bevan bedeutend stärker, wenn Chlorknallgas, als wenn reines Chlor bestrahlt wird. Im ersteren Fall ist die Wasserbildung ungleich stärker, wenn das Chlor unter Salzsäurebildung verschwindet, als wenn es nicht selbst in Reaktion tritt, wie dies beim Deakonprozeß der Fall ist. Im Sinne der „Kern"-Hypothese ist dies vielleicht so zu deuten, daß in den Fällen, wo die Kernsubstanz selbst sich an der Reaktion beteiligt, wie dies bei den meisten photochemischen Chlorreaktionen sicher der Fall ist, die Katalysatoren durch das Licht stets frisch nachgeliefert werden müssen und daß sie dann eine größere Wirksamkeit haben.

Interessant ist es, daß es durch das Licht möglich ist, eine Wasserbildung aus den Elementen bei gewöhnlicher Temperatur im freien Gasraum zu bewirken. Nach der hier

1) Richardson, Journ. Chem. Soc. 51. p. 801. 1887.

aufgestellten Hypothese ist dies jedoch nur scheinbar, da die photochemische Knallgasvereinigung in derselben Weise als eine heterogene Reaktion zu betrachten ist, wie die Wasserbildung an Platinschwarz und anderen katalysierenden Oberflächen.

*Vereinigung von schwefliger Säure und Sauerstoff zu Schwefeltrioxyd.* Daß diese Vereinigung durch ultraviolettes Licht beschleunigt wird, welches nicht von Uviolglas, dagegen von Quarz durchgelassen wird, wurde kürzlich von Coehn[1]) nachgewiesen. Es gelang diese Reaktion durch beigemischtes überschüssiges Chlor für *sichtbares Licht* zu sensibilisieren. Es wurde, wie beim vorigen Fall, nach der Durchströmungsmethode gearbeitet. Die Analyse wurde so ausgeführt, daß das ganze aus dem Bestrahlungsgefäß austretende Gasgemenge, welches $SO_2$, $Cl_2$, $SO_2Cl_2$, $SO_3$ und überschüssigen Sauerstoff enthielt, durch ein Absorptionsgefäß mit Wasser geleitet wurde. In diesem wurde der Gesamtsäuretiter und der Chloriontiter bestimmt, welche, im Falle, daß keine direkte $SO_3$-Bildung stattgefunden hat, äquivalent sein mußten. Die zu viel gefundene Schwefelsäuremenge gab ein Maß für die im Licht stattgefundene Oxydation der $SO_2$ zu $SO_3$. Die Ausbeute konnte bis jetzt bis auf 30 Proz. gesteigert werden.

In gewissem Sinne interessant ist es, daß es auch gelingt, auf die beschriebene Weise Stickstoff und Wasserstoff bei Gegenwart von Chlor durch die Bestrahlung zu Ammoniak zu vereinigen. Die Ausbeuten sind allerdings sehr gering. Ammoniak konnte jedoch unter Einhaltung der nötigen Vorsichtsmaßregeln (Vermeidung aller Kautschukverbindungen etc.) stets sicher an Salzsäure gebunden nachgewiesen werden.

*Ozonzersetzung.* Eine weitere Gasreaktion, die durch bestrahltes Chlor sensibilisiert wird, ist der Zerfall des Ozons.[2]) Es ist bekannt, daß dieses Gas, welches unter starker Abnahme der freien Energie in Sauerstoff übergeht, durch Erhitzung und durch ultraviolette Strahlen schnell zersetzt wird (Regener).[3])

---

1) A. Coehn, Zeitschr. f. Elektrochemie **13.** p. 545. 1907.

2) Die Anregung zu diesen Versuchen verdanke ich Hrn. Geheimrat Prof. Dr. Warburg.

3) E. Regener, Ann. d. Phys. **20.** p. 1033. 1906.

Ich leitete ozonisierten Sauerstoff, der in einer Entladungsröhre dargestellt wurde, in das stets benutzte gekühlte Bestrahlungsgefäß ein. Aus diesem trat das Gas, dem trockenes Chlor beigemischt werden konnte, durch ein Absorptionsgefäß, welches mit einer Jodkaliumlösung und einer bekannten Menge titrierter Salzsäure gefüllt war. Da Ozon durch Jodkali unter Entstehung von Hydroxylionen zersetzt wird, während gleichzeitig vorhandenes Halogen den Säuretiter unverändert läßt, ist es möglich, Chlor neben Ozon zu bestimmen.

$$O_3 + 2\bar{J} + H_2O = J_2 + 2\bar{O}H + O_2.$$

Diese Bestimmungsmethode ist, wie Ladenburg[1]) nachwies, nicht quantitativ, sie genügt jedoch zu der vorläufig mehr qualitativen Prüfung der untersuchten Verhältnisse. Sehr charakteristisch für Ozon sind die bei der Absorption in Jodkalilösungen stets sofort auftretenden weißen Nebel von $J_2O_5$, durch welche schon äußerst geringe Mengen angezeigt werden. Die durch Eis gekühlte Ozonröhre wurde durch einen Induktor, dessen Sekundärspannung möglichst auf 8000 Volt konstant gehalten wurde, betrieben. Es gelang jedoch nicht, den Ozongehalt des Sauerstoffs nur annähernd konstant zu halten, so daß es nicht sicher ist, ob nicht durch die Bestrahlung des ozonisierten Sauerstoffs allein eine geringe Zersetzung des Ozonmoleküls eintritt. Wenn jedoch die Bestrahlung bei Gegenwart von Chlor vorgenommen wurde, so war die Zersetzung quantitativ, was sowohl durch die Analyse als auch durch die völlige Abwesenheit der $J_2O_5$-Nebel nachgewiesen wurde. Die Wirkung der Quecksilberlampe bei Gegenwart von Chlor, welche auch durch eine dicke Glimmerplatte nicht beeinträchtigt wurde, ist jedenfalls von einer ganz anderen Größenordnung als die nicht sicher nachgewiesene Zersetzung ohne den Zusatz des Sensibilisators. Die Zahlen der folgenden Tabelle zeigen den Ozongehalt des aus dem Bestrahlungsgefäß austretenden Sauerstoffs in Prozenten unter den angegebenen Bedingungen an:

---

1) A. Ladenburg, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. **34.** p. 631, 1184. 1901; **36.** p. 115. 1903.

| | |
|---|---|
| Ozon (dunkel) . . . . . | 6,1; 1,8; 4,2; 3,4 Proz. |
| „ (bestrahlt) . . . . . | 4,0; 8,35; 3,45 Proz. |
| „ + Chlor (dunkel) . . . . . | 8,2; 10; 1,6 Proz. |
| „ + „ (bestrahlt) . . . . . | 0,0; 0,0; Proz. |
| „ + „ ( „ Glimmer) . | 0,0 Proz. |

Es scheint diese Reaktion, welche durch ihre äußerst große Empfindlichkeit ausgezeichnet ist, besonders geeignet zu sein, die Eigenschaften der Reaktionskerne quantitativ zu untersuchen.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß es wohl stets möglich sein wird, bei den beschriebenen Gasreaktionen formell irgend einen leicht zerfallenden Zwischenkörper anzunehmen, der die Katalyse erklären könnte. Derselbe müßte nach den bis jetzt gebräuchlichen Anschauungen stets das Halogen enthalten, da ja die Reaktionen durch Strahlenarten beschleunigt werden, welche von diesem absorbiert werden. Besonders bei den Reaktionen, bei denen eine Oxydation stattfindet, Wasser, $SO_3$-Bildung, ist die Annahme eines Sauerstoffüberträgers nicht von der Hand zu weisen. Derselbe wäre dann vielleicht irgend eine Chlorsauerstoffverbindung.

Größere Schwierigkeiten bereitet das Einführen eines Zwischenkörpers bei den anderen durch bestrahltes Chlor katalysierten Gasreaktionen. Dem Wasser wird in solchen Fällen oft eine starke beschleunigende Wirkung zugeschrieben. Gegen die allgemeine Einführung des Wassers als intermediärer Reaktionsteilnehmer bei photochemischen Reaktionen spricht jedoch die Erfahrung, daß von Dyson und Harden[1]) die Phosgenbildung im Licht auch bei völlig trockenen Gasen beobachtet wurde. Man könnte in diesem Fall und bei den anderen lichtempfindlichen und sensibilisierten Gasreaktionen, welche keine Oxydationen sind, und bei denen die Halogene beteiligt sind, an eine intermediäre Additionsverbindung, welche sich in verschiedenem Sinne bildet und zersetzt, zur Erklärung der Lichtkatalyse denken.

Gegen die Annahme von hypothetischen Zwischenkörpern bei katalytischen Lichtreaktionen spricht jedoch die Tatsache,

1) G. Dyson u. A. Harden, Trans. Chem. Soc. London 83. p. 201. 1902.

daß es noch niemals, auch bei der bis jetzt am eingehendsten untersuchten photochemischen Salzsäurebildung gelungen ist, einen solchen Zwischenkörper wirklich chemisch nachzuweisen, so daß man hypothetische Substanzen zu Hilfe nehmen muß, und außerdem die Beobachtung, daß zu einer einigermaßen beträchtlichen Sensibilisierung lichtunempfindlicher Gasreaktionen stets ein ziemlich großer Halogenzusatz erforderlich ist. Hierdurch unterscheiden sich diese Wirkungen z. B. von der reaktionsbeschleunigenden Eigenschaft geringer Spuren Feuchtigkeit. Deshalb erscheint es mir wahrscheinlich, daß bei der Beschleunigung chemischer Gasreaktionen durch Licht keine Zwischenkörper beteiligt sind, sondern daß die katalytische Wirkung der durch das Licht erzeugten Substanzen physikalischer Natur ist. (Ihr Verschwinden durch eine chemische Reaktion mit einem gleichzeitig vorhandenen Gase, wie bei der Salzsäure- und Wasserbildung ist dabei natürlich nicht ausgeschlossen.)

Nun ist man geneigt, gerade bei den bis jetzt bekannten Erscheinungen der heterogenen Katalyse (Platin etc.) den Mechanismus der Beschleunigung rein physikalisch zu erklären. Die Annahme der Reaktionskerne, welche als heterogene Katalysatoren wirken, paßt sich demnach den beobachteten Erscheinungen gut an. Wenngleich ihre Existenz noch nicht einwandfrei bewiesen werden konnte, so hat trotzdem nach dem Vorhergehenden ihre Einführung in die Betrachtung als eine brauchbare Arbeitshypothese eine gewisse Berechtigung.

Um noch einmal die in den letzten Abschnitten mitgeteilten experimentellen Ergebnisse zusammenzufassen, so ist es gelungen, qualitativ nachzuweisen, daß folgende Gasreaktionen bei Gegenwart von Halogen durch *sichtbares* Licht in erheblichem Maße beschleunigt werden:

1. Die Dissoziation des Kohlenoxychlorids (Phosgen).
2. Die Oxydation des Wasserstoffs.
3. Die Oxydation des Schwefeldioxyds.
4. Die Ozonzersetzung.

Außerdem in geringerem Maße, aber deutlich nachweisbar:

5. Die Oxydation der Salzsäure (Deakonprozeß).
6. Die Ammoniakbildung.

Die Untersuchung der Kohlensäurebildung und anderer Reaktionen ist in Angriff genommen. Die quantitative Behandlung dieses Gebietes vom physikalisch-chemischen Standpunkt soll den Inhalt künftiger Untersuchungen bilden. Es ist wahrscheinlich, daß in diesen Sensibilisierungen nicht lichtempfindlicher Reaktionen die Erklärung für die bekannten Erscheinungen der photochemischen Induktion liegt, welche nach Burgess und Chapman nur bei nicht völlig reinem Chlorknallgas zu beobachten ist. Die hemmende Wirkung des Sauerstoffs[1]) hat wahrscheinlich ihren Grund in der primären Bildung von Oxyden (Wasser bei der Salzsäurebildung, Kohlensäure bei der Phosgendarstellung) an den Reaktionskernen, deren Wirkung auf die eigentliche Reaktion dadurch vorübergehend abgeschwächt wird.

**Übertragung der Hypothese auf nicht-gasförmige Systeme.**

Wenn wir die vielseitige Analogie der photochemischen Erscheinungen in gasförmigen und flüssigen Systemen betrachten, und wenn wir sie in der oben beschriebenen Weise mit den Diffusionsvorgängen vergleichen, so werden wir dazu geführt, auch in flüssigen Systemen die Entstehung isolierter Molekülkomplexe durch die Bestrahlung anzunehmen, welche als Reaktionskerne wirken können. Über die Natur dieser Teilchen, welchen man vielleicht die Eigenschaften eines durch die Bestrahlung erzeugten Kolloids, eines *Lichtfermentes*[2]) beilegen könnte, ist vorläufig noch nichts auszusagen. Eine Reihe von Erfahrungstatsachen spricht jedoch für ihre Existenz.

Wie von Draper zuerst beobachtet wurde, behält das bestrahlte Chlor die Fähigkeit, sich mit Wasserstoff zu vereinigen, auch nach dem Verlassen des belichteten Teiles des Apparates noch einige Zeit lang. Diese Eigenschaft wurde von verschiedenen späteren Beobachtern näher untersucht. Nach

1) R. Luther u. E. Goldberg, l. c.

2) Die kürzlich von G. Dreyer und O. Hanssen (Compt. rend. **145**. p. 234. 1907) mitgeteilte Beobachtung, daß durch ultraviolette Bestrahlung und durch Radiumstrahlen Eiweißstoffe aus ihren kolloidalen Lösungen gefällt werden können, spricht in gewissem Sinne dafür, daß eine Lösung unter dem Einfluß des Lichtes Eigenschaften anzunehmen vermag, welche für Fermentlösungen charakteristisch sind.

meinen Versuchen hatte Chlor, welches aus einem stark bestrahlten Raum in ein völlig verdunkeltes Gefäß mit gewöhnlichem Knallgas trat, allerdings in sehr geringem Maße, die Fähigkeit, sich selbst mit Wasserstoff zu vereinigen und die Vereinigung von Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser zu katalysieren. Dieser Einfluß der Vorbelichtung des Chlors auf seine Eigenschaften wurde besonders von englischen Forschern genau untersucht. Als Maß für die Aktivität wurde die verschiedene Länge der Induktionsperiode bei konstanter Bestrahlung eines bekannten Chlorknallgasgemisches verwendet, wenn demselben das auf verschiedene Weise vorbehandelte Halogen beigemengt wurde. So fand z. B. Mellor, daß die durch Vorbelichtung des Chlors erlangte Aktivität nach einer Exponentialfunktion ziemlich schnell abklingt. Die Versuche wurden so angestellt, daß das belichtete Halogen zunächst im Dunkeln verschiedene Zeiten gelassen wurde, bevor man es in das Aktinometer leitete.[1] Diese Beobachtungen lassen sich in ungezwungener Weise bei Annahme der Existenz von Reaktionskernen mit analogen Eigenschaften wie die Luftionen erklären.

Sowohl Mellor als auch Burgess und Chapman gelang es nun, die durch Vorbelichtung erlangte Aktivität des Chlors und des Broms dadurch auf Wasser oder Salzlösungen zu übertragen, daß sie die Gase durch die Flüssigkeit hindurchströmen ließen. Dieselbe erhielt dadurch die Fähigkeit, in einem Chlorknallgasaktinometer die Induktionsperiode abzukürzen. Wenn die hier beobachtete Wirkung der Aktivität identisch ist mit der von mir angenommenen katalytischen Wirksamkeit der Reaktionskerne, so müssen dieselben auch in der flüssigen Phase existenzfähig sein. Hierfür liegt in Versuchen von Kistiakowsky[2] eine weitere Stütze vor.

Er beobachtete, daß Wasserstoffsuperoxyd, welches nach Bredig und Müller von Berneck in völlig reinem Zustand durch Licht nicht zersetzt wird, stürmisch zerfällt, wenn es bei Gegenwart der lichtempfindlichen gelben und roten Blutlaugensalze bestrahlt wird. Die Zersetzung des $H_2O_2$ erfolgt in diesem Fall nach der ersten Ordnung, während nach den

1) J. W. Mellor, Proc. Chem. Soc. **20**. p. 196. 1904; außerdem Privatmitteilung von Hrn. J. W. Mellor.

2) W. Kistiakowsky, Zeitschr. f. physik. Chem. **35**. p. 481. 1900.

stöchiometrischen Gesetzen die zweite Ordnung zu erwarten wäre. Der beschleunigte Zerfall dauerte jedoch im Dunkeln noch stundenlang fort, wenn auch die Lösung nur sehr kurze Zeit der Bestrahlung ausgesetzt war.

Kistiakowsky sprach daraufhin die Vermutung aus, daß sich durch die Bestrahlung aus den Blutlaugensalzen irgend ein kolloidaler Katalysator bildet, eine Annahme, die sich in gewissem Sinne mit der von mir ausgesprochenen deckt. Im Anschluß an diese Beobachtung belichtete ich die Blutlaugensalze für sich allein und setzte sie dann im Dunkeln zu einer verdünnten Wasserstoffsuperoxydlösung. Es tritt dann starke Sauerstoffentwickelung ein, während im Dunkeln gehaltene Kontrollmischungen sich nur sehr langsam zersetzten. Ebenso fand ich eine deutliche Zunahme der Oxydationsgeschwindigkeit bei der Einwirkung von Bromwasser auf Wasserstoffsuperoxyd und Alkohol, wenn das Oxydationsmittel *vorher* bestrahlt war.

Es scheint aus diesen Versuchen hervorzugehen, daß sich in Lösungen, ebenso wie in Gasen durch die Bestrahlung selektiv absorbierender Substanzen, ein Katalysator bilden kann, der auch noch nach dem Aufhören der Belichtung seine Wirksamkeit beibehält; auf seine heterogene Natur ist aus der schon hervorgehobenen Analogie zwischen photochemischen und Diffusionsvorgängen zu schließen.

Auch die photochemischen Erscheinungen in festen Schichten scheinen bei Annahme von Reaktionskernen plausibel zu werden.

Die Sensibilisierung photographischer Platten für Strahlensorten bestimmter Wellenlänge durch Zusatz lichtempfindlicher Farbstoffe ist eine lange bekannte Tatsache. Im Sinne der hier ausgesprochenen Annahmen würde dies bedeuten, daß die durch Belichtung in der Gelatineschicht erzeugten Reaktionskerne später die beim Entwickeln erfolgende Reduktion des Halogensilbers katalysieren. Solche Anschauungen in bezug auf die Photographie sind nicht neu[1]), sie sind jedoch im Zusammenhang mit den hier beschriebenen sensibilisierten Gasreaktionen von besonderem Interesse. Die Verhältnisse bei den Halogeniden des Silbers sind indessen komplizierter, da diese Verbindungen außer zur Bildung von Reaktionskernen

1) J. M. Eder, Photochemie, Halle 1906.

auch noch zu wahren umkehrbaren photochemischen Reaktionen befähigt sind. Vielleicht ist in dieser Superposition von zwei Reaktionsmöglichkeiten der Schlüssel für die bis jetzt noch rätselhaften Erscheinungen der Solarisation zu suchen.[1])

Wenn man nun das latente Bild einfach als eine Ablagerung von Reaktionskernen betrachtet, so muß man denselben eine gewisse Beständigkeit auch nach dem Aufhören der Belichtung zuschreiben. (Daß die Kerne auch als gewöhnliche Kondensationskerne wirken können, dafür ist die Entwickelungsmöglichkeit der alten Daguerreplatten durch Kondensation von Quecksilberdampf auf den belichteten Stellen ein klassisches Beispiel.[2])

Die Beständigkeit der Reaktionskerne scheint in Beziehung zur inneren Reibung des Mediums, in dem sie entstanden sind, zu stehen. Während sie in den festen Schichten der photographischen Platten jahrelang existenzfähig sind, bleiben sie in Flüssigkeiten stundenlang wirksam (Kistiakowsky) und in Gasen nur für sehr kurze Zeit (Mellor).

### Schluß.

Die im vorstehenden beschriebenen Erscheinungen führen nun zu folgenden allgemeineren Konsequenzen:

1. Daß alle von selbst verlaufenden Reaktionen durch Licht katalysiert werden können, wenn sie von solchen Strahlen getroffen werden, die von einem der Reaktionsteilnehmer unter Bildung von katalysierenden Reaktionskernen absorbiert werden.

2. Daß solche Reaktionen für Strahlen, welche keiner der beteiligten Stoffe absorbiert, durch Beimengung fremder absorbierender Substanzen sensibilisiert werden können.

Zu 1. gehören beispielsweise die Bildung von $SO_3$, der Zerfall von Ozon im ultravioletten Licht, die Salzsäure- und Phosgenbildung aus den Komponenten und andere Photochlorierungen im sichtbaren Licht.

Zu 2. die Wasser-, Schwefeltrioxyd-, Ammoniakbildung, Ozonzersetzung bei Gegenwart von Chlor oder Brom im sichtbaren Licht, die Beschleunigung lichtempfindlicher Reaktionen

1) Vgl. hierzu: S. E. Sheppord and C. E. Kenneth Mees, Theory of the Photographic Process. London 1907. p. 213.

2) J. M. Eder, l. c. p. 251.

durch Zusatz von Jod, und u. a. die Zersetzung des Wasserstoffsuperoxyds bei Gegenwart von bestrahltem Blutlaugensalz.

Die Reaktionen, welche in der ersten Mitteilung als umkehrbare photochemische Reaktionen gekennzeichnet wurden, werden von der hier versuchten Erklärung der Wirkungen des Lichtes nicht oder nur indirekt betroffen, da in diesen Fällen das Licht nicht katalytisch wirkt, sondern tatsächlich eine Arbeit gegen die chemischen Kräfte leistet.

Die Anwesenheit von Reaktionskernen wird jedoch auch hier die Erreichung des photochemischen Gleichgewichtes katalysieren, und da der definitive *stationäre*[1]) Zustand eine Summe von Reaktionsgeschwindigkeiten darstellt, so werden auch hier die Diffusionserscheinungen eine wichtige Rolle spielen.

Diese umkehrbaren Reaktionen bilden das eigentliche Arbeitsgebiet der Photochemie, während die völlig davon verschiedenen in der vorliegenden Untersuchung betrachteten rein katalytischen Lichtreaktionen nur sekundär durch die Bestrahlung beeinflußt werden.

Auf eine Analogie soll an dieser Stelle noch kurz hingewiesen werden: auf den Zusammenhang zwischen den photochemischen Reaktionen und den chemischen Reaktionen, die durch die stille elektrische Entladung bewirkt werden.[2]) Es ist festgestellt worden, daß die wenigen Reaktionen, die bis jetzt quantitativ untersucht wurden, nach der ersten Ordnung verlaufen.[3]) In diesem Falle haben wir sicher heterogene Massenteilchen in der Gasmasse, welche als Reaktionskerne wirken. Der Verlauf des chemischen Vorgangs ist auch in diesem Falle auf ein einfaches Diffusionsproblem zurückzuführen. Interessant ist die von verschiedenen Forschern beobachtete Erscheinung, daß die stille elektrische Entladung das Chlor in derselben Weise „aktiviert" wie die Bestrahlung.[4])

1) R. Luther u. F. Weigert, l. c.

2) E. Warburg, Ann. d. Phys. **9.** p. 781. 1902; E. Regener, Ann. d. Phys. **20.** p. 1045. 1906; de Hemptinne, Zeitschr. f. physik. Chem. **46.** p. 13. 1903; W. G. Mixter, Amer. Journ. of Science (4) **4.** p. 51. 1897.

3) E. Warburg, l. c.; R. Pohl, Ann. d. Phys. **21.** p. 894. 1906.

4) J. W. Mellor, Proc. Chem. Soc. **20.** p. 140, 196. 1904; F. Russ, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. **38.** p. 1310. 1905; G. C. Foster, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. **38.** p. 1781. 1905.

Die Aktivität wurde durch die Abkürzung der Induktionsperiode in einem Chlorknallgasaktinometer (Mellor) oder durch die Einwirkung des entladenen Chlors auf Benzol gemessen (Russ). Im Zusammenhang hiermit und mit meinen Versuchen über die Zerstörung des Ozons bei Gegenwart von bestrahltem Chlor ist die bekannte Erscheinung erklärlich, daß die Ozonisierung des Sauerstoffs in einer Entladungsröhre bei Gegenwart von Chlor nicht möglich ist.[1]) Das gebildete Ozon zerfällt in diesem Falle außerordentlich schnell an den durch die Entladung im Chlor entstandenen Reaktionskernen.

Falls bei der stillen elektrischen Entladung eine Arbeit geleistet wird, wie dies z. B. bei der Ozonisierung des Sauerstoffs der Fall ist, sind die Vorstellungen unter denselben Bedingungen anzuwenden, wie für die entsprechenden photochemischen Prozesse.

Leider liegen über die chemischen Wirkungen der verschiedenen Strahlenarten, Kathoden-, Röntgen- und Radiumstrahlen noch keine genügenden reaktionskinetischen Messungen vor, es erscheint jedoch nicht zweifelhaft, daß sich die hier ausgesprochenen Ansichten auch auf diese Gebiete übertragen lassen und erlauben, den Verlauf der chemischen Reaktionen in einigen Fällen zu erklären.

Wie schon mehrfach betont, umfaßt die in dem vorstehenden versuchsweise eingeführte Annahme vorläufig nur eine beschränkte Anzahl von photochemischen Erscheinungen. Die Luminescenz-, Phosphorescenz- und Fluorescenzerscheinungen, bei denen stets eine Umwandlung von Lichtenergie stattfindet, gehören nicht direkt hierher. Es erscheint jedoch nach dem Mitgeteilten berechtigt, isolierte Reaktionskerne und die Erscheinungen der Diffusion in die Betrachtung der photochemischen Prozesse einzuführen, da einerseits eine Reihe von Tatsachen dadurch ungezwungen gedeutet wurden und andererseits neue Erscheinungen vorausgesagt werden konnten.

### Zusammenfassung.

Die Resultate der vorliegenden Untersuchung lassen sich kurz in folgender Weise zusammenfassen.

---

1) Hautefeuille u. P. Chappuis, Compt. rend. 91. p. 762. 1880.

1. Wenn man die Formeln des Massenwirkungsgesetzes in der bis jetzt üblichen Modifikation für photochemische Prozesse auf das Gleichgewicht anwendet, so ergeben sich Resultate, welche nur unter ganz bestimmten, zufällig vielleicht vorhandenen Bedingungen in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund stehen, daß das Phosgengleichgewicht bei verschiedenen Temperaturen durch Licht nicht verschoben wird.

2. Es wird deshalb versuchsweise eine neue Hypothese zur Erklärung der Tatsachen eingeführt, und zwar wird angenommen, daß durch die Bestrahlung im Chlor einzelne Molekülkomplexe entstehen, welche als Reaktionskerne wirken. Auf diese können, da sie gegenüber der ganzen Gasmasse nur in geringer Zahl vorhanden sind, die Betrachtungen für isolierte Massenteilchen Anwendung finden.

3. An diesen Teilchen kann die Reaktion bis zu einem durch die Temperatur allein bedingten Gleichgewichtszustand mit so großer Geschwindigkeit stattfinden, daß der Fortgang der Reaktion nur durch die *Diffusion* der noch unverbrauchten Stoffe, welche im Vergleich zu der Reaktionsgeschwindigkeit ein langsam verlaufender Vorgang ist, zu den Reaktionskernen hin geregelt wird.

4. Zum Beweis für die Anwesenheit von isolierten Kernen, welche auch als Kondensationskerne wirken können, wurde das Dampfstrahlphänomen in bestrahltem Chlor untersucht und festgestellt, daß bei Bestrahlung mit ultraviolettem Licht, mit sichtbarem violetten und blauem Licht, in den meisten Fällen Nebelbildung auftritt. Ähnliche Versuche anderer Forscher wurden gleichfalls zum Vergleich herbeigezogen.

5. Eine Folgerung der Hypothese ist, daß auch andere Reaktionen als die eigentliche lichtempfindliche Reaktion an den Reaktionskernen katalysiert werden müssen. Es wurde nachgewiesen, daß einige nicht lichtempfindliche Gasreaktionen bei Gegenwart von bestrahltem Chlor oder Brom sensibilisiert werden.

6. Solche sensibilisierten Gasreaktionen sind die Wasserbildung, die Schwefeltrioxydbildung, die Phosgendissoziation, die Ozonzersetzung, der Deaconsche Chlorprozeß und die Ammoniakbildung aus den Elementen.

7. Es wurden Gründe beigebracht, welche die für gasförmige Systeme geprüfte Reaktionskernhypothese auf flüssige und feste Systeme zu übertragen gestatten.

8. Mit der verallgemeinerten Annahme, daß photochemische Reaktionen, bei denen das Licht keine Arbeit leistet, als Reaktionen aufgefaßt werden können, welche durch einen heterogenen Katalysator katalysiert werden, stehen der monomolekulare Reaktionsverlauf aller bis jetzt untersuchter photochemischer Reaktionen, und der kleine Temperaturkoeffizient derselben, welcher in der Größenordnung mit dem Temperaturkoeffizient der Diffusion übereinstimmt, in gutem Einklang.

9. Als eine weitere Folgerung der Hypothese ist die Definition zu betrachten, daß in den Fällen, in denen eine von selbst verlaufende Reaktion durch das Licht beeinflußt wird, nicht die Reaktion selbst lichtempfindlich ist, sondern daß ein Reaktionsteilnehmer oder irgend ein unbeteiligter gleichzeitig anwesender Stoff die Fähigkeit hat, Licht unter Bildung von Reaktionskernen zu absorbieren.

10. Die Tatsache, daß die Aktivität des Chlors und anderer lichtempfindlicher Stoffe nicht sofort nach der Bestrahlung aufhört, sondern noch einige Zeit andauert, spricht für die Entstehung diskreter Massenteilchen durch die Bestrahlung.

11. Die hier versuchsweise angenommene Theorie, welche eine große Anzahl photochemischer Erscheinungen im Grunde auf Diffusionserscheinungen zurückführt, erlaubt viele Beobachtungen zu deuten, und stellt die chemischen Wirkungen der stillen elektrischen Entladung und der verschiedenen Strahlenarten, bei denen die Existenz isolierter Teilchen eine bewiesene Tatsache ist — welchen man nur die Eigenschaften von Reaktionskernen beizulegen braucht —, direkt an die Seite der chemischen Wirkungen des Lichtes.

(Eingegangen 19. August 1907.)

## 4. *Über Resonanz durch Strahlung;* *von V. Walfrid Ekman.*

Im allgemeinsten Begriffe des Wortes werden alle elektrischen Resonanzerscheinungen durch *Strahlung* elektrischer und magnetischer Kräfte hervorgerufen. Wenn der Abstand der resonierenden Oszillatoren klein genug, ist es jedoch nicht notwendig, am Begriffe der Strahlung festzuhalten; denn die elektromagnetische Kraftverteilung kann dann als abhängig von den *gleichzeitigen* elektrodynamischen Vorgängen in den Oszillatoren betrachtet werden. Unter dieser Voraussetzung sind in der Tat auch die Untersuchungen von Galitzin, M. Wien, Drude u. a. über die Wechselwirkung zweier resonierender Oszillatoren angestellt worden.[1]) Man könnte vielleicht hier als Gegensatz zu dem im Titel gewählten Ausdruck von „unvermittelter Resonanz" sprechen. In dem vor allem von V. Bjerknes behandelten Falle hingegen, wo die Rückwirkung des einen sekundär erregten Oszillators, weil unwesentlich, nicht in Betracht kommt, kann von dem angedeuteten Unterschiede gänzlich abgesehen werden.

Es sollen im folgenden einige möglichst einfache Fälle theoretisch untersucht werden, in welchen die oben erwähnte Annahme „unvermittelter" Resonanz nicht gestattet ist, sondern wo im Gegenteil die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Kräfte von wesentlicher Bedeutung ist.[2]) Es ist selbstverständlich, daß solche Fälle eintreten müssen, wenn der Abstand der beiden resonierenden Oszillatoren mit der

1) Vgl. im besonderen M. Wien, Wied. Ann. **61.** p. 151. 1897.

2) Dieselbe Aufgabe hat, so viel ich weiß, zuerst M. Brillouin behandelt (Ann. de chim. et phys. **7.** p. 17. 1902), ohne jedoch zu positiven Resultaten zu kommen. Vielmehr scheint er die Schlußfolgerung zu machen, daß zwei Oszillatoren, deren Abstand von der Größenordnung der Wellenlänge ist, keine regelmäßigen synchronen Schwingungen ausführen können. Es wird aus dem Folgenden hervorgehen, daß diese seine Schlußfolgerung nicht richtig sein kann, jedenfalls nicht, wenn das logarithmische Dämpfungsdekrement der Oszillatoren klein ist.

Länge der erregten Wellen vergleichbar ist. Überraschender ist vielleicht die Tatsache, daß die Verspätung der Kräfte auch dann von wesentlicher Bedeutung sein kann, wenn der Abstand der Oszillatoren sehr klein ist im Vergleich zu der Wellenlänge (aber groß im Verhältnis zu den Lineardimensionen der Oszillatoren). Die letztere Bedingung ist wohl im allgemeinen erfüllt im Falle der zu den Gasmolekülen oder Atomen gebundenen Oszillatoren, die wir als die Quellen der Spektrallinien annehmen. Die Anwendung auf die Theorie der Spektrallinien war in der Tat das ursprüngliche Ziel der vorliegenden Untersuchungen, das ich hoffe, bald in einer folgenden Abhandlung veröffentlichen zu können.

Dieselbe Aufgabe wie hier habe ich vorher in einer soeben gedruckten Abhandlung [1]): „Über die Schwingungen zweier benachbarten elektrischen Dipole" behandet, allerdings mit der im Titel angegebenen Beschränkung bezüglich der Art der Oszillatoren. Das dabei verfolgte Verfahren war in wenigen Worten folgendes:

Es wurde die von Planck berechnete Wirkung einer elektromagnetischen Welle auf einem linearen, wenig gedämpften Oszillator [2]) als Ausgangspunkt benutzt. Diese Wirkung wurde in der Weise gedeutet, als ob der Oszillator mit seiner eigenen natürlichen Schwingungszahl übereinstimmende Schwingungen, aber mit stetig veränderlicher Amplitude und Phasenkonstante ausführt. Diese Veränderungen der Amplitude und Phase lassen sich in sehr einfacher Weise als Funktionen der Intensität der Welle und des Phasenunterschiedes zwischen der letzteren und den Oszillatorschwingungen ausdrücken. Unter Zuhilfenahme der so gewonnenen Gleichungen wurden dann zwei Oszillatoren in Betracht gezogen, und es wurde ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitet, denen ihre Schwingungsphasen und Amplituden genügen müssen. Auf diese Weise wurde bewiesen, daß ihre Schwingungen (außer in einem einzigen Grenzfalle) aus zwei einfachen gedämpften Sinusschwingungen oder „Partialschwingungen" zusammen-

1) V. Walfrid Ekman, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 3. Nr. 26; Kongl. Svenska Vet. Akad. Stockholm 1907.

2) Vgl. M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1906.

gesetzt sind, genau wie in dem Falle, wenn die Oszillatoren momentan aufeinander zurückwirken. Die Schwingungszahlen und Dämpfungsdekremente dieser Partialschwingungen sowie die Energiemengen, mit denen die einzelnen Oszillatoren an jeder Partialschwingung teilnehmen, fallen aber verschieden aus, je nachdem die Rückwirkungen zwischen den Oszillatoren mehr oder weniger oder gar nicht verspätet werden.

Ich werde im folgenden die Gesetze der nämlichen Schwingungen in einer kürzeren, wenn auch nicht so allgemein gültigen Weise ableiten und sie zum Teil etwas eingehender besprechen. Es sollen dann auch die gewonnenen Resultate benutzt werden, um die Schwingungen zweier in *allen* Richtungen schwingungsfähigen Oszillatoren zu untersuchen.

**Die Schwingungsgleichungen zweier linearen Oszillatoren.**

Betrachten wir zuerst den Fall eines einzelnen geradlinigen Oszillators. Die Lage des Oszillators und die Richtung $z$ seiner Schwingungsachse nehmen wir erst einmal als unveränderlich an. Seine Dämpfung soll lediglich auf der Energieausstrahlung beruhen, und das logarithmische Dekrement sehr klein sein. Weiter nehmen wir an, daß die Schwingungsweite der Elektrizität gegenüber der Länge der erregten Wellen und anderen auftretenden Längen sehr klein ist, so daß der Oszillator einfach als ein elektrischer Dipol mit veränderlichem Moment $f(t)$ betrachtet werden kann. (Wir werden später finden, daß aus dieser letzteren Annahme die Kleinheit des logarithmischen Dekrementes als eine physikalisch notwendige Folgerung hervorgeht.)

Im übrigen ist es gleichgültig, ob der Oszillator aus einem stabförmigen Leiter besteht oder etwa aus zwei ungleichnamigen elektrischen Elementarmengen, die um eine gemeinsame Gleichgewichtslage längs einer geraden Linie schwingen können. Da eine unbewegliche Elektrizitätsmenge die Strahlung nicht beeinflußt, so kann der Oszillator offenbar ebenfalls aus nur *einem* geradlinig schwingenden Elektron bestehen.

Falls der Oszillator sich selbst überlassen wird, so führt er gedämpfte Eigenschwingungen aus, die wir in folgender Form darstellen können:

$$f(t) = A e^{-\delta_0 t} \cos(\nu_0 t + \theta_0).$$

Die Größe $\nu_0$ bezeichnen wir nach dem Vorbilde von V. Bjerknes als die zyklische Schwingungszahl oder auch schlechthin als die Schwingungszahl, die Größe $\delta_0$ als die Dämpfung. Die letztere ist gleich dem logarithmischen Dekremente mit $\nu_0/2\pi$ multipliziert. Und zwar sind $\nu_0$ und $\delta_0$ die dem Oszillator eigene, natürliche Schwingungszahl bzw. Dämpfung.

Wir nehmen nun an, daß der Oszillator von elektromagnetischen Wellen getroffen wird; und zwar sei $E_z$ die $z$-Komponente der von der Welle herbeigeführten elektrischen Kraft. In diesem Falle müssen, wie Planck gezeigt hat, das Moment $f$ und seine drei ersten Ableitungen nach der Zeit: $\dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}$ der Differentialgleichung:

$$\nu_0^4 f + \nu_0^2 \ddot{f} - 2\delta_0 \dddot{f} = 3\delta_0 c^3 E_z \tag{1}$$

genügen[1]), wobei $c$ die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Von dieser Gleichung ausgehend wollen wir die folgende Frage untersuchen:

Unter welchen Bedingungen kann der Oszillator Schwingungen von der Form

$$f = A e^{-\delta t} \cos \nu t \tag{2}$$

ausführen, wenn auf ihn die elektrische Kraftkomponente

$$E_z = C e^{-\delta t} \cos(\nu t + \gamma) \tag{3}$$

einwirkt? Es sollen, näher bestimmt, die zwei Größen $\nu$ und $\delta$ in solcher Weise als Funktionen von $A$, $C$ und $\gamma$ berechnet werden, daß der Gleichung (1) durch (2) und (3) genügt wird. Wenn wir der Kürze halber die Bezeichnungen:

$$\varphi = A e^{-\delta t} \sin \nu t,$$
$$m = C/A$$

einführen, so kann (3) in der Form:

$$E_z = m f \cos\gamma - m \varphi \sin\gamma$$

geschrieben werden. Indem wir $A$, $\delta$ und $\nu$ als konstant annehmen, folgt ferner:

$$\dot{f} = -\delta f - \nu \varphi,$$
$$\ddot{f} = (\delta^2 - \nu^2) f + 2\delta\nu\varphi,$$
$$\dddot{f} = (3\delta\nu^2 - \delta^3) f + (3\delta^2\nu - \nu^3)\varphi.$$

1) M. Planck, l. c. p. 113, Gleichung (172). Die angeführte Gleichung nimmt die hier angegebene Form an, falls unseren Bezeichnungen entsprechend, $\nu_0/2\pi$ an Stelle von $\nu_0$ und $2\pi\delta_0/\nu_0$ an Stelle von $\sigma$ geschrieben werden.

Die Substitution von (2) und (3) in (1) ergibt mithin:

$$(4)\quad \begin{cases} [\nu_0^4 + \delta^2\nu_0^2 - \nu^2\nu_0^2 - 6\,\delta_0\,\delta\,\nu^2 + 2\,\delta_0\,\delta^3 - 3\,\delta_0\,c^3 m\cos\gamma]\,.\,f \\ \quad + [2\,\nu_0^2\,\delta\,\nu - 2\,\delta_0\,\nu^3 + 6\,\delta_0\,\delta^2\nu + 3\,\delta_0\,c^3 m\sin\gamma]\,.\,\varphi = 0\,. \end{cases}$$

Da diese Gleichung für alle Werte von $t$ identisch erfüllt werden soll, so müssen auch die beiden in Klammern stehenden Ausdrücke, jeder für sich, gleich Null sein, und wir erhalten somit zwei Gleichungen, die in bezug auf $\nu$ und $\delta$ gelöst werden können. Es soll nun angenommen werden, daß die logarithmischen Dekremente $2\pi\delta_0/\nu_0$ und $2\pi\delta/\nu$ so klein sind, daß ihre Quadrate und Produkte unberücksichtigt gelassen werden können. Die beiden aus (4) hervorgehenden Gleichungen nehmen dann die Form an:

$$\nu_0^4 - \nu^2\nu_0^2 - 3\,\delta_0\,c^3 m\cos\gamma = 0\,,$$
$$2\,\delta\,\nu\,\nu_0^2 - 2\,\delta_0\,\nu^3 + 3\,\delta_0\,c^3 m\sin\gamma = 0\,,$$

woraus die folgenden Näherungswerte sich ergeben:

$$(5)\quad \begin{cases} \nu = \nu_0\sqrt{1 - \dfrac{3\,\delta_0}{\nu_0^4}\,c^3 m\cos\gamma} = \nu_0 - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\delta_0\,c^3\,C}{\nu_0^3\,A}\cos\gamma\,, \\ \delta = \dfrac{\delta_0\,\nu^2}{\nu_0^2} - \dfrac{3\,\delta_0\,c^3 m\sin\gamma}{2\,\nu\,\nu_0^2} = \delta_0 - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\delta_0\,c^3\,C}{\nu_0^3\,A}\sin\gamma\,. \end{cases}$$

Dies sind also die Bedingungsgleichungen, die erfüllt werden müssen, damit der Oszillator unter der Einwirkung der Kraft (3) die Schwingungen (2) ausführe.

Wir wollen nun ein aus zwei Oszillatoren (1) und (2) bestehendes System in Betracht ziehen. Ihre natürlichen Schwingungszahlen und Dämpfungen, die bisher mit $\nu_0$ und $\delta_0$ bezeichnet wurden, seien nun $\nu_1$ und $\delta_1$ bzw. $\nu_2$ und $\delta_2$. Im übrigen machen wir von den Oszillatoren dieselben Annahmen wie vorher. Das Verhältnis $\nu_2/\nu_1$ können wir dann auch als sehr nahe gleich 1 annehmen; denn nur unter dieser Voraussetzung werden die Oszillatoren einander merklich beeinflussen. Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen die beiden Oszillatoren mit einer gemeinsamen Schwingungszahl $\nu$ und Dämpfung $\delta$ schwingen können. Wir machen also für die Schwingungen des ersten bzw. zweiten Oszillators den Ansatz:

$$(6)\quad \begin{cases} f_1(t) = A_1\,e^{-\delta t}\cos(\nu t + \theta_1)\,, \\ f_2(t) = A_2\,e^{-\delta t}\cos(\nu t + \theta_2)\,. \end{cases}$$

Es seien ferner $E_1$ und $E_2$ die Kraftkomponenten, die in den positiven Achsenrichtungen des ersten bzw. des zweiten Oszillators wirken. $E_1$ rührt von den Schwingungen des zweiten, $E_2$ von denen des ersten Oszillators her. Da infolge unserer Voraussetzung die logarithmischen Dekremente der Oszillatoren sehr klein sind, so hängen $E_1$ und $E_2$ nur von der *gleichzeitigen* Schwingungsintensität des zweiten bzw. ersten Oszillators ab; und zwar können wir sie in der Form:

$$(7) \qquad \begin{cases} E_1 = -F A_2 e^{-\delta t} \cos(\nu t + \theta_2 - v), \\ E_2 = -F A_1 e^{-\delta t} \cos(\nu t + \theta_1 - v) \end{cases}$$

ausdrücken, wo sowohl $F$ wie $v$ in beiden Gleichungen *dieselben* Größen darstellen.[1]) Die Größe $v$ mag die Phasenretardation genannt werden und kann alle (positive und negative) Winkelwerte annehmen. Was $F$ betrifft, so wird es im folgenden nur im Ausdrucke:

$$b = \frac{3\sigma^2 F}{2\nu^3}$$

vorkommen, und diese Größe $b$ mag die Koppelungsintensität genannt werden. Im Ausdrucke für $b$ kann $\nu$ als mit $\nu_1$ und $\nu_2$ gleich betrachtet werden, weil wir nur einen Näherungswert brauchen sollen. Indem wir ferner die Bezeichnungen

$$A_2/A_1 = n; \quad \theta_2 - \theta_1 = \theta$$

einführen, und die Gleichungen (2) und (3) mit (6) und (7) vergleichen, so ergibt sich aus (5) für den ersten Oszillator:

$$(8\,a) \qquad \begin{cases} \nu = \nu_1 + \delta_1 b n \cos(v - \theta), \\ \delta = \delta_1 - \delta_1 b n \sin(v - \theta) \end{cases}$$

und für den zweiten Oszillator:

$$(8\,b) \qquad \begin{cases} \nu = \nu_2 + \frac{\delta_2 b}{n} \cos(v + \theta), \\ \delta = \delta_2 - \frac{\delta_2 b}{n} \sin(v + \theta). \end{cases}$$

Die Bedingung dafür, daß der Ansatz (6) möglich sei, ist, daß die Gleichungen (8a) und (8b) *dieselben* Werte von $\nu$ und $\delta$ ergeben. Unsere nächste Aufgabe ist also, diese Gleichungen

1) Dies ist in der auf p. 268 angeführten Abhandlung ausführlich nachgewiesen.

in bezug auf $n$, $\theta$, $v$ und $\delta$ zu lösen. Wird für die Phasenretardation $v$ der Wert Null eingesetzt, so kommen dabei Resultate heraus, die mit der von Galitzin, M. Wien u. a. entwickelten Resonanztheorie im Einklang stehen. Wir wollen aber sofort den allgemeineren Fall betrachten, wo $v$ von Null verschieden ist.

### Zwei gleiche, lineare Oszillatoren.

Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, wo beide Oszillatoren gleiche natürliche Schwingungszahlen und Dämpfungen haben, da dieser Fall infolge seiner Einfachheit für eine eingehende Erörterung sich besonders gut eignet. Wir machen also den Ansatz:

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_0; \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta_0.$$

Durch Subtraktion der dritten von der ersten und der vierten von der zweiten Gleichung (8) ergibt sich dann:

$$\frac{1}{n}\cos(v + \theta) = n\cos(v - \theta),$$

$$\frac{1}{n}\sin(v + \theta) = n\sin(v - \theta),$$

und diese Gleichungen geben die folgenden zwei Wertepaare von $\theta$ und $n$:

$$\begin{cases} \theta = 0, \\ n = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = \pi, \\ n = 1. \end{cases}$$

Die Oszillatoren schwingen also mit gleicher Phase, wenn nur die *eine* Partialschwingung, dagegen mit entgegengesetzten Phasen, wenn nur die *andere* Partialschwingung vorhanden ist. Da $n = 1$, so nehmen an einer Partialschwingung die beiden Oszillatoren mit gleicher Intensität teil. Insofern folgen die Schwingungen denselben Gesetzen, sei es mit oder ohne Phasenretardation.

Für die Schwingungszahlen und Dämpfungen ergibt sich aus (8a oder 8b) im Falle der ersten Partialschwingung ($\theta = 0$):

$$(9\,\text{a}) \qquad \begin{cases} \nu = \nu_0 + b\,\delta_0\cos v, \\ \delta = \delta_0 - b\,\delta_0\sin v, \end{cases}$$

und im Falle der zweiten ($\theta = \pi$):

$$(9\,b) \qquad \begin{cases} \nu = \nu_0 - b\,\delta_0 \cos v, \\ \delta = \delta_0 + b\,\delta_0 \sin v. \end{cases}$$

Im Falle $v = 0$ wird also die Dämpfung beider Partialschwingungen gleich der natürlichen Dämpfung der Oszillatoren, in völliger Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Resonanztheorie. Diese Übereinstimmung wird aber aufgehoben, wenn die Phasenretardation nicht 0 (und auch nicht eine Vielfache von $\pi$) ist, und es hängt von seinem Werte ab, ob die Schwingungszahlen oder die Dämpfungen durch die Resonanz überwiegend beeinflußt werden.

Wir wollen die erzielten Resultate an zwei speziellen Fällen veranschaulichen, nämlich wenn die Oszillatoren miteinander parallel schwingen, und entweder ihre Äquatorialebenen oder ihre Schwingungsachsen miteinander zusammenfallen. Die erstere Lage wollen wir kurzweg die *äquatoriale Lage*, die letztere die *Achsenlage* nennen.

Die Werte von $b$ und $v$ können in diesen Fällen mit Hilfe der von Hertz gegebenen Lösung[1]) leicht gefunden werden.

Sie sind Funktionen von $r/\lambda$ allein, wo $r$ der Abstand der beiden Oszillatoren und $\lambda$ die (für beide annähernd gleiche) Wellenlänge bedeuten. Es ist im Falle der äquatorialen Lage:

$$(10\,a) \quad b = b_e = \frac{3}{2\varrho^3}\sqrt{1 - \varrho^2 + \varrho^4}; \quad v = v_e = \varrho - \operatorname{arctg}\frac{\varrho}{1-\varrho^2},$$

wo

$$\varrho = 2\pi r/\lambda,$$

und im Falle der Achsenlage:

$$(10\,b) \qquad b = b_a = \frac{3}{\varrho^3}\sqrt{1 + \varrho^2}; \quad v = v_a = \varrho - \operatorname{arctg}\varrho.$$

Die Größen $v_e$ und $v_a$ sind in Fig. 1 als Ordinaten aufgetragen mit $r/\lambda$ als Abszisse. In derselben Weise sind $b_e$ und $b_a$ durch gestrichelte Linien in Figg. 2 und 3 dargestellt. Die Größen $b\cos v$ und $b\sin v$, die die Veränderungen von Schwingungszahl und Dämpfung darstellen, sind in ähnlicher Weise durch dicke, bzw. dünne Linien veranschaulicht. Es ist wohl überflüssig, diese Figuren eingehend zu besprechen. Es sei nur bemerkt, daß für solche Werte von $r/\lambda$, für welche

1) H. Hertz, Wied. Ann. 36. p. 1. 1888; Ges. Werke 2. p. 147.

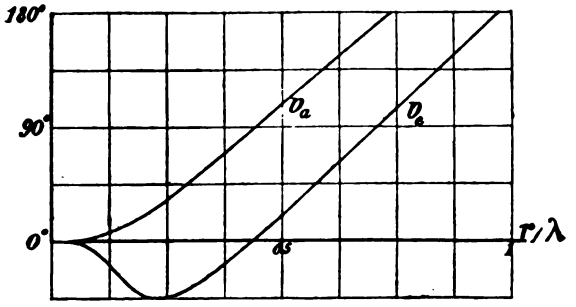



Fig. 1.

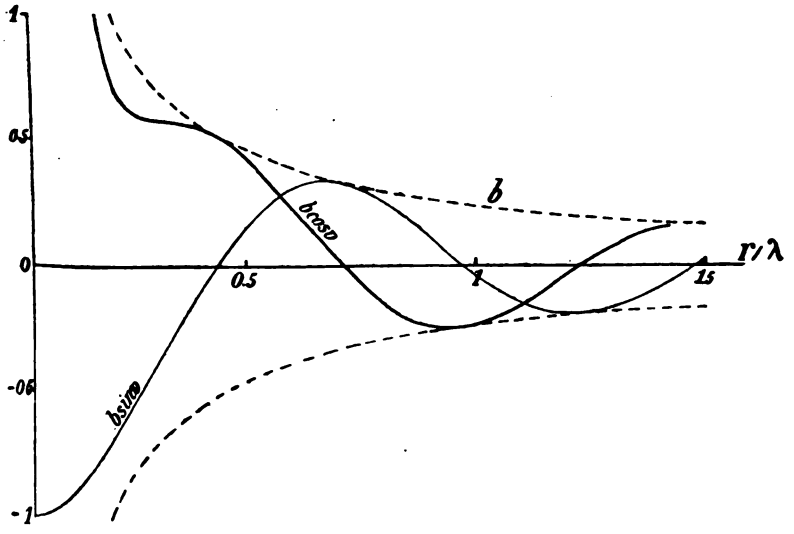



Fig. 2. (Äquatoriale Lage.)

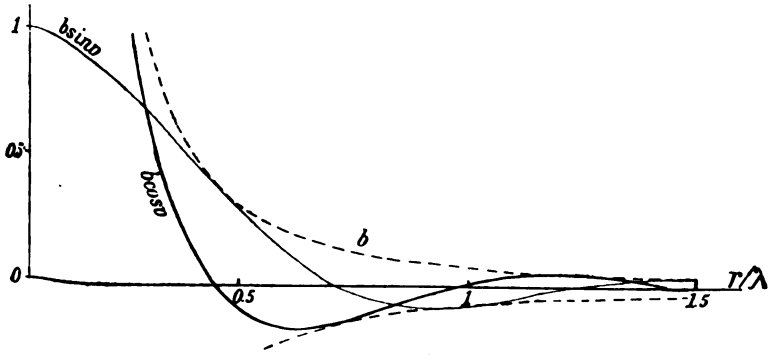



Fig. 3. (Achsenlage).

die Kurven $b \cos v$ und $b \sin v$ auf derselben Seite der Abszissenachse liegen, die schnellere der Partialschwingungen die langsamer gedämpfte ist; wo aber die beiden Kurven auf entgegengesetzten Seiten der Abszissenachse liegen, ist die schnellere Partialschwingung gleichzeitig die schneller gedämpfte.

Besonderes Interesse bietet der Fall, wo $r/\lambda$ eine sehr kleine Zahl ist. Es ist dann auch die Phasenretardation sehr klein (wie die dritte Potenz von $r/\lambda$), und man sollte daher erwarten, daß die beiden Partialschwingungen, wie im Falle der unvermittelten Resonanz, unter gleicher Dämpfung verlaufen müßten. Dies ist aber nicht der Fall. Die Koppelungsintensität wird nämlich gleichzeitig sehr groß, und zwar in den zwei vorliegenden Spezialfällen so groß, daß $b \sin v$ dem Grenzwerte $-1$ bzw. $+1$ zustrebt. *Die Dämpfung der einen Partialschwingung wird also* infolge (9 a, b) *gleich der doppelten natürlichen Dämpfung, während die zweite Partialschwingung beinahe ungedämpft verläuft.* Die angenäherten Werte von $v$ und $\delta$ werden für die eine Partialschwingung, falls wir neben $\delta_0$ auch das logarithmische Dekrement $\sigma_0 = 2\pi\delta_0/\nu_0$ benutzen:

$$(11\,a) \qquad v = \nu_0 \pm b\,\delta_0 = \nu_0(1 \pm b\,\sigma/2\pi);\ \delta = 2\delta_0$$

und für die zweite:

$$(11\,b) \qquad v = \nu_0 \mp b\,\delta_0 = \nu_0(1 \mp b\,\sigma/2\pi);\ \delta_0 = 0\,.$$

Die oberen Vorzeichen in den Ausdrücken für $v$ gelten, wenn die Oszillatoren die äquatoriale Lage, die unteren Vorzeichen, wenn sie die Achsenlage einnehmen.

Es besteht kein wirklicher Widerspruch zwischen diesen Resultaten und denen der gewöhnlichen Resonanztheorie. Denn die ersteren gelten nur unter der Voraussetzung, daß der Abstand der resonierenden Oszillatoren im Vergleich zu ihren Lineardimensionen groß, im Vergleich zur Wellenlänge aber klein ist. Wenn er dagegen von derselben Größenordnung wie die Oszillatoren oder noch kleiner als diese wird, so behalten zwar die Gleichungen (9) ihre formale Bedeutung, die Größen $b$ und $v$ sind jedoch nicht mehr durch (10) gegeben. Sie beziehen sich vielmehr in diesem Falle auf gewisse *Integralwerte* der elektrischen Kraft. Da ja die Schwingungszahlen nicht null oder negativ sein können, so muß $b \cos v$ immer kleiner

als $\nu_0/\delta_0$ sein. Für genügend kleine Werte von $v$ (nämlich wenn $\nu_0/\delta_0 \cdot \operatorname{tg} v$ eine kleine Zahl ist) werden also die Dämpfungen der Partialschwingungen sehr nahe gleich $\delta_0$, und die Ergebnisse der gewöhnlichen Resonanztheorie haben dann annähernde Gültigkeit.

Durch ähnliche Betrachtungen kann man auf einen gewissen Zusammenhang zwischen dem logarithmischen Dekrement eines linearen Oszillators und seiner Länge im Verhältnis zur Wellenlänge schließen. Werden für $b$ und $v$ in (9) die Größen (10a) oder (10b) eingesetzt, so wird für einen bestimmten Wert von $r/\lambda$ (nämlich wenn $b\,\delta_0 \cos v = \nu_0$) *eine* der Schwingungszahlen $\nu$ gleich Null. Da dies unmöglich, ist es in einem so kleinen Abstande $r$ sicher nicht gestattet, den Oszillator als ein schwingendes Dipol zu betrachten; und es scheint wahrscheinlich, daß die Zulässigkeit davon bedingt wird, daß $b\,\delta_0/\nu_0$ (d. h. $b\,\sigma/2\pi$, wo $b$ aus 10a oder b berechnet wird und $\sigma$ das logarithmische Dekrement bedeutet) eine kleine Zahl ist. Jedenfalls mag es sich verlohnen, eine solche Annahme an ein paar Beispielen zu prüfen.

Betrachten wir z. B. den Fall eines Hertzschen Oszillators. In einem von Lagergren benutzten Resonator dieser Art war $\sigma = 0{,}15$, während die Länge des Resonators 0,18 der Wellenlänge betrug.[1]) Wird nun in (10a und b) der Wert 0,18 für $r/\lambda$ eingesetzt, so ergeben sich für $b$ die Werte 1,2 bzw. 3,2, und für $b\,\sigma/2\pi$ die Werte 0,03 bzw. 0,08. Wird $r/\lambda$ 3,24 mal kleiner gewählt, so findet man für $b\,\sigma/2\pi$ die Werte 0,8 bzw. 1,8. In diesem Falle ist also der kleinste Abstand, in welchem $b\,\sigma/2\pi$ eine kleine Zahl ist, von derselben Größenordnung wie die Länge des Oszillators.

Bei den hypothetischen Oszillatoren, die wir als die Quellen der Spektrallinien annehmen, müssen die logarithmischen Dekremente bekanntlich sehr klein sein. M. Abraham berechnet auf Grundlage der Elektronentheorie die Dämpfung der Schwingungen eines Elektrons, das eine grüne Spektrallinie ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm) gibt. Er findet, unter Zuhilfenahme gewisser hypothetischer Annahmen, die nicht hier erwähnt werden

1) Sten Lagergren, Über elektrische Energieausstrahlung. Dissertation, Upsala 1902. p. 72—73.

sollen, den Wert $\sigma = 5 . 10^{-8}$ für das logarithmische Dekrement. Die neuesten Beobachtungen von sehr hohen Interferenzen machen diesen Wert nicht unwahrscheinlich. Nehmen wir denselben als richtig an, so wird $b\sigma/2\pi = 1$, wenn $b = 1{,}25 . 10^8$. Das Verhältnis $r/\lambda$ würde dann infolge (10a und b) von der Größenordnung $4.10^{-4}$ und $r$ von der Größenordnung $2.10^{-8}$ cm sein. Diese Länge würde also, falls unsere Annahmen richtig sind, die ungefähre Größenordnung der bezüglichen Oszillatoren darstellen. Sie stimmt auch in der Tat mit den Querschnitten der Moleküle überein, die man schon auf anderen Wegen berechnet hat.

### Zwei voneinander verschiedene Oszillatoren.

Im allgemeinen Falle, wenn $\nu_1$ und $\nu_2$, $\delta_1$ und $\delta_2$ voneinander verschieden sind, ergibt sich bei Elimination von $\nu$ und $\delta$ aus (8):

$$(12)\qquad \begin{cases} \nu_2 - \nu_1 = \quad \delta_1 b n \cos(v-\theta) - \dfrac{\delta_2 b}{n}\cos(v+\theta) \\ \delta_2 - \delta_1 = -\delta_1 b n \sin(v-\theta) + \dfrac{\delta_2 b}{n}\sin(v+\theta). \end{cases}$$

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$(13)\qquad \begin{cases} p = n\sqrt{\dfrac{\delta_1}{\delta_2}}, \quad e = \dfrac{\nu_2-\nu_1}{2b\sqrt{\delta_1\delta_2}}, \quad h = \dfrac{\delta_2-\delta_1}{2b\sqrt{\delta_1\delta_2}}, \\ E = e\cos v - h\sin v, \quad H = h\cos v + e\sin v, \\ K = E^2 + H^2 + \sqrt{(E^2+H^2)^2 + 2E^2 - 2H^2 + 1}. \end{cases}$$

Es ist leicht ersichtlich, daß $p^2$ in erster Annäherung das Verhältnis zwischen der Schwingungsenergie des zweiten und des ersten Oszillators darstellt, wenn das Verhältnis $\nu_2/\nu_1$ sehr nahe gleich 1 ist. Denn die von z. B. dem ersten Oszillator in der Sekunde ausgestrahlte Energiemenge ist einerseits zum Quadrate $A_1^2$ der Schwingungsamplitude, andererseits zu der mit $\delta_1$ multiplizierten Energiemenge des Oszillators proportional; und das gleiche gilt in entsprechender Weise von dem zweiten Oszillator.

Bei Benutzung der Bezeichnungen (13) läßt sich (12) in der Form:

$$2e = \left(p - \frac{1}{p}\right)\cos v\cos\theta + \left(p + \frac{1}{p}\right)\sin v\sin\theta$$
$$2h = -\left(p - \frac{1}{p}\right)\sin v\cos\theta + \left(p + \frac{1}{p}\right)\cos v\sin\theta$$

schreiben und, nach Auflösung in bezug auf $(p - 1/p)\cos\theta$ und $(p + 1/p)\sin\theta$, in folgender Form:

$$(14)\qquad \begin{cases} \left(p - \frac{1}{p}\right)\cos\theta = 2e\cos v - 2h\sin v = 2E, \\ \left(p + \frac{1}{p}\right)\sin\theta = 2h\cos v + 2e\sin v = 2H. \end{cases}$$

Nachdem aus diesen Gleichungen $p$ und $\theta$ ermittelt sind, findet man die Schwingungszahlen und Dämpfungen der Partialschwingungen aus (8 a oder b) unter Berücksichtigung der ersten Gleichung (13).

Die Auflösung der Gleichungen (14) in bezug auf $p$ und $\theta$ fällt verschieden aus, je nachdem $E$ und $H$ Null sind oder nicht. Der Fall $E = H = 0$ tritt nur dann ein, wenn $\nu_1 = \nu_2$ und $\delta_1 = \delta_2$. Diesen Fall haben wir eben erledigt. Die Fälle, in denen nur *eine* der Größen $E$ und $H$ verschwindet, sind in der auf p. 268 angeführten Abhandlung eingehend erörtert, und ich verweise in bezug auf dieselben auf diese Abhandlung. Es sei hier nur bemerkt, daß, unter der Annahme $v = 0$, $E$ oder $H$ Null werden, je nachdem die beiden Oszillatoren gleiche natürliche Schwingungszahlen oder gleiche Dämpfungen haben. Diese Fälle sind in der schon erwähnten Abhandlung von M. Wien p. 166—167 erörtert. Die für den allgemeineren Fall (wenn $v$ von 0 verschieden ist) erzielten Resultate bilden mit den seinigen eine vollständige Parallele.

Wir wenden uns sofort zu dem Fall, wenn sowohl $E$ wie $H$ von Null verschieden sind. Aus (14) ergibt sich durch Elimination von $\theta$:

$$1 = \frac{4E^2}{(p - 1/p)^2} + \frac{4H^2}{(p + 1/p)^2}$$

und nach Auflösung in bezug auf $(p^2 + 1/p^2)$:

$$(15)\quad p^2 + 1/p^2 = 2(E^2 + H^2) + 2\sqrt{(E^2 + H^2)^2 + 2E^2 - 2H^2 + 1} = 2K.$$

Eine zweite Lösung, die sich von (15) durch negatives Vorzeichen von der Quadratwurzel unterscheidet, hat keine physi-

kalische Bedeutung, weil in diesem Falle $p^2 + 1/p^2$ kleiner als 2, und mithin $p$ komplex werden. Dagegen ist $K$ offenbar größer als 2, falls $E$ und $H$ beide von 0 verschieden sind. Durch Auflösung in bezug auf $p$ bekommt man also immer zwei verschiedene positive Werte:

$$p = + \sqrt{K \pm \sqrt{K^2 - 1}}, \tag{16}$$

die den zwei Partialschwingungen entsprechen.

Ferner folgt aus (15), da $p$ positiv sein soll:

$$p + 1/p = \sqrt{2K + 2}, \quad p - 1/p = \pm \sqrt{2K - 2}, \tag{17}$$

wobei das obere und das untere Vorzeichen mit dem oberen bzw. dem unteren Vorzeichen in (16) zusammengehören. Gleichung (14) und (17) ergeben:

$$\sin\theta = + 2H/\sqrt{2K + 2}, \quad \cos\theta = \pm 2E/\sqrt{2K - 2}, \tag{18}$$

wobei wieder das positive und das negative Vorzeichen für $\cos\theta$ mit den entsprechenden Vorzeichen in (16) und (17) zusammengehören. Da also $\sin\theta$ im Falle beider Partialschwingungen dasselbe Vorzeichen hat, so schwingt in beiden Partialschwingungen *derselbe* Oszillator *vor* dem anderen, und die Summe der Phasenunterschiede $\theta$ ist gleich einer halben Periode.

Das Hauptinteresse knüpft sich an die Schwingungszahlen und Dämpfungen der beiden Partialschwingungen, sowie an das Verhältnis $p^2$ der Energiemengen, mit welchen die beiden Oszillatoren sich an irgend einer der Partialschwingungen beteiligen. Bei der Ermittelung von Schwingungszahl und Dämpfung muß sich aus (8a) und aus (8b) dasselbe Resultat ergeben. Die Berechnung vereinfacht sich aber beträchtlich, wenn wir anstatt einer der beiden Ausdrücke ihre halbe Summe anwenden. Man findet auf diese Weise unter Benutzung der ersten Gleichung (13):

$$v = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + b\sqrt{\delta_1 \delta_2}\left[\frac{p}{2}\cos(v - \theta) + \frac{1}{2p}\cos(v + \theta)\right],$$

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - b\sqrt{\delta_1 \delta_2}\left[\frac{p}{2}\sin(v - \theta) + \frac{1}{2p}\sin(v + \theta)\right].$$

Die eingeklammerte Größe in der ersten Gleichung kann in der Form:

$$\tfrac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)\cos v \cos\theta + \tfrac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)\sin v \sin\theta,$$

oder unter Berücksichtigung von (17) und (18) in der Form:

$$\pm \frac{E(K+1)\cos v + H(K-1)\sin v}{\sqrt{K^2-1}}$$

geschrieben werden. Führen wir ferner gemäß (13) die Größen $(\nu_2-\nu_1)$ und $(\delta_2-\delta_1)$ anstatt $E$ und $H$ wieder ein, so ergibt sich schließlich:

$$(19a)\quad \nu = \frac{\nu_1+\nu_2}{2} \pm \frac{\nu_2-\nu_1}{2}\frac{K+\cos 2v}{\sqrt{K^2-1}} \mp \frac{\delta_2-\delta_1}{2}\frac{\sin 2v}{\sqrt{K^2-1}}.$$

In derselben Weise findet man für die Dämpfung den Ausdruck:

$$(19b)\quad \delta = \frac{\delta_1+\delta_2}{2} \pm \frac{\delta_2-\delta_1}{2}\frac{K-\cos 2v}{\sqrt{K^2-1}} \mp \frac{\nu_2-\nu_1}{2}\frac{\sin 2v}{\sqrt{K^2-1}}.$$

Die oberen und die unteren Vorzeichen in (19a) und (19b) gehören mit den entsprechenden Vorzeichen in (16) und (18) zusammen und geben die beiden Partialschwingungen. Die Schwingungszahlen dieser letzteren haben also denselben Mittelwert wie die natürlichen Schwingungszahlen der beiden Oszillatoren, und das gleiche gilt in entsprechender Weise von den Dämpfungen.

Indem wir zwei neue Bezeichnungen $\varepsilon$ und $\eta$ einführen, kann (19) auch in der Form:

$$(20)\quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\nu-\nu_1}{2b\sqrt{\delta_1\delta_2}} = \dfrac{e}{2}\left(1 \pm \dfrac{K+\cos 2v - \dfrac{h}{e}\sin 2v}{\sqrt{K^2-1}}\right), \\ \eta = \dfrac{\delta_2-\delta_1}{2b\sqrt{\delta_1\delta_2}} = \dfrac{h}{2}\left(1 \pm \dfrac{K-\cos 2v - \dfrac{e}{h}\sin 2v}{\sqrt{K^2-1}}\right) \end{cases}$$

geschrieben werden. Diese Form eignet sich besonders gut für graphische Darstellung, indem die rechten Seiten nur drei unabhängige Größen $e$, $h$ und $v$ enthalten. Die beiden Ausdrücke, die hinter dem doppelten Vorzeichen $\pm$ in (20) stehen, sind in den meisten Fällen positiv, aber der eine oder der andere von ihnen kann auch negativ sein. Dann tritt die Eigentümlichkeit ein, daß an der schnelleren bzw. schneller gedämpften Partialschwingung vorzugsweise der Oszillator mit der *kleineren* natürlichen Schwingungszahl bzw. Dämpfung teil-

nimmt, und umgekehrt. Beide diese Fälle können jedoch nicht *gleichzeitig* eintreffen, denn es müßte dann

$$K + \cos 2v < \frac{h}{e} \sin 2v,$$

$$K - \cos 2v < \frac{e}{h} \sin 2v,$$

und mithin $K^2 < 1$ sein.

Figg. 4—9 sollen die oben gewonnenen Resultate in den Fällen $h = 0$ (Figg. 4—6) und $h = 1$ (Figg. 7—9) veranschau-

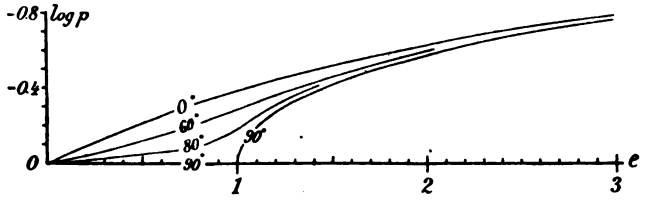



Fig. 4.

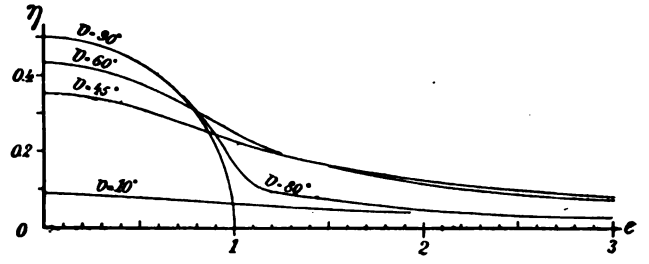



Fig. 5.

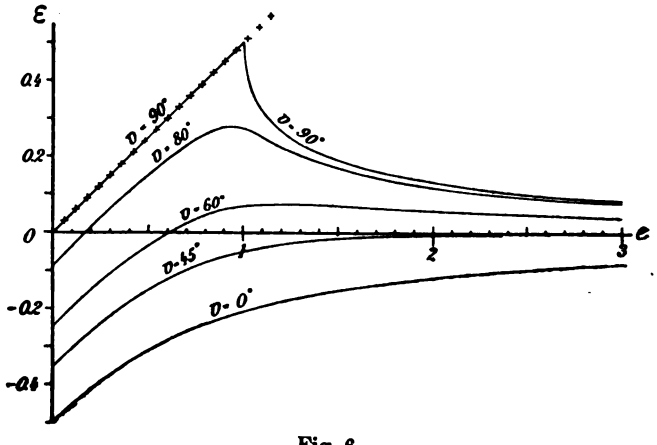



Fig. 6.

lichen[1]), und zwar für die verschiedenen Werte von $v$, die an den einzelnen Kurven angegeben sind. In sämtlichen Figuren ist

$$e = (\nu_2 - \nu_1) / 2\,b\sqrt{\delta_1\,\delta_2}$$

als Abszisse benutzt, während als Ordinaten die Größen

$$\log p, \quad \eta = (\delta - \delta_1) / 2\,b\sqrt{\delta_1\,\delta_2} \quad \text{und} \quad \varepsilon = (\nu_2 - \nu_1) / 2\,b\sqrt{\delta_1\,\delta_2}$$

eingetragen sind.

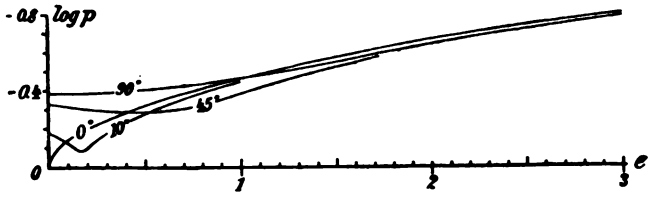



Fig. 7.

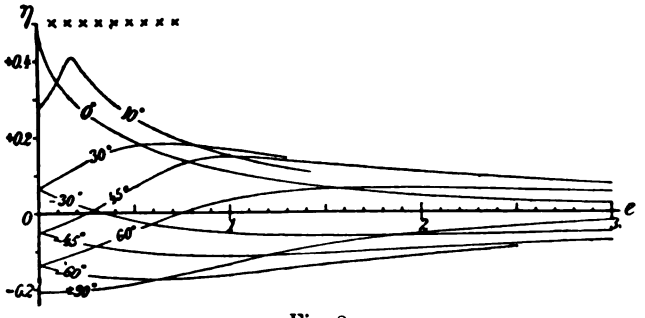



Fig. 8.

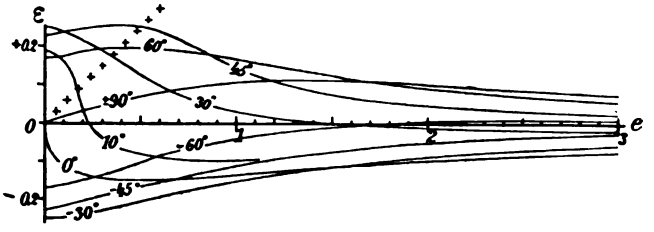



Fig. 9.

Die Figuren sind nur für *die* Partialschwingung gezeichnet, für die $\log p$ negativ ist, und in der also der *erste* Oszillator

1) Die Berechnungen sind von Frl. A. Gröntvedt ausgeführt.

mit dem größeren Energiebeitrag teilnimmt. Dies genügt vollständig, da ja die Schwingungszahlen und Dämpfungen der beiden Partialschwingungen symmetrisch auf beiden Seiten von den Mittelwerten $(\nu_1 + \nu_2)/2$ bzw. $(\delta_1 + \delta_2)/2$ liegen, und das Produkt der zugehörigen Werte von $p$ gleich 1 ist.

Ferner sind sie nur für *positive* Werte von $\nu_2 - \nu_1$ und $\delta_2 - \delta_1$ gezeichnet, sowie nur für Werte von $v$ zwischen $-90^0$ und $+90^0$ bzw. zwischen $0^0$ und $90^0$. Auch diese Einschränkung ist unwesentlich. Denn es ist aus (13), (15), (16) und (20) ersichtlich, daß $p$, $\varepsilon$ und $\eta$ bei einer Vergrößerung von $v$ um $180^0$ unverändert bleiben. In dem speziellen Falle $h = 0$ bleiben auch bei einer Vorzeichenänderung von $v$ die Größen $p$ und $\varepsilon$ unverändert, während $\eta$ das Vorzeichen wechselt. Die Vorzeichen von $\nu_2 - \nu_1$ und $\delta_2 - \delta_1$ zu ändern, ist einfach mit einem Umtauschen der Nummerfolge der Oszillatoren gleichbedeutend. Wird endlich das Vorzeichen von z. B. $\delta_2 - \delta_1$ allein gewechselt, und gleichzeitig das Vorzeichen von $v$, so bleiben $p$ und $\varepsilon$ dabei unverändert, während $\eta$ das Vorzeichen wechselt. Eine erweiterte Deutung der Figuren ist auch infolge der Symmetrie der Gleichungen (20) in bezug auf $\nu$ und $\delta$ möglich. Die erste und die zweite Gleichung (20) gehen nämlich neinander über, falls man überall (auch im Ausdruck $K$) $e$ und $h$, $\varepsilon$ und $\eta$ umtauscht und $v$ durch $\pi/2 - v$ ersetzt.

Die Figuren zeigen, daß für wachsende große Werte von $e$ (oder von $h$) die Größen $\varepsilon$ und $\eta$ assymptotisch gegen 0 abnehmen, während $\log p$ wächst. Dies ist mit dem von vornherein selbstverständlichen Resultate gleichbedeutend, daß die Resonanzwirkung für genügend große Werte von $\nu_2 - \nu_1$ und $\delta_2 - \delta_1$ sehr gering wird. Dagegen werden die Oszillatoren im großen und ganzen in gleichem Grade voneinander beeinflußt, gleichgültig ob die Phasenretardation groß oder gering ist, wie aus den Figuren ohne weiteres hervorgeht. Der Einfluß der Koppelungsintensität und des Dämpfungsdekrementes auf die Stärke der Resonanzwirkung äußert sich in leicht übersichtlicher Weise durch den Nenner $2b\sqrt{\delta_1 \delta_2}$, der in den Ausdrücken für $e$, $h$, $\varepsilon$ und $\eta$ vorkommt.

In Figg. 8 bzw. 6 und 9 sind durch kleine Kreuze die Linien bezeichnet, deren Ordinaten $h/2$ bzw. $e/2$ sind. Wo

die Kurve für $\eta$ bzw. $\varepsilon$ mit dieser Linie zusammentrifft, haben beide Partialschwingungen gleiche Dämpfung bzw. Schwingungszahl. In Fig. 9 *schneiden* einige $\varepsilon$-Kurven diese Linie. Hier tritt also der oben erwähnte Fall ein, daß in der langsameren Partialschwingung vorzugsweise der Oszillator mit den schnelleren Eigenschwingungen teilnimmt. Nehmen wir z. B. die Werte $k = 1$, $e = 0{,}25$, $v = 45^0$ an, so findet man aus Figg. 7—9:

$$\log p = -0{,}3; \quad \eta = 0, \quad \varepsilon = 0{,}25, \quad \text{also} \quad \nu = \nu_2.$$

Die Partialschwingungen stimmen also in diesem Falle mit den Eigenschwingungen der Oszillatoren nach Schwingungszahl und Dämpfung überein. *Die* Partialschwingung, an welcher vorzugsweise der erste Oszillator teilnimmt (mit einer ungefähr viermal so großen Energie als der des zweiten Oszillators), stimmt aber bezüglich der Dämpfung mit dem ersten, bezüglich der Schwingungszahl mit dem zweiten Oszillator überein.

**Zwei relativ zueinander sich bewegende lineare Oszillatoren.**

Die obigen Berechnungen wurden unter der Voraussetzung gemacht, daß die Oszillatoren eine unveränderliche Lage zueinander einnehmen. Es ist aber leicht ersichtlich, daß (5) auch dann annähernd gültig bleibt, wenn $C$ und $\gamma$ (und mithin auch $\delta$ und $\nu$) infolge von Bewegungen der Oszillatoren sehr langsam *veränderlich* sind.[1]) Das gleiche gilt also in bezug auf den Ansatz (6) und die darauf folgende Berechnung von $\nu$ und $\delta$, doch mit einer wichtigen Einschränkung, die unten kurz erwähnt werden soll.

Betrachten wir ein aus zwei linearen Oszillatoren bestehendes System. Aus $b$ und $v$ — also aus der gegenseitigen

1) Um dies zu zeigen, ist das in der Einleitung kurz erwähnte Verfahren, das ich in einer vorigen Abhandlung benutzt habe, zweckmäßiger. Ich hatte damals diesen Vorteil nicht ausgenutzt; wenn man die ganze Beweiskette der erwähnten Abhandlung durchgeht, findet man jedoch leicht folgendes: Nach Dopplers Prinzip hat die Bewegung der Oszillatoren Veränderungen der Wechselzahl der auf sie einwirkenden elektrischen Kräfte zur Folge. Falls diese Veränderungen von derselben oder kleineren Größenordnung als die Unterschiede zwischen den in den Berechnungen auftretenden (natürlichen und erzwungenen) Schwingungszahlen sind, so bleiben Gleichung (5) und (8) der vorliegenden Abhandlung mit wesentlich unveränderter Genauigkeit gültig.

Lage der Oszillatoren — lassen sich zwei Wertpaare von $p$ und $\theta$ berechnen, und jedem dieser Wertpaare entspricht eine Partialschwingung des Systems. Sind außerdem die Schwingungsenergie und Phase jedes Oszillators zu einer bestimmten Zeit bekannt, so lassen sich die Intensität und die Phase der einzelnen Partialschwingungen berechnen. Das Verhältnis zwischen den Energiemengen der beiden *Oszillatoren* wollen wir mit $P^2$, den Unterschied ihrer Phasen mit $\Theta$ bezeichnen. Wir nehmen nun an, daß zu einer bestimmten Zeit $P$ und $\Theta$ den zu einer Partialschwingung gehörigen Werten von $p$ und $\theta$ genau gleich sind, und daß also nur diese Partialschwingung stattfindet. Infolge der Bewegung der Oszillatoren haben im nächsten Augenblick $b$ und $v$, und daher im allgemeinen auch $p$ und $\theta$, infinitesimale Änderungen erlitten. Die Werte von $P$ und $\Theta$ bleiben aber dabei unverändert (bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung) und die andere Partialschwingung muß daher mit auftreten. *Wenn die Oszillatoren sich bewegen, wird also die Individualität der Partialschwingungen im allgemeinen nicht erhalten, insofern als die Energie von einer Partialschwingung in die andere überführt werden kann.*

Der Fall, daß die Oszillatoren gleiche natürliche Schwingungszahlen und Dämpfungen haben, bildet hiervon eine wichtige Ausnahme. In diesem Falle haben nämlich $p$ und $\theta$ konstante, von $b$ und $v$ unabhängige Werte (1 bzw. 0 und $\pi$). Man sieht daher die Richtigkeit der folgenden Schlußfolgerung sofort ein: *Wenn zwei gleiche, lineare Oszillatoren sich relativ zueinander bewegen, so bleibt dennoch die Individualität der Partialschwingungen dieses Systems erhalten; d. h. das Verhältnis zwischen den den beiden Partialschwingungen zukommenden Energiemengen erleidet keine andere Veränderung als die, welche durch ihre verschiedenen Dämpfungen bedingt ist.*

### Zwei kugelförmige Oszillatoren.

Es möge zum Schluß eine Art von Oszillatoren kurz besprochen werden, die den bei den natürlichen Strahlungsvorgängen wirksamen Oszillatoren wahrscheinlich ähnlicher sind als die linearen Oszillatoren. In elektrodynamischer

Hinsicht ist es dabei gleichgültig, ob wir jeden Oszillator als einen vollkommenen Leiter von geeigneter Form oder als eine um eine stabile Gleichgewichtslage schwingende elektrische Elementarmenge (Elektron) auffassen. Wir werden die der letzteren Auffassung entsprechende Ausdrucksweise benutzen.

Das Elektron soll in allen Richtungen beweglich sein und soll unendlich kleine und sehr wenig gedämpfte Schwingungen um seine Gleichgewichtslage ausführen. Die das Elektron beeinflussende Kraft hat ein Potential, dessen Niveauflächen dann (in der Nähe der Gleichgewichtslage) konaxiale und einander ähnliche Ellipsoiden sind. Das Elektron ist also im allgemeinen dreier voneinander unabhängigen einfachen Sinusschwingungen fähig, und die entsprechenden Schwingungsrichtungen — die Hauptachsen der Ellipsoiden — stehen senkrecht zueinander. Diese Schwingungen und Richtungen mögen die Hauptschwingungen und Hauptschwingungsrichtungen genannt werden. Die letzteren sind mit dem Massenteilchen (Molekül oder Atom) fest verbunden. Wenn nur *eine* der Hauptschwingungen stattfindet, so kann das Elektron mit einem geradlinigen Oszillator verglichen werden.

Es bietet keine besondere Schwierigkeit, die Schwingungen zweier ähnlicher (oder beinahe ähnlicher) Oszillatoren dieser Art zu untersuchen in dem Falle, daß die Ellipsoiden in beträchtlichem Grade ungleichachsig sind. Die drei Hauptschwingungszahlen eines Elektrons sind dann voneinander verschieden, und jede Hauptschwingung wird nur von der entsprechenden, annähernd isochronen Schwingung des anderen Elektrons merklich beeinflußt. Die Schwingungen des Systems setzen sich also aus den Schwingungen dreier Paare linearer Oszillatoren zusammen. Daneben werden auf die materiellen Systeme, an die die Elektronen gebunden sind, dauernd wirkende Drehungskräfte ausgeübt. Diese verschwinden, wie leicht berechnet werden kann, wenn je zwei entsprechende Hauptschwingungen parallel sind und entweder Achsenlage oder äquatoriale Lage (vgl. p. 274) zueinander einnehmen.

Von größerem Interesse ist der Fall, wenn die Äquipotentialflächen jedes Elektrons Kugelflächen sind. Der Oszillator mag dann kurzhin kugelförmig genannt werden. In diesem Falle können irgendwelche drei zueinander senkrechte Rich-

tungen als Hauptschwingungsrichtungen betrachtet werden, und die natürlichen Schwingungszahlen bzw. Dämpfungen der drei Hauptschwingungen sind alle gleich. Denken wir uns, daß anfänglich beide Oszillatoren *geradlinig* schwingen, und zwar so, daß ihre Schwingungsrichtungen parallel sind und entweder Achsenlage oder äquatoriale Lage zueinander einnehmen. Dann sind die elektrischen Kräfte, die die Elektronen beeinflussen, mit ihren Schwingungen gleichgerichtet und verursachen also keine Ablenkung von der ursprünglichen Schwingungsrichtung. Die magnetische Kraft erteilt dem Elektron eine Beschleunigung, deren Richtung sowohl mit der Kraftrichtung wie auch mit der Bewegungsrichtung des Elektrons wechselt. Die magnetischen Kräfte rufen also Schwingungen hervor, die eine doppelt so große Schwingungszahl haben wie die Eigenschwingungen der Elektronen, und die daher ganz verschwindend klein werden, wenn das logarithmische Dämpfungsdekrement selbst klein ist.

Wir können nun die wirklich stattfindenden Schwingungen des Systems in drei geradlinigen Komponentenschwingungen der eben besprochenen Art zerlegen, und zwar in zwei mit äquatorialer Lage und einer mit Achsenlage zwischen den einzelnen Oszillatoren. Jede der Komponentenschwingungen geht nach denselben Gesetzen vor sich wie die Schwingungen zweier linearen Oszillatoren; und im ganzen können also die zwei kugelförmigen Oszillatoren sechs einfach harmonische Partialschwingungen ausführen, entsprechend ihren sechs Freiheitsgraden.

In dem speziellen Falle, wenn beide Oszillatoren gleich sind, und ihr Abstand (im Verhältnis zur Wellenlänge) klein ist, sind drei Partialschwingungen beinahe ungedämpft, während die drei übrigen die doppelte natürliche Dämpfung eines einzelnen Oszillators haben (vgl. p. 276, Gleichung (11a und 11b)). Die Schwingungszahlen der letzteren sind aus (11a) zu entnehmen. Werden hier für $b$ die dem oberen bzw. unteren Vorzeichen entsprechenden Werte (10a und 10b) eingesetzt, so findet man in erster Annäherung für die zwei ersten gedämpften Partialschwingungen:

$$\nu = \nu_0 \left[1 + \frac{8\sigma}{4\pi}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^3\right]$$

und für die dritte:

$$\nu = \nu_0 \left[1 - \frac{3\sigma}{2\pi}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2\right].$$

Wenn die Oszillatoren sich in Bewegung befinden, so ändern im allgemeinen die Hauptschwingungsrichtungen in jedem Augenblicke ihre Lage, und es findet daher ein stetiger Energieaustausch zwischen den verschiedenen Partialschwingungen statt. Eine Ausnahme bildet allein der Fall, wenn die Verbindungslinie der Oszillatoren eine unveränderte Richtung beibehält, wenn also die Oszillatoren sich so bewegen, als ob sie bei unveränderter Geschwindigkeit zusammenstoßen würden oder bereits zusammengestoßen wären. In diesem Falle gilt was auf p. 286 von der Erhaltung der Individualität der Partialschwingungen gesagt wurde.

(Eingegangen 30. August 1907.)

## 5. *Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Aragonit;* von *W. Voigt.*

(Aus den Nachr. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-physik. Kl. 1907.)

Für eine molekulare Theorie der Materie bietet die Kenntnis des mechanischen Verhaltens *verschiedener Modifikationen einer und derselben Substanz* unzweifelhaft ein besonderes wichtiges Hilfsmittel. Aus diesem Grunde habe ich gleich nach Durchführung meiner Untersuchungen[1]) der Elastizitätsverhältnisse des *Kalkspats* mit dem Sammeln von Material für eine spätere Behandlung des *Aragonits*, der sich ja bei Rotglut in Kalkspat umwandelt, begonnen. Die in den letzten Wochen vollendeten Beobachtungen am Aragonit, bei denen ich mich der finanziellen Unterstützung der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu erfreuen hatte, haben zu den nachstehend mitgeteilten Resultaten geführt.

*Das Beobachtungsmaterial.* Für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten kommen nur die böhmischen Aragonite in Betracht, von denen Kristalle mit den beiläufigen Dimensionen $1{,}5 \times 1 \times 3$ cm unschwer zu erhalten sind. Schwierigkeiten bei ihrer Verwendung bieten die geringen Querdimensionen dieser Vorkommen und fast noch mehr die in ihnen so häufig auftretenden Zwillingslamellen.

In *erster* Hinsicht bot Hilfe ein (im ganzen unregelmäßig ausgebildeter) größerer Kristall, in dem sich eine einzelne Schicht normal zur $c$-Achse in Querdimensionen von rund 2 cm zur Herstellung einiger Stäbchen *normal* zur $c$-Richtung brauchbar erwies. Außerdem ließen sich in gegen die $c$-Achse *geneigten* Richtungen der $ac$- und $bc$-Ebene aus den dünneren Kristallen längere Stäbchen dadurch gewinnen, daß dieselben

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1889. Nr. 19; Wied. Ann. **39**. p. 412. 1890.

nicht (wie z. B. früher bei Topas) unter 45°, sondern unter 30° gegen die *c*-Achse geneigt hergestellt wurden.

Zwillingslamellen sind im allgemeinen dadurch ganz vermieden worden, daß mit dem Material Luxus getrieben, z. B. zur Herstellung von ein oder zwei Stäbchen parallel der *c*-Achse ein ganzer Kristall geopfert wurde. Für einzelne Orientierungen ließ sich indessen keine Lage des Stäbchens finden, die *ausschließlich* ungestörtes Material berührte; in diesen Fällen ist Sorge getragen, daß die (stets sehr feinen) Lamellen die Stäbchen nahe deren Enden durchsetzten.

Die ganz seitlich liegenden Stabteile werden ja bekanntlich bei Biegungen durch Belastung der Mitte nur sehr wenig in Anspruch genommen; es kommen demgemäß die in ihnen liegenden Störungen kaum merklich zur Wirkung. Bei den Drillungen sind die äußersten 2—3 mm der Länge durch die Einkittung der Stäbchen gleichfalls unwirksam; laufen überdies die Lamellen vom Ende des Stäbchens aus gegen eine Schmalseite (▭), so kommen sie deshalb kaum zur Geltung, weil die Schmalseiten bekanntlich bei der Torsion sehr wenig gespannt sind. Ich glaube nicht, daß bei den von mir benutzten Präparaten ein Einfluß der Zwillingslamellen übrig geblieben ist, der die Größe der Beobachtungsfehler übertrifft.

*Die Formeln für das rhombische Kristallsystem.* Von den im allgemeinen 21 Elastizitätskonstanten $c_{hk}$ und -moduln $s_{hk}$ bleiben im rhombischen System nur die neun mit den Indizes

(11), (22), (33), (44), (55), (66), (23), (31), (12)

übrig.

Bezeichnet man die Richtungskosinus einer Richtung gegen die Kristallachsen durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so bestimmt sich der dieser Richtung zugehörige *Dehnungsmodul* E, das Reziproke des sogenannten Elastizitätskoeffizienten oder *Dehnungswiderstandes E*, durch die Formel

$$(1)\quad \begin{cases} \mathsf{E} = 1/E = s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2 \\ \qquad + (s_{55} + 2s_{31})\gamma^2\alpha^2 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2. \end{cases}$$

Die *Biegung* $\eta$ eines beiderseitig unterstützten Stabes von der Länge $L$, der Breite $B$, der Dicke $D$ bei der zentralen Be-

lastung $P$ ergibt sich, wenn $L$ in die oben eingeführte Richtung fällt, zu

$$\eta = \frac{\mathsf{E}\, P\, L^3}{4\, B\, D^3}. \tag{2}$$

Biegungsbeobachtungen gestatten sonach die sechs Aggregate der $s_{hk}$ in (1) zu bestimmen, wozu *sechs* geeignet gewählte Stäbchen zu benutzen sind. Ich habe die folgenden angewendet, die nachstehend durch ihre weiter geführten Gattungsnummern und die dazu gesetzten Werte der Richtungswinkel von $L$ charakterisiert sind.

$$\begin{cases} \text{I } (0{,}90^\circ,\ 90^\circ); \quad \text{II } (90^\circ,\ 0{,}90^\circ); \quad \text{III } (90^\circ,\ 90^\circ,0); \\ \text{IV } (90^\circ,\ 60^\circ,\ 30^\circ); \quad \text{V } (60^\circ,\ 90^\circ,\ 30^\circ); \quad \text{VI } (58^\circ 5',\ 81^\circ 55',\ 90^\circ). \end{cases} \tag{3}$$

Die Gattung VI liegt parallel den Zwillingslamellen, welche letztere auf diese Weise am einfachsten zu vermeiden waren. Im übrigen zeigten feine Lamellen nahe den Enden nur die Gattungen I und VI.

Gemäß obigen Orientierungen wird nun

$$\begin{cases} \mathsf{E}_1 = s_{11}, \quad \mathsf{E}_2 = s_{22}, \quad \mathsf{E}_3 = s_{33}, \\ \mathsf{E}_4 = \frac{1}{16}\left(9\, s_{33} + s_{22} + 3\,(s_{44} + 2\, s_{23})\right), \\ \mathsf{E}_5 = \frac{1}{16}\left(9\, s_{33} + s_{11} + 3\,(s_{55} + 2\, s_{31})\right), \\ \mathsf{E}_6 = 0{,}0781\, s_{11} + 0{,}519\, s_{22} + 0{,}2014\,(s_{66} + 2\, s_{12}), \end{cases} \tag{4}$$

woraus sich $s_{11}$, $s_{22}$, $s_{33}$, $s_{44}+2s_{23}$, $s_{55}+2s_{31}$, $s_{66}+2s_{12}$ leicht berechnen.

Um die neun $s_{hk}$ gesondert zu erhalten, sind *Drillungen* von drei geeignet orientierten Stäbchen heranzuziehen. Es empfehlen sich drei von denjenigen (*sechs*) Orientierungen, wo $L$, $B$, $D$ den Kristallachsen parallel sind. Hier drücken sich die Drillungswinkel $\tau$ einfach durch ein von mir als *Drillungsmodul* $\mathsf{T}$ bezeichnetes Aggregat aus, das als das Reziproke des *Drillungswiderstandes* $T$ aufzufassen ist und gegeben wird durch die Formel

$$\begin{cases} \mathsf{T} = 1/T = 4\,(s_{11}\,\alpha^2\alpha_1^2 + s_{22}\,\beta^2\beta_1^2 + s_{33}\,\gamma^2\gamma_1^2) \\ \quad + 2\,[(s_{44} + 4\, s_{23})\,\beta\beta_1\,\gamma\gamma_1 + (s_{44} + 4\, s_{31})\,\gamma\gamma_1\,\alpha\alpha_1 \\ \qquad\qquad + (s_{66} + 4\, s_{12})\,\alpha\alpha_1\,\beta\beta_1] \\ \quad + s_{44}\,(\beta^2\gamma_1^2 + \gamma^2\beta_1^2) + s_{55}\,(\gamma^2\alpha_1^2 + \alpha^2\gamma_1^2) + s_{66}\,(\alpha^2\beta_1^2 + \beta^2\alpha_1^2); \end{cases} \tag{5}$$

in ihr bezeichnen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Richtungskosinus der Länge $L$,

aber $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ diejenigen der größeren Querdimension $B$ des Stäbchens.

Charakterisiert man die Richtung von $L$ durch den ersten, die von $B$ durch den zweiten Index von T, so erhält man aus (5)

$$(6) \quad T_{bc} = T_{cb} = s_{44}, \quad T_{aa} = T_{ac} = s_{55}, \quad T_{ab} = T_{ba} = s_{66}.$$

Von den Stäbchen (90°, 90°,0) hatte der eine Teil, der weiter die Bezeichnung III behalten soll, die Richtung $B$ in der $a$-Achse, der andere, der mit III′ bezeichnet werden soll, in der $b$-Achse. Die Stäbchen I (0,90°, 90°) hatten die $B$-Richtung in der $b$-Achse.

Die Drillung $\tau$ eines Stabes von den Dimensionen $L, B, D$ bei Einwirkung eines Momentes $N$ um die Längsrichtung hängt dann je von den *beiden* auf dieselbe Richtung von $L$ bezüglichen Moduln T ab. Es gilt nämlich, wenn man $\tau$ mit den analogen Indizes versieht, wie T,

$$(7) \quad \begin{cases} \tau_{bc} = \dfrac{3\,T_{bc}\,L\,N}{B\,D^3\left(1 - \frac{3}{16}\,\lambda\,\frac{D}{B}\sqrt{\frac{T_{ba}}{T_{bc}}}\right)}, \\ \tau_{ba} = \dfrac{3\,T_{ba}\,L\,N}{B\,D^3\left(1 - \frac{3}{16}\,\lambda\,\frac{D}{B}\sqrt{\frac{T_{bc}}{T_{ba}}}\right)}. \end{cases}$$

Hierin ist $\lambda$ eine Funktion von $D/B$, die für $D/B < \frac{1}{3}$ merklich konstant gleich 3,361 ist.

Das zweite Glied der Klammern im Nenner ist klein neben Eins, daher wird man die Berechnung der Moduln T aus den Beobachtungen durch sukzessive Annäherung ausführen.

*Bestimmung der Dimensionen.* Die der Messung unterzogenen Präparate hat die Firma Dr. Steeg & Reuter, Bad Homburg, in gewohnter Vortrefflichkeit hergestellt; in der Tat genügte die Regelmäßigkeit der prismatischen Form weitgehenden Ansprüchen.

Die Dicken wurden an 15 bzw. (bei den kürzesten Stäbchen) an neun Stellen gemessen, die sich in gleicher Zahl auf die Mittellinie und auf zwei um ca. 1 mm von den beiden Rändern abliegende Gerade verteilten; die drei demselben Querschnitt entsprechenden Zahlen weichen nur selten um

0,003 mm voneinander ab, und die in der Längsrichtung stattfindenden Variationen sind kaum größer. Die Breiten sind an drei Stellen gemessen.

*Die Biegungsbeobachtungen.* Über die Methode, nach der die Biegungsbeobachtungen ausgeführt sind, ist an anderer Stelle[1]) ausführlich berichtet worden. Hier mag nur wiederholt werden, daß die meisten Stäbchen in zwei verschiedenen (wirksamen) Längen zur Messung gelangten, um durch Kombination der Resultate die Eindrückung der Lager- und Belastungsschneiden zu eliminieren. Diese störenden Einflüsse gewinnen bei den kurzen Stäbchen eine große Bedeutung und es ist nicht angängig, ihre Werte von einer Gattung Stäbchen auf die anderen zu übertragen, da neben der Gestalt und dem Oberflächenzustand (Politur) der aufliegenden Flächen auch die Orientierung des Stäbchens gegen die Kristallachsen für jene Größen merklich maßgebend ist. Bei der im allgemeinen stattfindenden sehr geringen Größe der (ohne zu große Gefährdung der Stäbchen) erzielbaren Biegungen war ein äußerst sorgsames Operieren nötig, um eine befriedigende Übereinstimmung der Resultate zu erzielen; wiederholtes Abwaschen der Stäbchen mit absolutem Alkohol, Beseitigung etwaiger Stäubchen von den Auflageflächen mittels eines Pinsels, Vermeidung der Berührung mit der Hand und dergl. war zu beachten, um Störungen auszuschließen.

Die nachstehende Tabelle enthält für jedes Stäbchen die Dimensionen $B, D, L$ in Millimetern, die Belastung in Grammen ($S$ das Gewicht der Wagschale = 11,42), sodann die beobachteten Senkungen $\sigma$ in Millimetern der Skala, die je einem wirklichen Senkungswert von 0,0006793 mm entsprechen. Jede angegebene Zahl ist das Mittel aus 3—4 Ablesungen bei einer bestimmten Anordnung, bezieht sich also auf eine vollständige Beobachtungsreihe; die nebeneinander stehenden Zahlen sind hintereinander bei umgekehrten Lagen der Stäbchen gewonnen. Weiter folgt die aus den $\sigma$ berechnete Eindrückung $\sigma_0$ der Schneiden und die mit ihrer Hilfe gewonnene effektive Biegung $\eta$.

Da alle Fehlerquellen dahin wirken, die Biegungen zu

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1886. Nr. 3; Wied. Ann. 31. p. 474. 1887.

*groß* erscheinen zu lassen, so ist bei allen zum Zweck der Berechnung von $\eta$ nötigen Mittelwertbildungen aus zwei Resultaten dem kleineren das doppelte Gewicht beigelegt.

Endlich folgt der Dehnungsmodul E, nach Formel (2) berechnet, wobei Gramme und Millimeter als Einheiten benutzt sind. Am Schluß der auf eine Stäbchengattung bezüglichen Zahlen ist der Mittelwert aller E für die betreffende Gattung aufgeführt, daneben $E = 1/\mathsf{E}$ der Dehnungswiderstand.

Die Messungen waren am schwierigsten bei den Stäbchen der Gattungen II und V, wegen deren sehr geringen Längen; es ist ein glücklicher Umstand, daß den betreffenden Orientierungen bei Aragonit ein relativ kleiner Biegungswiderstand entspricht — so sind die für sie erhaltenen Zahlen nicht merklich unsicherer als die übrigen.

Biegungen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. Nr. 1 | $B = 4{,}99$ | $D = 0{,}487_5$ | $P = S + 40$ | |
| $L = 21{,}1$ | $\sigma = 21{,}9 \quad 21{,}4$ | $L = 18{,}1$ | $\sigma = 6{,}0 \quad 6{,}1$ | |
| | $22{,}6_5 \quad 22{,}4_5$ | | $6{,}2 \quad 6{,}2$ | |
| | $\sigma_0 = 1{,}1$ | $\eta = 20{,}8$ | $\mathsf{E}_1 = 6{,}7_7 \cdot 10^{-8}$ | |
| Nr. 2 | $B = 5{,}00$ | $D = 0{,}481$ | $P = S + 40$ | |
| $L = 21{,}1$ | $\sigma = 21{,}9_5 \quad 22{,}0_5$ | $L = 18{,}1$ | $\sigma = 6{,}0 \quad 6{,}3$ | |
| | $22{,}5 \quad 22{,}3$ | | $6{,}2 \quad 6{,}2$ | |
| | $\sigma_0 = 1{,}1_5$ | $\eta = 20{,}9_5$ | $\mathsf{E}_1 = 6{,}8_8 \cdot 10^{-8}$ | |
| Nr. 3 | $B = 4{,}92_5$ | $D = 0{,}490$ | $P = S + 40$ bzw. $S + 50$ | |
| $L = 17{,}6$ | $\sigma = 12{,}9 \quad 13{,}3$ | $L = 13{,}1$ | $\sigma = 5{,}8 \quad 5{,}9$ | |
| | $\sigma_0 = 0{,}8$ | $\eta = 12{,}2_5$ | $\mathsf{E}_1 = 6{,}8_8 \cdot 10^{-8}$ | |
| $L = 17{,}6$ | $\sigma = 15{,}5 \quad 15{,}8$ | $L = 13{,}1$ | $\sigma = 7{,}0 \quad 7{,}1$ | |
| | $\sigma_0 = 1{,}0_5$ | $\eta = 14{,}5_5$ | $\mathsf{E}_1 = 6{,}8_4 \cdot 10^{-8}$ | |
| Im Mittel | $\underline{\mathsf{E}_1 = 6{,}8_4 \cdot 10^{-8}}$ | $\underline{E_1 = 14{,}6 \cdot 10^{-6}}$. | | |

Bei Berechnung dieser Mittelwerte sind die beiden auf Nr. 3 bezüglichen Beobachtungen nur als eine gerechnet.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| II. Nr. 1 | $B = 4{,}97_5$ | $D = 0{,}490$ | $P = S + 40$ bzw. $S + 50$ | |
| $L = 18{,}1$ | $\sigma = 26{,}8 \quad 26{,}7$ | $L = 13{,}1$ | $\sigma = 11{,}4 \quad 10{,}9$ | |
| | $26{,}1_5 \quad 26{,}7_5$ | | | |
| | $\sigma_0 = 1{,}6_5$ | $\eta = 24{,}8_5$ | $\mathsf{E}_2 = 12{,}9_6 \cdot 10^{-8}$ | |
| $L = 18{,}1$ | $\sigma = 31{,}0 \quad 31{,}6$ | $L = 13{,}1$ | $\sigma = 12{,}6 \quad 12{,}9$ | |
| | $\sigma_0 = 1{,}5$ | $\eta = 29{,}7$ | $\mathsf{E}_2 = 12{,}9_7 \cdot 10^{-8}$ | |
| Nr. 2 | $B = 4{,}97_5$ | $D = 0{,}491$ | $P = S + 50$ | |
| $L = 14{,}6$ | $\sigma = 16{,}7 \quad 16{,}7$ | | | |
| | $\sigma_0 = 1{,}5$ | $\eta = 15{,}2$ | $\mathsf{E}_2 = 12{,}7_8 \cdot 10^{-8}$ | |

Nr. 3 $B = 5{,}13$ $D = 0{,}473$ $P = S + 50$
$L = 15{,}6$ $\sigma = 21{,}8$ $22{,}1$
$\sigma_0 = 1{,}5$ $\eta = 20{,}4$ $E_2 = 12{,}9_1 \cdot 10^{-8}$
Im Mittel $\underline{E_2 = 12{,}8_9 \cdot 10^{-8}}$ $\underline{E_1 = 7{,}76 \cdot 10^6}$

III. Nr. 1 $B = 4{,}92$ $D = 0{,}488_5$ $P = S + 10$
$L = 28{,}1$ $\sigma = 37{,}7$ $38{,}2$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 4{,}7_5$ $4{,}6_5$
$\sigma_0 = 0{,}9_5$ $\eta = 36{,}9_0$ $E_3 = 12{,}0_8$
Nr. 2 $B = 5{,}38$ $D = 0{,}473$ $P = S + 20$
$L = 24{,}1$ $\sigma = 34{,}9$ $34{,}7$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 6{,}3$ $6{,}2$
$\sigma_0 = 0{,}8_0$ $\eta = 33{,}9_5$ $E_3 = 11{,}9_5$
Nr. 3 $B = 5{,}39$ $D = 0{,}474$ $P = S + 20$
$L = 24{,}1$ $\sigma = 34{,}7$ $34{,}8$
$\sigma_0 = 0{,}80$ $\eta = 33{,}9_5$ $E_3 = 12{,}0_5$

III'. Nr. 1 $B = 4{,}92$ $D = 0{,}490_5$ $P = S + 10$
$L = 28{,}1$ $\sigma = 36{,}9$ $37{,}1$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 4{,}3$ $4{,}5$
$\sigma_0 = 0{,}7_5$ $\eta = 36{,}2_0$ $E_3 = 12{,}0_0$
r. 3 $B = 5{,}41$ $D = 0{,}474$ $P = S + 10$
$L = 33{,}1$ $\sigma = 59{,}9$ $59{,}5$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 4{,}8$ $4{,}7$
$\sigma_0 = 1{,}1_5$ $\eta = 58{,}5$ $E_3 = 11{,}7_0$
Im Mittel $\underline{E_3 = 11{,}9_7 \cdot 10^{-8}}$ $\underline{E_2 = 8{,}3_5 \cdot 10^6}$

IV. Nr. 1 $B = 4{,}91$ $D = 0{,}487_5$ $P = S + 20$
$L = 26{,}1$ $\sigma = 40{,}6_5$ $41{,}1_5$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 5{,}9_5$ $5{,}7_5$
$\sigma_0 = 0{,}70$ $\eta = 40{,}1_0$ $E_4 = 11{,}1_1 \cdot 10^{-8}$
Nr. 2 $B = 4{,}91$ $D = 0{,}489$ $P = S + 30$
$L = 21{,}1$ $\sigma = 28{,}8$ $28{,}8$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 7{,}6_5$ $7{,}5_5$
$\sigma_0 = 1{,}0_0$ $\eta = 27{,}8_0$ $E_4 = 11{,}1_4 \cdot 10^{-8}$
Im Mittel $\underline{E_4 = 11{,}1_3 \cdot 10^{-8}}$ $\underline{E_4 = 8{,}9_1 \cdot 10^6}$

V. Nr. 1 $B = 4{,}96_5$ $D = 0{,}486_5$ $P = S + 40$ bzw. $S + 50$
$L = 18{,}1$ $\sigma = 30{,}0$ $30{,}8$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 12{,}3$ $12{,}9$
$\sigma_0 = 1{,}6_0$ $\eta = 28{,}6_5$ $E_5 = 14{,}5_9 \cdot 10^{-8}$
$L = 18{,}1$ $\sigma = 37{,}2$ $36{,}9$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 15{,}2$ $15{,}5$
$36{,}6$ $35{,}6$ $15{,}2$ $14{,}6$
$\sigma_0 = 1{,}7_5$ $\eta = 34{,}5_5$ $E_5 = 14{,}7_3 \cdot 10^{-8}$
Nr. 2 $B = 5{,}40$ $D = 0{,}476_5$ $P = S + 50$
$L = 17{,}1$ $\sigma = 29{,}3$ $29{,}4$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 14{,}3$ $14{,}4$
$\sigma_0 = 2{,}0$ $\eta = 27{,}3_5$ $E_5 = 14{,}1_4 \cdot 10^{-8}$
Nr. 3 $B = 3{,}80$ $D = 0{,}474_5$ $P = S + 10$ bzw. $S + 20$
$L = 21{,}1$ $\sigma = 27{,}3$ $27{,}8$
$\sigma_0 = 0{,}9$ $\eta = 26{,}5_5$ $E_5 = 14{,}5_4 \cdot 10^{-8}$
$L = 21{,}1$ $\sigma = 40{,}1$ $39{,}6$ $L = 13{,}1$ $\sigma = 10{,}3$ $10{,}4$
$\sigma_0 = 1{,}1_0$ $\eta = 38{,}6_5$ $E_5 = 14{,}4_5 \cdot 10^{-8}$
Im Mittel $\underline{E_5 = 14{,}4_9 \cdot 10^{-8}}$ $\underline{E_5 = 6{,}9_0 \cdot 10^6}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| VI. Nr. 1 | $B = 4{,}90$ | $D = 0{,}493$ | $P = S + 20$ |
| $L = 26{,}1$ | $\sigma = 38{,}7_5\ \ 38{,}3_5$ | $L = 13{,}1$ | $\sigma = 5{,}6_5\ \ 5{,}6_5$ |
| | $\sigma_0 = 1{,}0_5$ | $\eta = 37{,}3_5$ | $E_s = 10{,}6_8 \cdot 10^{-8}$ |
| Nr. 2 | $B = 4{,}89$ | $D = 0{,}491_5$ | $P = S + 20$ |
| $L = 26{,}1$ | $\sigma = 38{,}3_5\ \ 39{,}2_5$ [1]) | $L = 13{,}1$ | $\sigma = 5{,}7_5\ \ 5{,}7_5$ |
| | $\sigma_0 = 1{,}0_0$ | $\eta = 37{,}6_5$ | $E_s = 10{,}6_4 \cdot 10^{-8}$ |
| Im Mittel | $\underline{E_s = 10{,}6_5 \cdot 10^{-8}}$ | | $\underline{E_s = 9{,}3_8 \cdot 10^6}$ |

Aus diesen Werten folgt gemäß (4)

$$(8)\quad \begin{cases} s_{11} = 6{,}8_4 \cdot 10^{-8}, \quad s_{22} = 12{,}8_9 \cdot 10^{-8}, \quad s_{33} = 11{,}9_7 \cdot 10^{-8}, \\ s_{44} + 2\,s_{23} = 19{,}1_5 \cdot 10^{-8}, \quad s_{55} + 2\,s_{31} = 39{,}0_9 \cdot 10^{-8}, \\ s_{66} + 2\,s_{12} = 16{,}9_8 \cdot 10^{-8}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Parameter berechnet sich das Gesetz des allgemeinen Dehnungsmoduls E nach Formel (1). Zu seiner Veranschaulichung sind in Fig. 1 die Hauptschnittkurven der

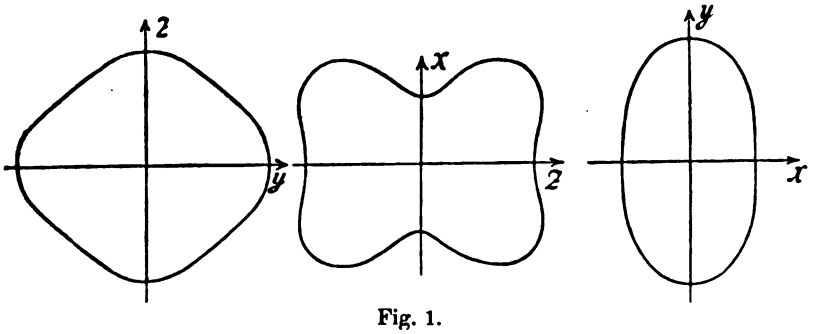



Fig. 1.

Oberfläche, die entstehen, wenn man E als Vektor vom Koordinatenanfang aufträgt, wiedergegeben. Die Koordinatenachsen $X$, $Y$, $Z$ entsprechen dabei den Kristallachsen $a$, $b$, $c$.

Die Kurve in der $YZ$-Ebene zeigt Maxima von E in den Koordinatenachsen, Minima in Richtungen, die mit der $\pm Y$-Achse die Winkel von (rund) $\pm 49^0\,40'$ einschließen; die entsprechenden Minimalwerte von E sind etwa gleich $10{,}9_6 \cdot 10^{-8}$.

Die Kurve in der $ZX$-Ebene ergibt in der Richtung der Koordinatenachsen Minima für E; die Maxima von der un-

1) Der abnorm große (wiederholt verifizierte) Wert war ersichtlich durch eine Unregelmäßigkeit in der Gestalt der einen Auflagefläche des Stäbchens nahe dessen Ende bedingt.

gefähren Größe $14{,}8_1 . 10^{-8}$ schließen mit der $\pm Z$-Achse die Winkel von etwa $37^0 40'$ ein.

Die Kurve in der $XY$-Ebene ergibt ein Minimum für E in der $X$-, ein Maximum in der $Y$-Achse; dazwischen liegt *kein* Extremwert. Es sind dieselben drei Typen von Schnittkurven, die auch Baryt geliefert hat.[1])

In den Mittellinien der Oktanten ($\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$, $\beta = \pm 1/\sqrt{3}$, $\gamma = \pm 1/\sqrt{3}$) besitzt E den Wert $11{,}8_8 . 10^{-8}$, aus dem zu schließen ist, daß innerhalb der Oktanten absolute Maxima und Minima von E nicht liegen.

*Die Drillungsbeobachtungen.* Auch über die Methode der Drillungsbeobachtungen ist an anderer Stelle[2]) ausführlich berichtet worden. Die Versuche waren nicht ohne Schwierigkeit infolge der leichten Zerbrechlichkeit der Präparate. Die Kristallstäbchen von noch nicht 0,5 mm Dicke mußten eingespannt und zentriert werden; darauf waren die Spiegelfassungen auf den Stäbchen festzuklemmen. Namentlich die Stäbchen der Gattungen I und II erwiesen sich als äußerst hinfällig; da die Gattung II aber nach (6) und (3) mit III' übereinstimmende Drillungsmoduln T liefert, so konnte von ihrer Verwendung schließlich abgesehen werden. Die Stäbchen I gestatteten trotz ihrer geringen Länge (die durch Abspringen von Stücken an den Enden zum Teil noch reduziert wurde) schließlich doch einige gute Beobachtungsreihen; ihr Resultat ist ein Wert für $T_1$, dessen Sicherheit nicht allzu stark hinter denjenigen der leichter zu beobachtenden $T_3$ und $T_3'$ zurücksteht.

In der folgenden Zusammenstellung bezeichnen $B$, $D$, $L$ wie oben die Dimensionen des beobachteten Stäbchens; $P$ ist das drillende Gewicht in Grammen, $S$ das Gewicht der Schale dabei $= 11{,}52$. Die Zahlen $\tau$ geben die Größen der beobachteten Drillungen in Millimetern der Skala, die 220 cm von der Drehachse entfernt war; je eine bezieht sich auf eine Drehung des rechten, eine auf eine Drehung des linken Stäbchenendes, während das andere festgehalten war, und bildet den Mittelwert aus 3—4 sehr genau übereinstimmenden

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1887. Nr. 19; Wied. Ann. 34. p. 981. 1888.
2) W. Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 189. 1875.

Ablesungen. Bei diesen beiden Beobachtungen war der Hebelarm, an dem $P$ wirkte, nicht genau gleich, und darauf beruht ein Teil der Abweichung der beiden Zahlen; der mittlere Wert des Hebels war 36,9 mm.

Drillungen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. Nr. 1 | $B = 4{,}99$ | $D = 0{,}487_5$ | | $L = 11{,}24$ |
| $P = S$ | $\tau = 26{,}8_0$ | $27{,}1_0$ | $T_1 = 22{,}6_5 \cdot 10^{-8}$ | |
| $P = S + 5$ | $\tau = 38{,}4_0$ | $38{,}5_0$ | $T_1 = 22{,}5_5 \cdot 10^{-8}$ | |
| Nr. 2 | $B = 5{,}00$ | $D = 0{,}488$ | | $L = 14{,}25$ |
| $P = S$ | $\tau = 35{,}4_0$ | $35{,}5_0$ | $T_1 = 23{,}6_0 \cdot 10^{-8}$ | |
| Nr. 3 | $B = 4{,}92_5$ | $D = 0{,}490$ | | $L = 11{,}79$ |
| $P = S$ | $\tau = 28{,}8$ | | $T_1 = 23{,}0_4 \cdot 10^{-8}$ | |
| $P = S + 5$ | $\tau = 41{,}4_5$ | $41{,}0_5$ | $T_1 = 22{,}9_4 \cdot 10^{-8}$ | |
| Im Mittel | $T_1 = 22{,}9_5 \cdot 10^{-8}$ | | $T = 4{,}36 \cdot 10^6$ | |

Der für Nr. 2 gefundene Wert $T_1$ ist auffallend groß, so daß man an Störungen der Beobachtung denken möchte. Leider zerbrach das Stäbchen bei dem Versuch, die Messung zu wiederholen. Da mit Nr. 1 und 3 je *zwei* Beobachtungen durchführbar waren, so kommt Nr. 2 beim Nehmen des Mittels von selbst zu geringerem Einfluß.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| III. Nr. 1 | $B = 4{,}92$ | $D = 0{,}488_5$ | | $L = 24{,}22$ |
| $P = S$ | $\tau = 95{,}6$ | $95{,}3$ | $T_3 = 38{,}0_8 \cdot 10^{-8}$ | |
| Nr. 2 | $B = 5{,}38$ | $D = 0{,}473$ | | $L = 20{,}70$ |
| $P = S$ | $\tau = 81{,}7$ | $82{,}6$ | $T_3 = 38{,}3_5 \cdot 10^{-8}$ | |
| Nr. 3 | $B = 5{,}39$ | $D = 0{,}474$ | | $L = 19{,}24$ |
| $P = S$ | $\tau = 75{,}6$ | $75{,}6$ | $T_3 = 38{,}3_0 \cdot 10^{-8}$ | |
| Im Mittel | $T_3 = 38{,}2_4 \cdot 10^{-8}$ | | $T = 2{,}61 \cdot 10^6$. | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| III′. Nr. 1 | $B = 4{,}92$ | $D = 0{,}490_5$ | | $L = 23{,}12$ |
| $P = S$ | $\tau = 58{,}7$ | $58{,}3$ | $T_3' = 23{,}9_5 \cdot 10^{-8}$ | |
| $P = S + 5$ | $\tau = 84{,}1$ | $82{,}5$ | $T_3' = 23{,}7_8 \cdot 10^{-8}$ | |
| Nr. 2 | $B = 5{,}41$ | $D = 0{,}475_5$ | | $L = 16{,}50$ |
| $P = S$ | $\tau = 41{,}3_5$ | $40{,}8$ | $T_3' = 23{,}8_9 \cdot 10^{-8}$ | |
| $P = S + 5$ | $\tau = 58{,}5_5$ | $58{,}2$ | $T_3' = 23{,}6_4 \cdot 10^{-8}$ | |
| Im Mittel | $T_3' = 23{,}8_2 \cdot 10^{-8}$ | | $T_3' = 4{,}20 \cdot 10^6$. | |

Da $T_1$ mit $T_{ab}$, $T_3$ mit $T_{ca}$, $T_3'$ mit $T_{cb}$ identisch ist, so ergeben die vorstehenden Zahlen unmittelbar auch $s_{44}$, $s_{55}$, $s_{66}$,

und die Kombination dieser Resultate mit denen der Biegungsbeobachtungen (8) liefern das folgende vollständige System von Elastizitätsmoduln des Aragonits

$$(9)\quad \begin{cases} s_{11} = 6{,}8_4 \cdot 10^{-8}, & s_{22} = 12{,}8_9 \cdot 10^{-8}, & s_{33} = 11{,}9_7 \cdot 10^{-8}, \\ s_{44} = 23{,}8_2 \cdot 10^{-8}, & s_{55} = 38{,}2_4 \cdot 10^{-8}, & s_{66} = 22{,}9_5 \cdot 10^{-8}, \\ s_{23} = -2{,}3_3 \cdot 10^{-8}, & s_{31} = +0{,}4_2 \cdot 10^{-8}, & s_{12} = -2{,}9_8 \cdot 10^{-8}. \end{cases}$$

Das positive Vorzeichen von $s_{31}$ hat die Bedeutung, daß ein parallel der $X$- oder der $Z$-Achse geschnittener Zylinder sich bei einer Längsdehnung nach der Richtung der $Z$- oder $X$-Achse (quer) nicht kontrahiert, sondern *dilatiert*. Dies Resultat geht den bei Pyrit[1]) und Natriumchlorat[2]) gefundenen einigermaßen parallel; indessen sind *hier* die in den genannten Anordnungen nach der $Y$-Richtung stattfindenden *Kontraktionen* so bedeutend, daß der Gesamtquerschnitt bei Längsdehnung doch *verkleinert* wird.

Das allgemeine Gesetz (5) von T läßt sich, als *zwei* Richtungen enthaltend, nicht durch eine Oberfläche veranschaulichen; dies geht indessen bezüglich des Torsionsmoduls $T^0$ für einen Kreiszylinder, der mit den Richtungskosinus der Zylinderachse durch die Formel verbunden ist:

$$(10)\quad \begin{cases} T^0 = \alpha^2(s_{55} + s_{66}) + \beta^2(s_{66} + s_{44}) + \gamma^2(s_{44} + s_{55}) \\ \quad + 4\beta^2\gamma^2(s_{22} + s_{33} - s_{44} - 2s_{23}) \\ \quad + 4\gamma^2\alpha^2(s_{33} + s_{11} - s_{55} - 2s_{31}) \\ \quad + 4\alpha^2\beta^2(s_{11} + s_{22} - s_{66} - 2s_{12}). \end{cases}$$

Nach den obigen Zahlwerten nimmt dieselbe die Form an:

$$(11)\quad \begin{cases} T^0 = 61{,}2 \cdot \alpha^2 + 46{,}8 \cdot \beta^2 + 62{,}0\gamma^2 \\ \quad + 22{,}8\beta^2\gamma^2 - 81{,}1 \cdot \gamma^2\alpha^2 + 11{,}0\alpha^2\beta^2, \end{cases}$$

oder auch mit (1) konform:

$$(12)\quad \begin{cases} T^0 = 61{,}2\alpha^4 + 46{,}8\beta^4 + 62{,}0\gamma^4 \\ \quad + 131{,}7\beta^2\gamma^2 + 42{,}1\gamma^2\alpha^2 + 119{,}0\alpha^2\beta^2. \end{cases}$$

Die Schnittkurven der $T^0$-Oberfläche mit den Koordinaten—

1) W. Voigt, Wied. Ann. **35**. p. 649. 1888.
2) W. Voigt, l. c. **49**. p. 719. 1893.

ebenen sind in Fig. 2 dargestellt; der Maßstab ist 1/5 desjenigen von Fig. 1.

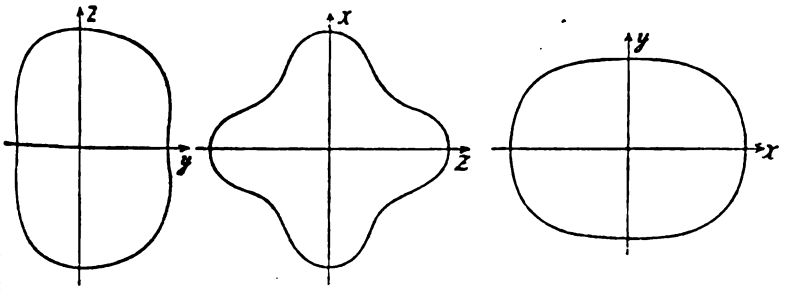



Fig. 2.

*Einige Folgerungen.* Bei allseitig gleichem Druck $p = 1$ g pro mm² kontrahieren sich die Längeneinheiten parallel den Koordinatenachsen um

$$(13) \quad \begin{cases} A_1 = s_{11} + s_{12} + s_{13}, \quad A_2 = s_{21} + s_{22} + s_{23}, \\ A_3 = s_{31} + s_{32} + s_{33}; \end{cases}$$

die Volumeneinheit verkleinert sich um

$$14) \qquad M = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{23} + s_{31} + s_{12}).$$

Bei Aragonit ist

$$(15) \begin{cases} A_1 = 4{,}2_8 \cdot 10^{-8}, \quad A_2 = 7{,}5_8 \cdot 10^{-8}, \quad A_3 = 10{,}0_6 \cdot 10^{-8}, \\ M = 21{,}9_2 \cdot 10^{-8}; \end{cases}$$

die Unterschiede der $A_h$ sind sehr bedeutend, demgemäß werden sich auch die Winkel eines Aragonitkristalles bei allseitig gleichem Druck erheblich ändern.

Die Modulwerte des Aragonits lassen sich mit denen des Kalkspats[1]) nicht direkt vergleichen, da beide Kristalle verschiedenen Systemen angehören; immerhin ist eine Zusammenstellung der oben gegebenen Zahlen mit den für Kalkspat gültigen nicht ganz ohne Interesse. Ich fand für Kalkspat

$$\begin{aligned} s_{11} &= 11{,}14 \cdot 10^{-8} = s_{22}, \quad s_{33} = 17{,}13 \cdot 10^{-8}, \\ s_{44} &= 39{,}52 \cdot 10^{-8} = s_{55}, \quad s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}) = 49{,}62 \cdot 10^{-8}, \\ s_{23} &= -4{,}24 \cdot 10^{-8} = s_{31}, \quad s_{12} = -3{,}67 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1889, Nr. 19; Wied. Ann. 39. p. 412. 1890.

Natürlich ist es zunächst willkürlich, irgendwelche Koordinatenachsen beider Körper in Beziehung zueinander zu setzen; doch kann man nach der Größenfolge der Moduln beiläufig $X, Y, Z$ bei Kalkspat dem $X, Z, Y$ bei Aragonit zuordnen. Es sind dann alle Moduln bei Kalkspat etwas größer, als die entsprechenden bei Aragonit; Kalkspat hat also kleinere elastische Widerstände, als Aragonit, was einigermaßen überraschend wirkt, da Kalkspat als die bei gewöhnlicher Temperatur *stabile* Modifikation gilt. Mit dem kleineren elastischen Widerstand besitzt Kalkspat übrigens auch das kleinere spezifische Gewicht; für ihn wird 2,714, für Aragonit 2,936 als normaler Wert betrachtet. Auch die Härte ist bei Aragonit etwas größer als bei Kalkspat.

Eine theoretische Verwertung der Modulzahlen beider Kristalle setzt vor allen Dingen die Kenntnis des physikalischen Zusammenhanges der Richtungen in beiden Kristallen voraus, bzw. — was auf dasselbe hinauskommt — diejenige des Mechanismus der Umwandlung der einen Modifikation in die andere, — ähnlich wie man die geometrischen Verhältnisse bei den Schiebungen nach Gleitflächen kennt. Vorläufig weiß man darüber, soweit mir bekannt, nichts. Daß sich aber, wie oben beiläufig angenommen ist, in Wirklichkeit die Koordinatenachsen in beiden Kristallen einander physikalisch entsprächen, darf als ausgeschlossen betrachtet werden. Der nächstliegende Zusammenhang, auf den die Gegenüberstellung eines rhombischen und eines rhomboedrischen Raumgitters hinweist, ist offenbar der, daß die Kanten des einen zu Kanten des anderen werden.

Für die *Elastizitätskonstanten* eines rhombischen Kristalles gelten folgende Formeln, wobei

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = \sigma$$

gesetzt ist:

$$(16)\quad \begin{cases} c_{11} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}, & c_{22} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{33} & s_{31} \\ s_{13} & s_{11} \end{vmatrix}, & c_{33} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}, \\ c_{23} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{11} & s_{12} \end{vmatrix}, & c_{31} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{vmatrix}, & c_{12} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} s_{23} & s_{21} \\ s_{33} & s_{31} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

$$c_{44} = 1/s_{44}, \quad c_{55} = 1/s_{55}, \quad c_{66} = 1/s_{66}.$$

Hieraus folgen für Aragonit die folgenden Konstantenwerte

$$(17)\quad \begin{cases} c_{11} = 16{,}3\ .10^6, & c_{22} = 8{,}9\ .10^6, & c_{33} = 8{,}6_5 . 10^6, \\ c_{44} = 4{,}3_6 . 10^6, & c_{55} = 2{,}6_1 . 10^6, & c_{66} = 4{,}2_0 . 10^6, \\ c_{23} = 1{,}6_0 . 10^6, & c_{31} = 0{,}1_7 . 10^6, & c_{12} = 3{,}8_0 . 10^6. \end{cases}$$

Die sogenannte Poissonsche Relation, die aus der Annahme fließt, daß zwischen den Molekülen Zentralkräfte wirken, die nur Funktionen der Entfernung sind, verlangt, daß

$$c_{44} = c_{23}, \quad c_{55} = c_{31}, \quad c_{66} = c_{12}$$

ist; ihre Nichterfüllung zeigt, daß auch bei Aragonit die Moleküle stark *polare* Kräfte aufeinander ausüben.

Alle $c_{23}$, $c_{31}$, $c_{12}$ sind positiv, trotz des positiven $s_{31}$; das elastische Verhalten des Aragonits erscheint also als völlig normal, wenn schon die außerordentliche Kleinheit von $c_{31}$ auffallend ist. —

Einige weitere Resultate ergeben sich aus der Kombination der vorstehenden Konstantenwerte mit den von Fizeau für Aragonit erhaltenen Größen der thermischen Dilatationskoeffizienten parallel den Hauptachsen, welche bei 20° C. lauten

$$a_1 = 10{,}0 . 10^{-6}, \quad a_2 = 16{,}4 . 10^{-6}, \quad a_3 = 34{,}0 . 10^{-6}.$$

Aus ihnen bestimmen sich nämlich die Drucke $q_1$, $q_2$, $q_3$, welche auf 1 mm² normal zu den Hauptachsen normal ausgeübt werden müssen, um die bei einer Temperatursteigerung um 1° C. eintretenden Dilatationen aufzuheben, gemäß den Formeln

$$q_1 = a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + a_3 c_{13}, \quad q_2 = a_1 c_{21} + a_2 c_{22} + a_3 c_{23},$$
$$q_3 = a_1 c_{31} + a_2 c_{32} + a_3 c_{33}.$$

Die Berechnung liefert für Aragonit

$$q_1 = 231, \quad q_2 = 239, \quad q_3 = 222 \text{ g pro mm}^2,$$

d. h. also bzw. 23,1, 23,9 und 22,2 Atm. Die Zahlen liegen den für Topas geltenden sehr nahe und übersteigen weit die Kalkspat zugehörigen $q_1 = q_2 = 20$, $q_3 = 163$. Sehr bemerkenswert ist, daß sie (im Gegensatz zu dem bei Kalkspat geltenden) sich sehr wenig voneinander unterscheiden; es läßt sich also bei Aragonit die thermische Deformation sehr vollständig durch einen allseitig gleichen Druck kompensieren.

Schließlich sei noch daran erinnert, daß die vorstehenden Zahlen auch die adiabatischen Elastizitätskonstanten $\gamma_{hk}$ und -moduln $\sigma_{hk}$ zu berechnen gestatten; für diese gilt nämlich, wenn $\Theta$ die absolute Temperatur, $A$ das mechanische Wärmeäquivalent, $\varepsilon$ die Dichte, $c$ die (gewöhnliche) spezifische Wärme des Kristalles bedeutet,

$$\gamma_{hk} = c_{hk} + \frac{q_h q_k \Theta}{A \varepsilon c}, \quad \sigma_{hk} = s_{hk} - \frac{a_h a_k \Theta}{A \varepsilon c}.$$

Zugleich bestimmt sich die Differenz der spezifischen Wärmen bei konstanten Spannungen und bei konstanten Deformationen zu

$$c_p - c_d = \frac{\Theta}{A \varepsilon} \Sigma q_h a_h.$$

Die Angabe der für Aragonit hieraus folgenden Zahlen mag indessen unterbleiben.

Göttingen, im März 1907.

(Eingegangen 30. September 1907.)

## 6. *Über die absolute Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Grund der Alkalimetallspektren, über die Strahlung der Hefnerlampe und des Osmiums;* von *F. Leder.*

(Auszug aus der gleichnamigen Kieler Dissertation.[1])

Schon Kirchhoff und Bunsen[2]) haben bemerkt, daß die Spektren der Alkalien außer den hellen Linien auch kontinuierliches Licht von oft nicht unbeträchtlicher Helligkeit aufweisen; doch hat das größere Interesse an den Linien lange Zeit die genauere Untersuchung dieses Lichtes zurückgehalten. Hr. Lecoq de Boisbaudran[3]) stellt zuerst sorgfältig in Zeichnung und Beschreibung die Helligkeitsverteilung in den Bunsenflammenspektren von K-, Rb- und Cs-Salzen dar, wie sie direkt dem Auge erscheinen. Hr. Gouy[4]) vergleicht später photometrisch die kontinuierliche Helligkeitsverteilung in den Spektren einer Kochsalzflamme und einer leuchtenden Gasflamme. Weit ins Ultraviolett reichende photographische Darstellungen der Bunsenflammenspektren der Alkalimetalle, die allerdings durch die spektrale Empfindlichkeitsverteilung der benutzten Plattensorten wesentlich modifiziert sind, finden sich bei Eder und Valenta[5]) und Konen und Hagenbach.[6])

Das gesamte kontinuierliche Spektrum der Alkalimetalle ist nach diesen Beobachtungen, wie schon von Gouy hervorgehoben wird, aufzufassen als eine Übereinanderlagerung zweier

1) Der philosophischen Fakultät vorgelegt am 2. August 1907.

2) G. Kirchhoff u. R. Bunsen, Pogg. Ann. **110.** p. 161. 1860 und **113.** p. 337. 1861.

3) Lecoq de Boisbaudran, „Spectres Lumineux". Paris 1874.

4) M. Gouy, Ann. de Chim. et Phys. (5) **18.** p. 1. 1879.

5) J. M. Eder u. E. Valenta, Beiträge zur Photochemie u. Spektralanalyse. Wien 1904. Im Kommissionsverlag bei Knapp, Halle a. S.

6) A. Hagenbach u. H. Konen, Atlas der Emissionszentren der meisten Elemente. G. Fischer, Jena 1905. Tafel I u. II.

verschiedener Teile, der spektralen Höfe der Hauptserienlinien und eines mit diesen Höfen und Linien in keinem unmittelbaren Zusammenhang stehenden Restes des kontinuierlichen Spektrums, das speziell als kontinuierlicher Grund bezeichnet werden soll. Daß auch dieser zusammen mit den Spektrallinien als charakteristisch für das betreffende Metall anzusehen ist, wird durch diese Untersuchungen wahrscheinlich gemacht, wenn sie auch keinen endgültigen Beweis hierfür geben.

Als Resultat besonderer hierauf bezüglicher Beobachtungen von Hrn. Lenard[1]) findet sich, daß jedem Metall eine besondere Helligkeitsverteilung des kontinuierlichen Grundes entspricht, die von der Säure des eingeführten Salzes selbst unabhängig und ebensowenig einem gemeinsamen Bestandteil aller Salzflammen zuzuschreiben ist. Die weitere Tatsache, daß das Auftreten des kontinuierlichen Grundes an dieselben Flammenteile gebunden ist, wie dasjenige der Nebenserien, und daß bei denjenigen Alkalien — Rb und Cs —, welchen ein verstärktes Auftreten der Nebenserienlinien im inneren Flammenmantel eigen ist, auch verstärktes Auftreten des Grundes daselbst konstatiert wird, deutet auf einen inneren Zusammenhang zwischen den beiden genannten Emissionen hin. Es wird dies noch besonders wahrscheinlich gemacht durch Beobachtungen elektrischer Art, welche für beide — Grund und Nebenserien — die gleichen Emissionszentren — nämlich positiv geladene Metallatome — nachweisen. Dies gestattet, zusammen mit der spektralen Verteilung des Grundes bei allen fünf Alkalien, den Grund als das Resultat starker Verbreiterung und Hofbildung der Nebenserienlinien aufzufassen.

Diesen Zusammenhang möglichst genau quantitativ zu prüfen durch photometrische Ausmessung des Intensitätsverlaufes des kontinuierlichen Grundes im gesamten sichtbaren Spektrum und besonders in der Umgebung der Nebenserienlinien, war die Absicht der vorliegenden Arbeit. Der Zusammenhang findet sich, soweit im sichtbaren Gebiet zu urteilen ist, bestätigt. Die Arbeit behält jedoch auch un-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 9. p. 642. 1902; 11. p. 649. 1903; 17. p. 197. 1905. (Im weiteren als l. c. 02. bzw. 03 ... 05 zitiert.)

abhängig hiervon ihren Wert als erste quantitative Durchmessung der genannten Spektren.

Daneben ließ die notwendig gewordene Vergleichung der Strahlung einer aus praktischen Gründen als erstes Vergleichslicht für die Ausmessung des Grundes benutzten Osmiumlampe mit der Strahlung des schwarzen Körpers einige neue Kenntnis über die Strahlung des Osmiums im allgemeinen gewinnen.

Besondere, an der Hefnerlampe ausgeführte photometrische Strahlungsmessungen schließlich lieferten eine gute Bestätigung der von K. Ångström gemachten Angaben.

### Methode der Untersuchung.

Zur Ausmessung der spektralen Helligkeitsverteilung des kontinuierlichen Grundes diente ein von Hilger (London) nach dem von Hüfner[1]) angegebenen Prinzip gebautes Spektrophotometer. Als erstes Vergleichslicht wurde eine mit konstant gehaltener Spannung von 36 Volt brennende Osmiumlampe benutzt, deren Strahlung mit Hilfe eines die eine Spalthälfte bedeckenden totalreflektierenden Prismas in den Apparat gespiegelt wurde. Die Intensität dieses durch ein vor dem Spalt befindliches Nicolsches Prisma polarisierten Lichtes war durch ein zweites im Beobachtungsfernrohr angebrachtes drehbares Polarisationsprisma in beliebiger, genau meßbarer Weise veränderlich. Die spektrale Zerlegung geschah durch ein vierseitiges Hilgersches Prisma, das durch Drehung um eine Vertikalachse mit Hilfe einer Mikrometerschraube mit Trommelteilung jede beliebige, an der geeichten Teilung direkt ablesbare Wellenlänge unter dem Minimum der Ablenkung in einen Okularspalt des Beobachtungsfernrohrs einzustellen gestattete. Die Dispersion des Prismas ließ die $D$-Linien noch deutlich getrennt erscheinen.

Untersucht wurde der kontinuierliche Grund der leuchtenden Dämpfe des Natriums, Kaliums, Rubidiums und Cäsiums, die durch Einführung geeigneter Salze dieser Metalle in die Bunsenflamme erhalten wurden. Zur Erreichung möglichster Intensität des Grundes wurden die Salze in ein oder zwei

1) Hüfner, Zeitschr. f. physik. Chemie 3. p. 562. 1889.

länglichen Platinschiffchen von der breiten Seite her in den äußeren Flammenmantel gebracht, der durch einen auf den Brenner aufgesteckten Aufsatz mit spaltförmiger, 44 mm langen und 2,5 mm weiten Öffnung flach geformt war und mit seiner Längsrichtung in der Achse des Kollimatorrohres stand.[1] Durch den unmittelbar vor dem Spalt befindlichen Hüfnerschen Glaskörper wurde es ermöglicht, daß beide Spektren mit scharfer Kante ohne dunkle Trennungslinie aneinanderstießen und der Vergleichung ihrer beiden Intensitäten daher keinerlei Schwierigkeit entgegenstand.

Die Genauigkeit dieser Intensitätsvergleichung hängt von der Erfüllung der Forderung ab, daß einerseits einer kleinen Winkeländerung des analysierenden Prismas eine relativ möglichst kleine Intensitätsänderung entspreche, daß andererseits aber auch diese kleine Winkel- bzw. Intensitätsänderung vom Auge möglichst deutlich wahrgenommen werde. Das erstere ist bei sehr kleinen, das andere bei sehr großen Winkeln der Fall — die Winkel immer von der Parallelstellung beider Nicols aus gerechnet —, während bei mittleren Winkellagen beiden Forderungen gleich gut genügt wird, und die Meßgenauigkeit hier infolgedessen ein Optimum hat.

Zur Erreichung derartiger Winkellagen im ganzen Gebiet des auszumessenden Spektrums wurde das Vergleichslicht durch rotierende Sektoren in passender und zugleich meßbarer Weise, wo nötig, geschwächt.

Eine weitere Bedingung für genaue Messung war die Konstanz der Lichtquellen. Für die Osmiumlampe war diese durch Spannungskontrolle leicht zu erreichen. Bei den salzhaltigen Flammen dagegen mußte das Meßergebnis durch geeignete Beobachtungsweise von der unvermeidlichen zeitlichen Intensitätsabnahme der Metalldampfemission infolge der allmählichen Verdampfung des Salzes unabhängig gemacht werden.

Es wurden zunächst mit einer ersten Beschickung der Platinschiffchen etwa drei herausgewählte Spektralstellen (Fig. 1) *a*, *b*, *c* der Reihe nach mehrmals hin und zurück photometriert und dann unter Zugrundelegung eines Intensitätswertes — etwa *a* — die anderen Intensitäten mit Hilfe der Mittelwerte ihrer Ver-

1) Das Licht der glühenden Schiffchen war natürlich abgeblendet.

hältniszahlen angeschlossen. Darauf wurde mit einer zweiten Beschickung eine der soeben gewählten Spektralstellen — etwa *c* — zusammen mit einigen neu herausgesuchten — *d* und *e* — in gleicher Weise kombiniert und durch Benutzung des Verhältnisses der beiden für *c* gefundenen Intensitätswerte an die erste Gruppe angeschlossen. Durch diese Beobachtungsweise, für welche die Dissertation nähere Beispiele gibt, war die gesamte relative Intensitätsverteilung des kon-

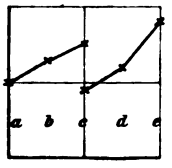


Fig. 1.

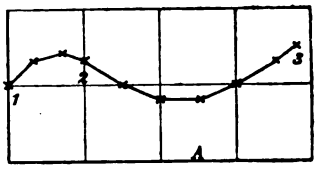


Fig. 2.

tinuierlichen Grundes, unabhängig von etwaigen Variationen der Flammenhelligkeit, zu gewinnen.

Infolge großer Häufung der notwendigen Anschlüsse konnte dabei allerdings die Lage der entfernteren Teile ungenau werden. Es wurden deshalb in einer zweiten unabhängigen Versuchsreihe mehrere der vorher indirekt angeschlossenen, entfernter liegenden Spektralstellen 1, 2, 3 (Fig. 2) durch direkten photometrischen Vergleich mit einem geeignet gewählten Fixpunkte, etwa *A*, verbunden. Die Abschwächung des Vergleichslichtes durch Sektoren konnte bei den einzelnen Versuchsreihen und auch für Punkte innerhalb derselben Reihe eine verschiedene sein; sie ließ sich immer durch Benutzung des bekannten Sektorenverhältnisses in Rechnung ziehen.

Für jedes der untersuchten Alkalimetalle wurde in der soeben beschriebenen Weise eine größere Zahl unabhängiger Versuchsreihen ausgeführt und die so für jede Spektralstelle gewonnenen Einzelwerte der Intensität mit Benutzung ihrer in der üblichen Weise berechneten Gewichte zu einem Mittelwert vereinigt. Das Kontinuum aller dieser Mittelwerte stellt dann den endgültigen relativen Intensitätsverlauf im ausgemessenen Spektrum dar, die Intensitäten zunächst immer bezogen auf die Helligkeitsverteilung im Spektrum der benutzten Vergleichslampe. In der Kolumne $\frac{J_{\text{Alkali}}}{J_{\text{Osmium}}}$ der folgen-

den Tab. 1 Na bis Tab. 4 Cs sind diese relativen Werte verzeichnet.

Mit Berücksichtigung der im folgenden mitzuteilenden absoluten Helligkeitsverteilung im Spektrum dieser Vergleichslampe lassen sich schließlich alle relativen Angaben für die kontinuierlichen Gründe in absolutem Maße ausdrücken.

Dem in der Einleitung Erwähnten entsprechend waren für die photometrische Ausmessung neben dem allgemeinen Verlauf der Helligkeitsverteilung und der Ausbildung der Höfe um die Hauptserienlinien besonders die in der Nähe der Nebenserienlinien und ihrer Grenze[1]) im Spektrum liegenden Gebiete von Interesse.

Es mußte vermieden werden, in eine Linie selbst hinein zu messen [wie es zuweilen den Anschein hat, da bei der gewählten Verkleinerung die Metallinien zu breit gezeichnet sind], weil nicht vorauszusehen war, in welcher Weise ihre Intensität sich im Verhältnis zu der des Grundes mit der Helligkeit der Flamme ändere. Um aber eine eventuelle Hofbildung der Nebenserienlinien aufzufinden, mußte möglichst in ihrer unmittelbaren Nähe und mit tunlichst engem, nur etwa 1—3 $\mu\mu$ — je nach der Dispersion und Helligkeit — ausblendenden Okularspalt gemessen werden.

### Absolute Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Grund der Alkalimetallspektren.

Das Ergebnis aller Messungen sei für jedes der untersuchten Alkalien im folgenden getrennt verzeichnet.

#### a) Natrium.

Als Salz wurde das Bromid verwendet, das leicht flüchtig und sehr rein von fremden Beimengungen ist.[2]) Die Helligkeit des erhaltenen Spektrums war sehr befriedigend, so daß die gelbe Gruppe bei $\lambda = 568$ $\mu\mu$ deutlich als eine unscharfe Linie zu erkennen war. Dieselbe scheint in der Natriumflamme des Bunsenbrenners bisher noch nicht bemerkt worden zu sein; in der Leuchtgas–Sauerstofflamme ist sie durch Konen und Hagenbach photographiert worden.

1) Nach den Angaben von H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 2. p. 520ff. 1902.

2) P. Lenard, l. c. 05. p. 202.

Tabelle 1. Na.

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | Proz. Genauigkeit | $\frac{J_{Na}+J_{Bunsenfl.}}{J_{Osmium}}$ | $\frac{J_{Bunsenfl.}}{J_{Osmium}}$ | $\frac{J_{Na}}{J_{Os}}$ | $J_{Os}$ abs. | $J_{Na}$ abs. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 650 | 2,88 | 0,006403 | — | 0,006403 | 935,0 | 5,99 |
| 640 | 0,71 | 0,007311 | — | 0,007311 | 857,5 | 6,27 |
| 630 | 1,27 | 0,009562 | — | 0,009562 | 792,4 | 7,58 |
| 620 | 1,42 | 0,013911 | — | 0,013911 | 728,0 | 10,13 |
| 610 | 0,75 | 0,022361 | — | 0,022361 | 665,2 | 14,87 |
| 592,8 | 5,91 | 0,141761 | — | 0,141761 | 563,4 | 79,87 |
| 587,8 | 2,36 | 0,120400 | — | 0,120400 | 534,7 | 64,38 |
| 585,8 | 3,04 | 0,074102 | — | 0,074102 | 523,5 | 38,79 |
| 580 | 1,10 | 0,033090 | — | 0,033090 | 492,0 | 16,28 |
| 578 | 1,03 | 0,019446 | — | 0,019446 | 454,6 | 8,84 |
| 571,5 | 1,42 | 0,019612 | — | 0,019612 | 447,2 | 8,77 |
| 570 | 1,69 | 0,017399 | — | 0,017399 | 437,5 | 7,61 |
| 565 | 1,02 | 0,015859 | — | 0,015859 | 414,0 | 6,57 |
| 568 | 1,83 | 0,014379 | — | 0,014379 | 403,8 | 5,81 |
| 560 | 2,09 | 0,012695 | — | 0,012695 | 388,0 | 4,93 |
| 558 | 1,14 | 0,012266 | — | 0,012266 | 379,2 | 4,65 |
| 556 | 2,15 | 0,012244 | — | 0,012244 | 369,0 | 4,52 |
| 555 | 1,12 | 0,011812 | — | 0,011812 | 364,5 | 4,31 |
| 554 | 1,73 | 0,012315 | — | 0,012315 | 359,5 | 4,42 |
| 551 | 1,70 | 0,012575 | — | 0,012575 | 345,0 | 4,34 |
| 550 | 1,35 | 0,011459 | — | 0,011459 | 339,8 | 3,89 |
| 549 | 1,83 | 0,011427 | — | 0,011427 | 335,4 | 3,83 |
| 546 | 2,20 | 0,011179 | — | 0,011179 | 321,4 | 3,59 |
| 540 | 1,65 | 0,010627 | 0,000005 | 0,010622 | 297,0 | 3,16 |
| 530 | 1,83 | 0,009317 | 0,000040 | 0,009277 | 259,0 | 2,40 |
| 520 | 2,71 | 0,009528 | 0,000120 | 0,009408 | 224,3 | 2,11 |
| 508 | 2,19 | 0,010336 | 0,000325 | 0,010011 | 189,0 | 1,89 |
| 500 | 2,28 | 0,011604 | 0,000503 | 0,011101 | 167,1 | 1,86 |
| 485 | 2,41 | 0,016817 | 0,000925 | 0,015892 | 128,8 | 2,05 |
| (480) | 5,29 | 0,015182 | 0,001060 | 0,014122 | 118,3 | (1,67) |
| 470 | 1,95 | 0,023593 | 0,001360 | 0,022233 | 98,5 | 2,19 |

Der ermittelte absolute Intensitätsverlauf ist in der Tab. 1 zahlenmäßig gegeben und in Fig. 3 graphisch dargestellt; die letztere enthält gleichzeitig sämtliche im betrachteten Gebiet bekannten Metallinien nach den Angaben von Saunders.[1])

1) F. A. Saunders, Astrophys. Journ. **20.** p. 188. 1904.

Die der reinen Bunsenflamme angehörige Intensitätsverteilung, wie sie die Kolumne 4 $\left(\frac{J_{\text{Bunsen}}}{J_{\text{Osmium}}}\right)$ der Tab. 1 enthält, war in Abzug zu bringen.

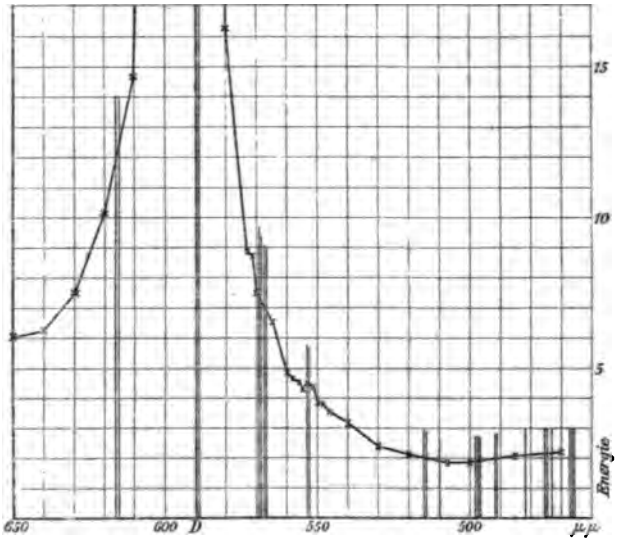



Fig. 8. Natrium.

Im Spektrum des Natriums ist der Hof der *D*-Linien bei weitem vorherrschend, wie bereits bei Hrn. Lenard[1]) hervorgehoben. Nach der Seite des Grün zu ist der Intensitätsabfall desselben so stark, daß eine Hofbildung bei der sichtbaren Nebenseriengruppe 568 für das Auge hierdurch offenbar verdeckt worden ist. Eine solche Hofbildung ist deutlich merkbar bei dem Linienpaar 553, und auch der merkliche Anstieg des Grundes nach dem Gebiet großer Häufung der Nebenserienlinien gegen die Grenze derselben zu weist auf einen deutlichen Zusammenhang zwischen Grund und Nebenserien hin, da der Anstieg jedenfalls nicht einer schon hier merklichen Hofbildung des zweiten Hauptlinienpaares bei 330 $\mu\mu$ zugeschrieben werden kann.

Die beobachtete unsymmetrische Ausbildung des Hofes

1) P. Lenard, l. c. 05. p. 209 und p. 211.

der $D$-Linien würde der schon von H. Ebert[1]) konstatierten unsymmetrischen Verbreiterung der $D_1$-Linie nach Rot hin entsprechen.

b) Kalium.

Zur Verwendung kam das sehr flüchtige und reine Jodid. Zu sehen waren im Spektrum außer den roten und violetten Hauptserienlinien die gelbe Gruppe bei 580 $\mu\mu$, die nächste grüne Gruppe 534 und zuweilen diejenige bei 510 $\mu\mu$; ferner trat stets das rote Band bei 692 auf. Alle diese Linien sind auch von Lecoq in der Bunsenflamme direkt gesehen und von Eder und Valenta photographiert[2]) worden, während Konen und Hagenbach nur die Hauptserienlinien gesehen zu haben scheinen.[3])

Als deutliche Verunreinigung traten nur die Natriumlinien auf, deren Einfluß auf den kontinuierlichen Grund merkbar ist. Den Verlauf des letzteren im absoluten Maße gibt die nachstehende Tab. 2 und Fig. 4.

Tabelle 2. K.

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | Proz. | $\frac{J_K}{J_{Os}}$ | $J_K$ abs. | $\lambda$ in $\mu\mu$ | Proz. | $\frac{J_K}{J_{Os}}$ | $J_K$ abs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 630 | 4,7 | 0,00853 | 6,76 | 536,5 | 1,4 | 0,02270 | 6,45 |
| 620 | 2,7 | 0,00965 | 7,03 | 531 | 1,5 | 0,02322 | 6,11 |
| 610 | 1,5 | 0,01171 | 7,79 | 530 | 1,6 | 0,02260 | 5,85 |
| 600 | 2,2 | 0,01301 | 7,87 | 529 | 1,8 | 0,02265 | 5,78 |
| 587 | 1,5 | 0,01745 | 9,28 | 528 | 1,9 | 0,02197 | 5,47 |
| 585,5 | 1,6 | 0,01333 | 6,95 | 520 | 2,4 | 0,02298 | 5,15 |
| 584 | 1,6 | 0,01312 | 6,73 | 505 | 4,0 | 0,02802 | 5,04 |
| 576 | 2,3 | 0,01558 | 7,32 | 500 | 2,8 | 0,03152 | 5,27 |
| 574 | 0,6 | 0,01554 | 6,67 | 491 | 3,8 | 0,03949 | 5,62 |
| 572 | 1,5 | 0,01548 | 6,94 | 480 | 2,5 | 0,06343 | 7,50 |
| 570 | 2,6 | 0,01614 | 7,06 | 470 | 3,7 | 0,08338 | 8,21 |
| 560 | 1,4 | 0,01637 | 6,37 | 460 | 3,7 | 0,11801 | 9,51 |
| 550 | 1,3 | 0,02072 | 7,04 | 450 | 2,6 | 0,15170 | 10,08 |
| 540 | 1,4 | 0,02110 | 6,27 | 440 | 3,7 | 0,20058 | 10,85 |
| 538 | 1,5 | 0,02173 | 6,37 | 430 | 3,0 | 0,26089 | 11,73 |

1) H. Ebert, Wied. Ann. 34. p. 72 ff. 1888; vgl. auch H. Kayser, l. c. II. p. 298.

2) J. M. Eder u. E. Valenta, l. c. p. 90.

3) A. Hagenbach u. H. Konen, l. c. p. 16.

Der der photometrischen Ausmessung gut zugängliche Teil des kontinuierlichen Grundes enthält keine Hauptserienlinien des Kaliums, und es war deshalb hier die Ausmessung der Umgebung der Nebenserienlinien besonders vorteilhaft. Es macht sich zunächst auch hier ein schwacher Hof der als Verunreinigung auftretenden *D*-Linien des Natriums und ein deutlicher Einfluß der Nebenseriengruppe $\lambda = 568$ des Natriums auf die Intensität des Grundes, der, wie beim Natrium schon erwähnt, dort, weil offenbar verdeckt, nicht beobachtet wurde, merkbar, obwohl die Liniengruppe selbst hier nicht direkt zu sehen ist.

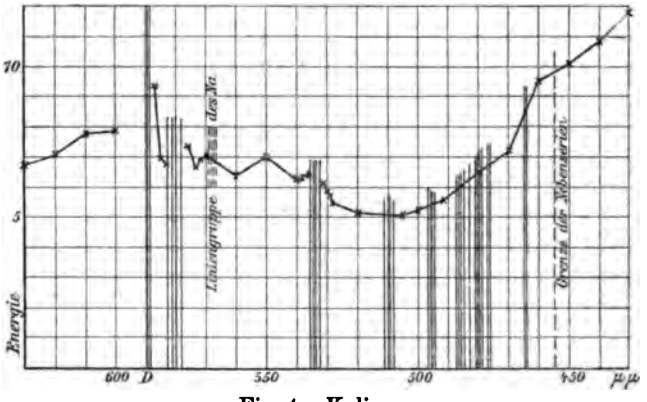



Fig. 4. Kalium.

Der Zusammenhang der Nebenserienlinien des Kaliums mit dessen kontinuierlichem Grund geht hier deutlich hervor aus den Messungen in der Umgebung der Liniengruppen bei $\lambda = 580$ und 535. Der starke Anstieg der Intensität gegen das kurzwellige Ende des sichtbaren Spektrums ist offenbar ebenfalls dem Einfluß der gegen die Grenze der Nebenserien sich häufenden Linien zuzuschreiben, während der weitere Anstieg als Anfang einer Hofbildung der violetten Hauptlinien bei 404 $\mu\mu$ aufzufassen ist, der beispielsweise in den Photographien von Eder und Valenta deutlich auftritt.

### c) Rubidium.

Am geeignetsten erwies sich das Fluorid, welches von Merck in Darmstadt in hervorragender Reinheit geliefert wurde;

als Verunreinigung zeigten sich nur die $D$-Linien und, wenn auch nicht besonders stark, so doch deutlich merkbar, $I_{n=5}$ des Cäsiums bei $\lambda = 672$.

An Linien des Rubidiums wurden gesehen: $\lambda = 795$; 780; 775*; 762*; 630; 621; 616; 607; 572; 565; 558*; 543, teilweise mehr, als von Lecoq beobachtet, was auf gute Helligkeit des Spektrums schließen läßt. Die mit * bezeichneten scheinen von anderen Beobachtern in der Bunsenflamme noch nicht gesehen worden zu sein. Tab. 3 und Fig. 5 geben wieder den Verlauf des Rubidiumgrundes.

Tabelle 3. Rb.

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | Proz. | $\frac{J_{Rb}}{J_{Os}}$ | $J_{Rb}$ | $\lambda$ in $\mu\mu$ | Proz. | $\frac{J_{Rb}}{J_{Os}}$ | $J_{Rb}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 651,1 | 3,8 | 0,005309 | 4,95 | 550 | 1,0 | 0,019705 | 6,70 |
| 641 | 2,2 | 0,005761 | 4,95 | 529 | 1,4 | 0,027654 | 7,05 |
| 626,7 | 1,9 | 0,007171 | 5,49 | 510,5 | 2,1 | 0,035540 | 6,91 |
| 611,5 | 1,8 | 0,008951 | 6,29 | 500 | 2,5 | 0,044193 | 7,39 |
| 606 | 1,3 | 0,007934 | 5,08 | 480 | 1,8 | 0,065793 | 7,78 |
| 603,5 | 1,6 | 0,009252 | 5,77 | 475 | 1,6 | 0,075490 | 8,14 |
| 601,8 | 1,8 | 0,009617 | 5,92 | 470 | 2,6 | 0,083156 | 8,19 |
| 578 | 2,3 | 0,013920 | 6,70 | 465 | 2,4 | 0,10046 | 8,94 |
| 576 | 3,2 | 0,014167 | 6,65 | 460 | 3,5 | 0,11252 | 9,08 |
| 574 | 3,9 | 0,017574 | 8,07 | 450 | 2,5 | 0,17179 | 11,41 |
| 570,4 | 1,8 | 0,015345 | 6,77 | 440 | 3,6 | 0,20118 | 11,04 |
| 568,8 | 1,7 | 0,015424 | 6,69 | 430 | 7,2 | 0,25087 | 11,28 |
| 566,9 | 1,8 | 0,018051 | 7,62 | 423,7 | 3,1 | 0,37041 | 14,89 |
| 557,7 | 1,7 | 0,016893 | 6,38 | 418,2 | 5,1 | 0,45700 | 16,45 |
| 556,6 | 1,3 | 0,017287 | 6,43 | | | | |

Die Intensität des kontinuierlichen Grundes steigt hier ständig von Rot nach dem violetten Ende zu. Der Anstieg von 650 bis 610 ist jedenfalls auf die kräftigen dort liegenden Nebenserienlinien zurückzuführen, da, wie aus dem Abfall zwischen 600 und 606 hervorgeht, der Hof der $D$-Linien offenbar dort keinen Einfluß mehr hat. Die unsymmetrische Verteilung der Intensität zu beiden Seiten der Linie 607, die in ähnlicher Weise bei der Linie 573 auftritt, dürfte vielleicht einer nach Rot stärker ausgeprägten und daher unsymmetrischen

Verbreiterung der betreffenden Linien mit wachsender Dampfmenge, wie dies für zahlreiche Linien[1]) bekannt ist, zurückzuführen sein. Eine direkte Verbreiterungserscheinung in der unmittelbaren Nähe der roten Nebenserienlinien war wegen der für das Auge noch sehr geringen Intensität des Grundes allerdings nicht vorteilhaft feststellbar. Deutlich wird der

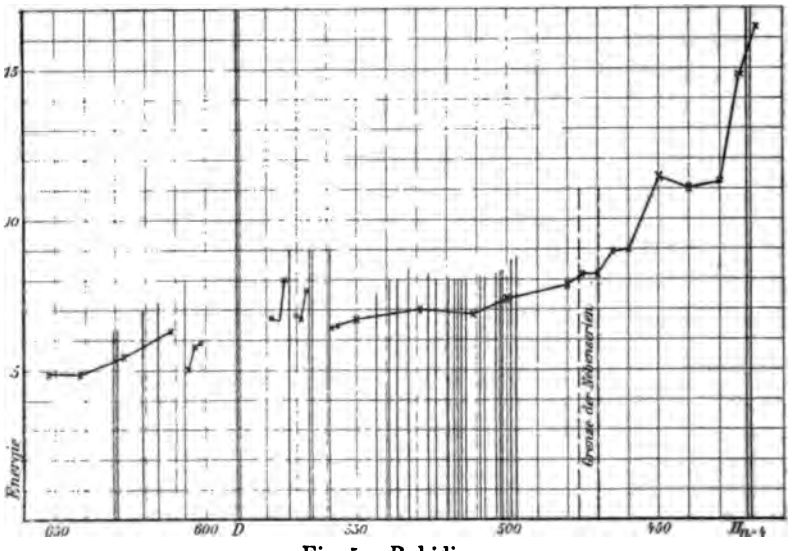



Fig. 5. Rubidium.

Einfluß der Nebenserienlinien in der Umgebung der Linie 573, und auch der allgemeine Anstieg gegen das Ende der Nebenserien ist in seinem ersten Verlauf zweifellos auf Häufung dieser Linien zurückzuführen, während weiter im Violett der deutliche Hof des Paares $H_{n=4}$ auftritt.

### d) Cäsium.

Das benutzte Cäsiumbromid zeigte außer der *D*-Linie keine merkliche Verunreinigung. Gesehen wurden außer den Hauptlinienpaaren 895 und 460 noch die Linien bei 697, 672, 636, 521, 601, 584,5, 566, 564 und 557, die auch von Lecoq in der Bunsenflamme beobachtet worden sind. Den Verlauf des kontinuierlichen Grundes geben Tab. 4 und Fig. 6.

1) H. Kayser, l. c. 2. p. 296.

Tabelle 4. Cs.

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | Proz. | $\frac{J_{Cs}}{J_{Os}}$ | $J_{Cs}$ abs | $\lambda$ in $\mu\mu$ | Proz. | $\frac{J_{Cs}}{J_{Os}}$ | $J_{Cs}$ abs. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 653 | 2,3 | 0,00602 | 5.70 | 553,5 | 2,1 | 0,01253 | 4,47 |
| 639,5 | 2,1 | 0,00717 | 6,11 | 526 | 2,9 | 0,02117 | 5,17 |
| 627 | 1,7 | 0,00691 | 5,34 | 510 | 10,0 | 0,03143 | 6,11 |
| 625,5 | 3,6 | 0,00776 | 5,92 | 505 | 3,3 | 0,03535 | 6,36 |
| 620,3 | 4,1 | 0,00726 | 5,29 | 500 | 2,0 | 0,04039 | 6,75 |
| 612 | 2,7 | 0,00816 | 5,52 | 496 | 3,1 | 0,04569 | 6,50 |
| 605,4 | 5,2 | 0,00900 | 6,49 | 490 | 1,5 | 0,04722 | 6,63 |
| 577,5 | 1,6 | 0,01048 | 5,02 | 480 | 1,1 | 0,04895 | 5,82 |
| 572,5 | 1,3 | 0,01085 | 4,91 | 470 | 4,4 | 0,08989 | 8,85 |
| 570 | 2,6 | 0,01037 | 4,53 | 450 | 2,2 | 0,14380 | 9,55 |
| 568,5 | 2,4 | 0,01366 | 5,89 | 440 | 2,9 | 0,16772 | 9,07 |
| 562 | 2,6 | 0,01112 | 4,43 | 430 | 9,9 | 0,23282 | 10,46 |
| 559,5 | 1,6 | 0,01088 | 4,20 | | | | |

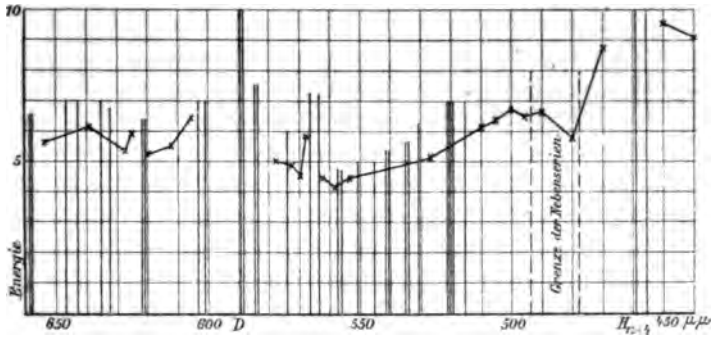



Fig. 6. Cäsium.

Im Spektrum des Cäsiums ist die Abhängigkeit des kontinuierlichen Grundes von den Nebenserienlinien recht gut zu bemerken. Die Gesamtintensität nimmt nach Violett hin zu, und zeigt, wie beim Rubidium, einen deutlichen Absatz an der Stelle, von wo an der Hof der $H_{n=4}$ deutlich auftritt.

Hofbildung ist zu beobachten zwischen $\lambda$ 575 und 566, und von 562 nach 559,5, sowie von 625 nach 627. Der Anstieg von 611,5 nach 605 ist durch den Hof der *D*-Linien verstärkt worden, der auf der Strecke von 611,5 nach 620 eine eventuelle Hofbildung der Gruppe bei 621 überstrahlt.

Zusammenfassend läßt sich die im Gegensatz zu allen bisherigen Beobachtungen unabhängig von den spektralen Empfindlichkeitsunterschieden des Auges[1]) und der spektralen Verteilung des benutzten Vergleichslichtes gewonnene absolute Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Spektrum der untersuchten Alkalimetalle — das Lithium würde infolge seines sehr schwachen Grundes nicht sehr vorteilhaft ausmeßbar gewesen sein — in Übereinstimmung mit den schon von Hrn. Lenard geäußerten Vorstellungen ansehen als eine Übereinanderlagerung stark ausgeprägter Höfe der Hauptserienlinien und des eigentlichen kontinuierlichen Grundes, für welchen die mitgeteilten Beobachtungen einen deutlichen Zusammenhang mit den Nebenserienlinien erkennen lassen. Die gut meßbaren Intensitätsanstiege in der Umgebung vieler Linien, insbesondere die Steigerung des kontinuierlichen Grundes gegen die Stellen starker Häufung von Nebenserienlinien lassen unzweifelhaft den kontinuierlichen Grund in dem von Hrn. Lenard schon geäußerten Sinn als das Resultat starker Verbreiterung und Hofbildung der Nebenserienlinien ansehen. Der Intensitätsabfall im Hof der Hauptserienlinien, der mit besonders guter Genauigkeit für die *D*-Linien, dann auch bei den Linien des Rubidiums und Cäsiums meßbar war, erfolgt in ähnlicher Weise, wie er für die Intensitätsverteilung im Innern einer Spektrallinie von Lord Rayleigh[2]) angegeben ist, etwa nach einer $e$-Funktion — rascher Abfall in der unmittelbaren Nähe der Linien und dann langsamere Abnahme nach der Breite. Wenn wir voraussetzen, daß in gleicher Weise die Hofbildung der Nebenserienlinien statthat, was den Beobachtungen selbst mit wenig großer Genauigkeit entnommen werden kann, wäre es wohl berechtigt, die merkliche Intensität des Grundes in den Zwischenräumen zwischen einzelnen Nebenserienlinien als Verbreiterung dieser Linien auch dann anzusehen, wenn ein starker Anstieg gegen die Linien bei der Unmöglichkeit genügend großer Annäherung nicht immer deutlich beobachtet werden konnte.

1) Hierdurch werden wesentlich die von Lecoq gemachten Angaben (l. c. p. 45, 47, 48) beeinflußt.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 27. p. 298. 1889; vgl. auch H. Kayser, l. c. 2. p. 343.

**Die Strahlung der Hefnerlampe, verglichen mit derjenigen des schwarzen Körpers.**

Die erstrebte Zurückführung des Intensitätsverlaufes im kontinuierlichen Grund der Alkalimetalldämpfe auf absolutes Maß machte den Vergleich der Strahlung der Osmiumlampe mit derjenigen des schwarzen Körpers erforderlich. Zur genügend vollständigen Durchführung dieses Vergleiches wurde als Bezugslicht die Hefnerlampe gewählt, deren Strahlung mit sehr großer Genauigkeit reproduzierbar und in absolutem Maße durch die Untersuchungen von K. Ångström im sichtbaren Gebiet bekannt ist. Nach den bolometrischen Messungen von K. Ångström[1]) läßt sich nämlich die Abhängigkeit der Energie von der Wellenlänge im sichtbaren Gebiet darstellen durch die Gleichung

$$E = 0{,}0160\,\lambda^{-5} e^{-\frac{7{,}85}{\lambda}}.$$

Die Strahlung der Hefnerlampe wäre danach identisch mit derjenigen eines schwarzen Körpers von der Temperatur 1809° abs. — wenn für die Konstante $c_2$ der Wienschen Formel der neuerdings von Holborn und Valentiner[2]) gegegebene Wert 14200 gesetzt wird; Ångström gibt mit Benutzung des älteren Wertes 14440 für $c_2$ die Temperatur 1830° abs.

Da die gegenwärtige Versuchsanordnung einen direkten photometrischen Vergleich der Hefnerlampenstrahlung mit derjenigen des schwarzen Körpers leicht möglich erscheinen ließ, so wurde die absolute Intensitätsverteilung der Hefnerlampe auf diesem Wege neu ausgemessen. Die Lampe wurde zu diesem Zweck an die Stelle der früheren Bunsenflamme gesetzt, während der schwarze Körper an die Stelle der Osmiumlampe trat.

Benutzt wurde der elektrisch geheizte schwarze Körper von Lummer und Kurlbaum in der Form, wie er von diesen Beobachtern früher[3]) beschrieben worden ist. Zur Temperatur-

1) K. Ångström, L'Énergie dans le spectre visible de l'étalon Hefner. Upsala, Berling. 1903.

2) L. Holborn u. S. Valentiner, Ann. d. Phys. 22. p. 1. 1907.

3) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 5. p. 829. 1901.

messung diente ein in den innersten, wirksamen Hohlraum eingeführtes Thermoelement aus Platin–Platinrhodium, das von der Physikalischen Reichsanstalt geeicht worden war. Seine Enden lagen in schmelzendem Eis, und durch passende Nebenschlüsse wurde festgestellt, daß Kurzschlüsse im Element etwa durch die den Strahlungsraum schwärzenden Oxyde nicht auftraten.

Photometrische Vergleiche wurden vorgenommen bei zwei verschiedenen schwarzen Temperaturen, bei 1452° abs. und 1616° abs., die gut auf etwa 3° während der Versuchsdauer konstant zu halten waren. Die Intensitätsmessungen ergeben dann mit Hilfe der für die genannten Temperaturen aus der Planckschen Formel berechneten Energiewerte der schwarzen Strahlung — es handelt sich hier nur um relative Werte für die verschiedenen Wellenlängen — den Intensitätsverlauf im Spektrum der Hefnerlampe in absolutem Maße.

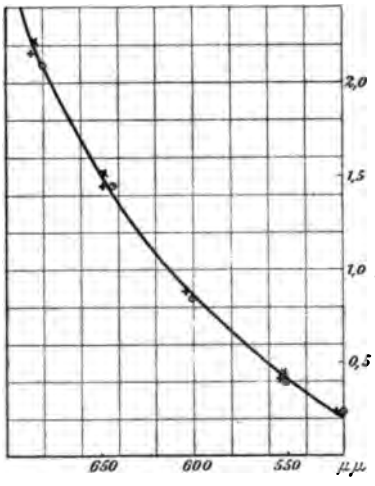



Fig. 7. $\frac{\text{Hefnerlampe}}{\text{Schwarzer Körper}}$.

Die Fig. 7 und die folgende Tab. 5 (Hefnerlampe) enthalten die gefundenen Resultate. Mit + sind die bei 1452°, mit × die bei 1610° abs. des schwarzen Körpers erhaltenen Hefnerlampenwerte verzeichnet, während die von Ångström gegebenen Daten — derart durch einen Faktor reduziert, daß

beide Intensitäten für 680 $\mu\mu$ zur Koinzidenz kommen — durch ⊙ bezeichnet sind.

Tabelle 5. Hefnerlampe.

| $\lambda$ | Ångström | Leder | |
|---|---|---|---|
| | | $E^+$ aus 1452° abs. | $E^\varkappa$ aus 1610° abs. |
| 684,4 | | 2,179 | |
| 683,5 | | | 2,212 |
| 680 | 2,111 | | |
| 646,7 | | 1,438 | |
| 645,6 | | | 1,498 |
| 643 | 1,437 | | |
| 602,9 | | 0,877 | |
| 600 | 0,847 | | |
| 552,1 | | 0,410 | |
| 551,3 | | | 0,425 |
| 550 | 0,398 | | |
| 521,9 | | 0,223 | |
| 521,1 | | | 0,223 |
| 520 | 0,231 | | |

Man entnimmt sorgfältiger graphischer Darstellung der einzelnen Fälle, daß zwischen den neu gefundenen und den Ångströmschen Werten für die Hefnerlampe — die letztere war derjenigen von Ångström nach Mitteilung von Siemens genau nachgebildet — keine Abweichungen bestehen, die außerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtung liegen würden, so daß es für den Verlauf im sichtbaren Gebiet jedenfalls berechtigt erscheint, die Strahlung der Hefnerlampe mit derjenigen des schwarzen Körpers von 1809° abs. zu identifizieren. Über die wahre Temperatur der leuchtenden Teilchen in der Flamme ist damit allerdings nichts ausgesagt.

### Die absolute Strahlung des Osmiums.

Der direkte Vergleich der Hefner- und der Osmiumlampe miteinander läßt nach der soeben gewonnenen Kenntnis für

die Strahlung der Hefnerlampe die direkte Ermittelung der Energiestrahlung des glühenden Osmiums zu. Die nachstehende Fig. 8 gibt zunächst für eine Reihe untersuchter Wellenlängen das beobachtete Verhältnis zwischen der Intensität der Hefnerlampe zu derjenigen des Osmiums, gewonnen aus einer Reihe von Mittelwerten in ähnlicher Weise, wie dies bei der Fest-

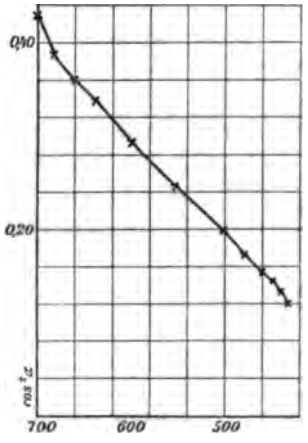



Fig. 8. $\frac{J_{\text{Hefnerlampe}}}{J_{\text{Osmium}}}$.

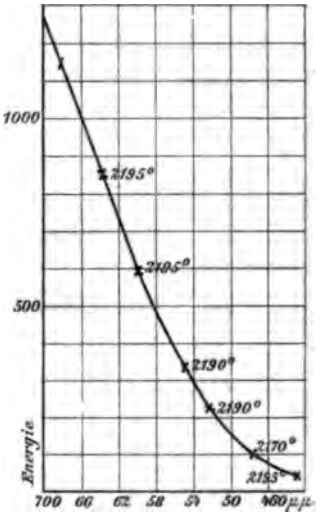



Fig. 9. Osmium.

Tabelle 6. Os.

| $\lambda$ | $\cos^2 \alpha = \frac{\text{Hefnerlampe}}{\text{Osmium}}$ | $E_{Os} = \frac{\text{Hef}}{\cos^2 \alpha}$ |
|---|---|---|
| 700 | 0,4246 | 1266,6 |
| 680 | 0,3876 | 1154,8 |
| 660 | 0,3617 | 1011,0 |
| 640 | 0,3430 | 857,5 |
| 600 | 0,2963 | 605,2 |
| 550 | 0,2482 | 339,4 |
| 500 | 0,1996 | 167,1 |
| 480 | 0,1756 | 118,3 |
| 460 | 0,1571 | 80,7 |
| 450 | 0,1456 | 66,4 |
| 440 | 0,1343 | 54,1 |
| 430 | 0,1197 | 44,95 |

stellung der kontinuierlichen Gründe geschehen war. Der hieraus zu berechnende *absolute* Intensitätsverlauf der Osmiumstrahlung ist in der vorstehenden Tab. 6, Os — hier noch zusammen mit den *relativen* Werten — und in der Fig. 9 dargestellt. Bedeutung hat hierbei nur der relative Verlauf für die einzelnen Wellenlängen, während über die absoluten Intensitäten der Osmiumstrahlung ebensowenig wie bei der Hefnerlampe die photometrische Beobachtung etwas aussagt.

Aus dem Verlauf der gefundenen Osmiumkurve läßt sich für jede Wellenlänge die schwarze Temperatur des unter den besonderen Versuchsbedingungen — eine Lampe der Auer-Glühlichtgesellschaft für 25 Kerzen und 40 Volt bei 36 Volt und 1,21 Amp., d. h. 43,56 Watt Energieverbrauch brennend — strahlenden Osmiums ermitteln. Dieselbe ist:

$$S^{0}_{\text{abs.}} = \frac{14200\,\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}}{\log \text{nat}\left\{\frac{i_1}{i_2} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^5\right\}},$$

wo $i_1$ und $i_2$ die beiden für die Wellenlängen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beobachteten Intensitäten bedeuten, deren absolute Größe nicht bekannt ist. Für mehrere Wellenlängen sind diese schwarzen Temperaturen $S$ in der Kurve angegeben.

Man erkennt, daß der gesamte Intensitätsverlauf im sichtbaren Spektrum sehr nahe identisch ist mit demjenigen eines schwarzen Körpers von 2195° abs. und daß dieser Wert daher eine untere Grenze für die wahre Temperatur des erhitzten Osmiums darstellt, die von dessen Schmelztemperatur nicht sehr entfernt sein dürfte. Genauere Angaben für die wahre Temperatur selbst lassen sich allerdings aus den mitgeteilten Beobachtungen nicht ableiten, da eine Untersuchung über das Emissions- oder auch Reflexionsvermögen des Osmiums fehlt. Immerhin können einige Anhaltspunkte gewonnen werden für die ungefähre Größe des Emissionsvermögens und damit auch über diejenige der wahren Temperatur, wenn wir für die letztere sukzessive einige Werte substituieren und mit deren Hilfe aus dem Kurvenverlauf die Emissionsvermögen des Osmiums berechnen. Die folgende Tab. 7 enthält einige derartige Werte für $E_m/E_s$, das Verhältnis der Strahlung des

Osmiums bei beliebig gewählter wahrer Temperatur zu der Strahlung des schwarzen Körpers bei derselben Temperatur, für verschiedene Wellenlängen. Gleichzeitig sind die von Holborn und Henning[1]) aus den von ihnen direkt experimentell ermittelten wahren und schwarzen Temperaturen einiger anderer Metalle gewonnenen Emissionsvermögen beigefügt.

Tabelle 7.

| | Angenommene bzw. gemessene wahre Temperatur | $E_m : E_s$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\lambda = 643$ | 550 | 474 | 430 |
| Os | 2200° abs. | 0,980 | 0,944 | 0,931 | 0,971 |
| | 2250 „ | 0,784 | 0,719 | 0,677 | — |
| | 2300 „ | 0,633 | 0,570 | 0,517 | 0,508 |
| | 2400 „ | 0,424 | 0,357 | 0,302 | 0,278 |
| | 2500 „ | 0,293 | 0,233 | 0,181 | 0,161 |
| | 2600 „ | 0,208 | 0,153 | 0,115 | 0,096 |
| Pt | 1975 „ | 0,319 | 0,340 | 0,368 | — |
| Au | 1337 „ | 0,127 | 0,258 | — | — |
| Ag | 1231 „ | 0,080 | 0,071 | — | — |

Wenn auch für die wahre Temperatur des strahlenden Osmiums keine näheren Anhaltspunkte gegeben sind, so dürfte doch nach der Tabelle anzunehmen sein, daß das Emissionsvermögen des Osmiums ein relativ hohes ist und dasjenige von Gold oder Silber jedenfalls beträchtlich übersteigt, und vielleicht auch noch merklich größer ist als dasjenige des Platins. Es ist jedenfalls sehr unwahrscheinlich, daß die Schmelztemperatur des Osmiums 2600° abs. betragen sollte, ein Wert, der zudem in unserem Falle nicht erreicht war, da die Lampe nicht bei voller zulässiger Belastung (40 Volt) brannte. Der günstige Nutzeffekt der Osmiumlampen für die Beleuchtung würde dieser Vorstellung entsprechen. Die Abhängigkeit des Emissionsvermögens des Osmiums von der Wellenlänge ist derjenigen bei Platin entgegengesetzt.

1) L. Holborn u. F. Henning, Berl. Ber. 12. p. 311. 1905.

Die vorstehende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Kiel ausgeführt. Dem Direktor desselben, Hrn. Geheimrat Prof. Dr. Lenard sage ich herzlichsten Dank für die Anregung und liebenswürdige Förderung dieser Arbeit.

Hr. Privatdozent Dr. A. Becker hat gleichfalls bereitwilligst die mancherlei Schwierigkeiten dieser Untersuchung überwinden helfen und so fördernd zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Ich bleibe auch Hrn. Dr. Becker zu dauerndem Danke verpflichtet.

Kiel, den 1. August 1907.

(Eingegangen 11. September 1907).

# 7. *Über die Herabsetzung des Funkenpotentials durch Bestrahlung der Funkenstrecke mit Kathodenstrahlen;* *von J. Herweg.*

(Greifswalder Habilitationsschrift des Verfassers.)

---

## Einleitung.

Die Einwirkung von Strahlungen der verschiedensten Art auf selbständige elektrische Entladungen in Gasen ist seit langem bekannt. Es liegt eine große Zahl von Arbeiten vor, die sich mit diesem Thema beschäftigen, doch nur wenige bieten exakte Messungen; die meisten begnügen sich damit, festzustellen, daß eine Einwirkung in positivem oder auch negativem Sinne vorhanden ist. Trotzdem möchte ich eine kurze Übersicht über die wichtigsten dieser Arbeiten vorausschicken, da sich in ihnen Widersprüche finden, die im folgenden einer näheren Betrachtung unterzogen werden sollen.

Der erste, der eine Einwirkung der Strahlung, und zwar des ultravioletten Lichtes auf die Funkenentladung entdeckte, war Hertz. Bei Versuchen über elektrische Resonanzerscheinungen benutzte er zwei Funkenstrecken, die gleichzeitig von einem Induktorium gespeist wurden. Wir wollen sie *A* und *B* nennen. Er beobachtete nun, daß die maximale Länge des Funkens *A* merklich kleiner war, wenn er ihn mit einem verdunkelnden Gehäuse umgab. Durch sukzessive Entfernung der einzelnen Teile des Gehäuses zeigte er dann, daß nur die Wand, die zwischen den beiden Funken *A* und *B* sich befand, die Wirkung hervorbrachte. Er erkannte auch schon, daß das ultraviolette Licht des Funkens *B* der wirkende Faktor sei. Als er dann bei seinen weiteren Versuchen die Wechselstromfunkenstrecken des Induktoriums durch solche ersetzte, die von einer Influenzmaschine gespeist wurden, stieß er auf Schwierigkeiten. Die Erscheinung zeigte sich nicht mehr oder doch nur ganz unsicher.

Im folgenden Jahre zeigte Arrhenius in einer Mitteilung an die schwedische Akademie der Wissenschaften, „daß die Luft durch Bestrahlung mit geeignetem Licht wie ein Elektrolyt leitend wird". Den Schlußsatz dieser Mitteilung will ich hier anführen, weil er für das vorliegende Thema von Interesse ist. Er schreibt: „Dafür (daß die Luft durch Bestrahlung leitend wird) sprechen besonders die schönen Versuche von Hertz, welche zeigen, daß die Funken in Luft von gewöhnlichem Druck sich leichter ausbilden, wenn die Funkenstrecke beleuchtet wird, als wenn sie im Dunkeln gehalten ist. Diese Versuchsergebnisse können nämlich sehr leicht erklärt werden, wenn man annimmt, daß die Luft durch Beleuchtung ihr Leitungsvermögen vergrößert." Diese Erklärung von Arrhenius ist sehr allgemein gehalten, aber eine präzisere Fassung war auch noch nicht möglich, da man damals von der Größe des Kathodenfalles und den Feldverlauf in ionisierter Luft noch nichts wußte.

Es wäre vielleicht hier kurz noch eine Arbeit von Wiedemann und Ebert zu erwähnen, die bald nach der Arbeit von Hertz erschien und für eine von einer Influenzmaschine gespeiste Funkenstrecke die Einwirkung nachwies; auch zeigten sie, daß die Bestrahlung im wesentlichen nur auf die Kathode wirkt.

Erst 8 Jahre später erschienen fast gleichzeitig zwei neue Arbeiten, von Warburg und Swyngedauw, die zu einer Kontroverse der beiden Autoren führten. Den streitigen Punkt bildete die „Verzögerung" der Funkenentladung. Diese von Jaumann entdeckte Verzögerung zeigt sich auffallend stets dann, wenn das Funkenpotential plötzlich an eine Funkenstrecke angelegt wird. Der Funke tritt dann nicht sofort ein, sondern erst nach einiger Zeit, die je nach den Umständen kürzer oder länger ausfällt. In der oben erwähnten und einer bald darauf folgenden Arbeit behauptete nun Warburg, daß durch die Bestrahlung mit ultraviolettem Licht lediglich die Verzögerung aufgehoben werde, mag das Funkenpotential schnell oder langsam angelegt werden, Swyngedauw dagegen vertrat den Standpunkt, daß das Funkenpotential herabgesetzt werde. Heute kann man sagen, daß in gewisser Weise beide recht hatten, doch ist es bei der Unklarheit der Arbeiten von

Swyngedauw zweifelhaft, ob er tatsächlich eine Erniedrigung des Potentials gefunden hat.

Dieser Widerspruch erklärt sich folgendermaßen: Wie schon Arrhenius vermutete, beruht die Einwirkung des Lichtes darauf, daß die Luft zwischen den Entladeelektroden leitend wird, d. h. daß Ionen gebildet werden. Da nun die Verzögerung einem Ionenmangel zugeschrieben wird, so ist damit die Aufhebung der Verzögerung erklärt. Wird nun aber die Ionisation sehr vergrößert, so bekommt man auch, wie ich kürzlich in einer Notiz in der Physikalischen Zeitschrift zeigte, tatsächlich eine Herabsetzung des Funkenpotentials. Bei den schwachen Ionisationen, wie sie durch ultraviolettes Licht oder auch Röntgenstrahlen hervorgebracht werden können, ist die Herabsetzung sehr klein und leicht mit der Aufhebung der Verzögerung zu verwechseln. Ob nun Swyngedauw diese geringe Herabsetzung des Funkenpotentials wirklich im Auge hatte, ist nach seinen Arbeiten sehr zweifelhaft. — Diese Kontroverse zwischen Warburg und Swyngedauw zeitigte in den darauf folgenden Jahren eine ganze Reihe von Arbeiten, die sich teils für, teils gegen die Herabsetzung aussprachen oder die Frage überhaupt offen ließen.

Gelegentlich einer Untersuchung über die Einwirkung von Röntgen- und Kathodenstrahlen auf die Glimmentladung in einer evakuierten Röhre wurde ich auch vor diese Frage gestellt. Ich konnte damals nachweisen, daß bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen die Anfangsspannung der Glimmentladung um einige Prozent herabgesetzt wird, die Einwirkung der stärker ionisierenden Kathodenstrahlen war wesentlich größer, sie ergab eine Herabsetzung bis zu 30 Proz.

Diese Resultate veranlaßten mich, die Wirkung der Kathodenstrahlen auch auf die Funkenentladung bei Atmosphärendruck näher zu untersuchen. Die Resultate sind in der folgenden Abhandlung zusammengestellt.

## I. Abschnitt.

### Untersuchung der Einwirkung, wenn die Kathodenstrahlen senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien in die Funkenstrecke einfallen.

Die Resultate dieses ersten Abschnittes sind schon als vorläufige Mitteilung in der Physikalischen Zeitschrift erschienen;

ich will sie der Vollständigkeit wegen hier kurz noch einmal anführen.

**Versuchsanordnung.**

Fig. 1 zeigt den ganzen Aufbau. Zur Erzeugung der Kathodenstrahlen diente eine Des Coudressche Kathodenstrahlröhre *K*, die von einem Teslatransformator gespeist wurde.

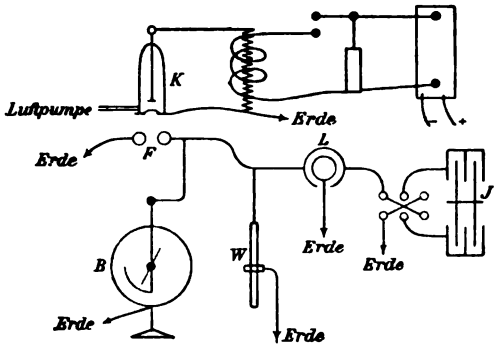



Fig. 1.

Das Induktorium war mittlerer Größe, als Unterbrecher diente ein Wehneltunterbrecher, die Primärstromstärke betrug etwa 10 Amp. Die Des Coudressche Röhre wurde mit einer Gaedeschen Quecksilberpumpe evakuiert und das Vakuum so reguliert, daß die Strahlung möglichst ein Maximum zeigte, was bei den ersten Versuchen mittels Bariumplatincyanürschirm kontrolliert wurde. Im günstigsten Falle leuchtete der Schirm noch in einer Entfernung von $2^1/_2$ bis 3 cm vom Aluminiumfenster der Röhre. Die Dicke dieses Fensters betrug etwa 0,005 mm. Es war samt der Messingkapsel, auf die es gekittet war, geerdet. Die Funkenstrecke *F* bestand aus Zinkkugeln von 0,3 cm Radius. Die eine der Kugeln konnte mittels der zweiplattigen Influenzmaschine *J* mit nebengeschaltetem Kondensator *L* durch Vergrößerung des veränderlichen Jodcadmiumwiderstandes *W* langsam aufgeladen werden, die andere Kugel war geerdet. Zur Messung des Funkenpotentials diente das Braunsche Elektrometer *B*.

**Ausführung der Messungen.**

Zunächst wurde für eine bestimmte Funkenlänge das Funkenpotential ohne Bestrahlung bestimmt, dadurch, daß

durch Vergrößerung des Widerstandes $W$ das Potential langsam bis zum Eintritt des Funkens erhöht wurde. Eine etwaige Verzögerung wurde durch ein der Funkenstrecke genähertes Radiumpräparat vermieden; bei den späteren Versuchen wurde diese Vorsicht außer acht gelassen, da die Verzögerung bei dieser Anordnung klein ist gegen die Herabsetzung des Potentials. Sie beträgt, wie auch Orgler gezeigt hat, nur wenige Prozent. Nun wurde die Luft durch die Kathodenstrahlen ionisiert und abermals das Funkenpotential am Braunschen Elektrometer abgelesen. Dieses war vorher durch verschiedene Funkenlängen unter Zugrundelegung der Zahlen von Heydweiller-Paschen geeicht. Die Messungen wurden für Kugelabstände von 1, 2 und 3 mm ausgeführt. Die Resultate sind in Tab. 1 enthalten.

Tabelle 1.

| Kugelabstand in mm | Funkenpotential in Volt | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ohne Kathodenstrahlen | | Mit Kathodenstrahlen | | |
| 3 | 11100 | 11100 | 6100 | 5900 | |
| 2 | 8200 | 8350 | 3500 | 3350 | |
| 3 | 11100 | 11100 | 5200 | 5200 | |
| 2 | 8350 | 8350 | 3350 | 3350 | |
| 3 | 10950 | 11100 | 5200 | 5000 | |
| 2 | 8200 | 8200 | 3500 | 3350 | |
| 1 | 4800 | 4800 | 2200 | 2200 | Spannung − |
| 2 | 8350 | 8200 | 3350 | 3350 | |
| 3 | 10950 | 10950 | 5350 | 5200 | |
| 3 | 10850 | 10950 | 5200 | 5200 | |
| 2 | 8200 | 8350 | 3900 | 4100 | |
| 1 | 4800 | 4800 | 2500 | 2500 | |
| 3 | 10850 | 10850 | 5200 | 5200 | |
| 2 | 8200 | 8200 | 3900 | 4100 | |
| 1 | 4650 | 4650 | 2500 | 2500 | |
| 3 | 10850 | 10950 | 5700 | 5200 | Spannung + |
| 1 | 4800 | 4800 | 2500 | 2850 | |
| 2 | 8200 | 8350 | 4650 | 4800 | |
| 3 | 10700 | 10850 | 5900 | 6100 | |

Die Zahlen oberhalb der oberen und unterhalb der unteren punktierten Linie zeigen eine gegen die mittleren Zahlen zu kleine Herabsetzung. Es lag dies an der Kathodenstrahlröhre, die in diesen Fällen nur verhältnismäßig sehr wenig Strahlen aussandte. Die mittleren Zahlen zeigen eine konstante Herabsetzung des Funkenpotentials auf etwa die Hälfte des Wertes ohne Bestrahlung. Diese Konstanz der Herabsetzung schrieb ich zunächst der gleichmäßigen Strahlung zu; als ich dann diese aber in gewissen Grenzen durch Änderung der Primärstromstärke im Teslatransformator variierte, bekam ich stets nahezu dieselbe Erniedrigung. Die Theorie, die ich am Schluß geben werde, wird diese zunächst merkwürdig erscheinende Tatsache erklären.

Die Mittelwerte der mittleren Zahlen aus Tab. 1 habe ich in ein Koordinatensystem eingetragen, als Abszissen den Kugelabstand, als Ordinaten die Funkenpotentiale mit und ohne Bestrahlung.

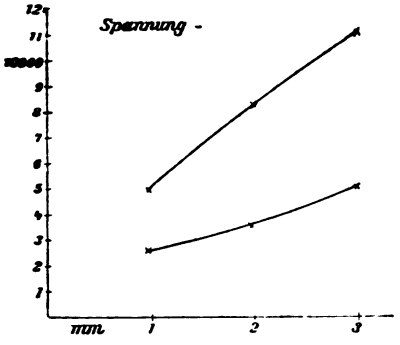



Fig. 2.

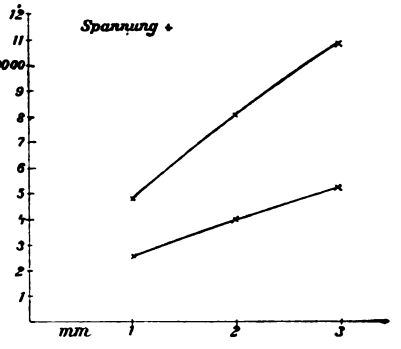



Fig. 3.

Wie die Figuren zeigen, verlaufen die Kurven für positive und negative Spannung sehr ähnlich. Die Herabsetzung für — scheint etwas größer zu sein wie für +, doch stellte dies sich später als Beobachtungsfehler heraus.

Man sieht dies schon, wenn man die letzten drei Kolumnen der mit —Spannung erhaltenen Werte mit den ersten drei der mit +Spannung vergleicht. Sie sind fast identisch innerhalb der Beobachtungsfehler.

Weiter zeigen diese Kurven, daß die Herabsetzung sich nicht wesentlich mit der Funkenlänge ändert. — Um nun theoretisch zu behandelnde Verhältnisse zu bekommen, wurden bei den weiteren Versuchen die Kugeln durch Platten ersetzt. Dies bedingte natürlich auch eine andere Stellung der Kathodenstrahlröhre; denn bei einer seitlichen Stellung der Röhre ist die Ionisation zwischen den Platten infolge der starken Absorption der Kathodenstrahlen sehr ungleichmäßig. Es wurde aus diesem Grunde die eine Platte der Funkenstrecke in der Mitte durchbohrt und die Kathodenstrahlen durch dieses Loch in Richtung der elektrischen Kraftlinien zwischen die Platten geschickt. Die Ionisation war so wenigstens in der Mitte des Feldes, wo dieses homogen ist, ebenfalls gleichmäßig. Die Versuchsanordnung und die Messungen enthält der zweite Abschnitt.

## II. Abschnitt.

### Kathodenstrahlen in Richtung des elektrischen Feldes. Funkenstrecke zwischen Messingplatten.

#### Versuchsanordnung.

Die Anordnung wurde bis auf die Funkenstrecke nicht wesentlich geändert. Fig. 4 zeigt diesen neuen Aufbau.

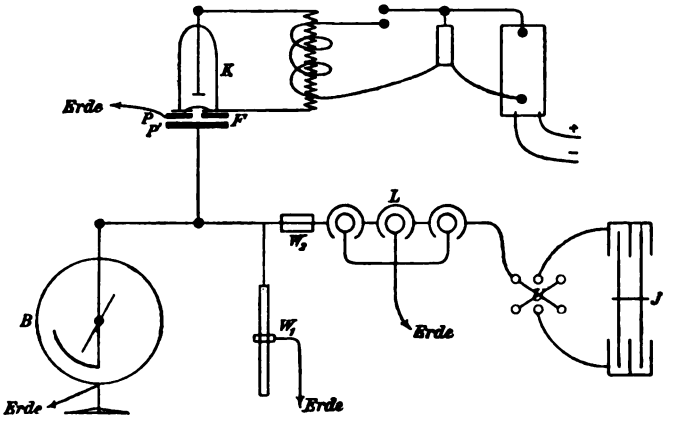



Fig. 4.

Vor das Fenster der Kathodenstrahlröhre *K* war eine Messingplatte von 24 mm Durchmesser gekittet, die in der Mitte für die heraustretenden Strahlen eine 7 mm weite Öff-

nung hatte. Diese Öffnung war mit einem feinen Messingdrahtnetz verschlossen, da es sich zeigte, daß ohne diesen Schutz wiederholt das Aluminiumfenster von den Funken durchschlagen wurde. Das Messingdrahtnetz hatte 22 Drähte von 0,015 mm Stärke pro Zentimeter. Die zweite Platte $P'$ konnte mittels einer Mikrometerschraube auf verschiedene Entfernungen genau eingestellt werden. Außerdem war noch in der Hochspannungsleitung der Wasserwiderstand $W_2$ als Vorschaltwiderstand eingeschaltet. Im übrigen war der Aufbau derselbe wie früher.

### Ausführung der Messungen.

Zur Messung der Funkenpotentiale benutzte ich für Funkenlängen bis 3 mm ein Braunsches Elektrometer der käuflichen Art. Für Funkenlängen über 3 mm konstruierte ich ein eigenes Elektrometer, das ganz auf dem Braunschen Prinzip beruht, nur für höhere Spannungen eingerichtet ist, und sich als sehr praktisch erwies. Da meines Wissens Braunsche Elektrometer nur für Meßbereiche bis 10000 Volt zu haben sind, so will ich hier kurz diese neue Modifikation beschreiben. Der Meßbereich meines Instrumentes geht bis 30000 Volt, doch läßt er sich leicht bis 50000 und mehr ausdehnen.

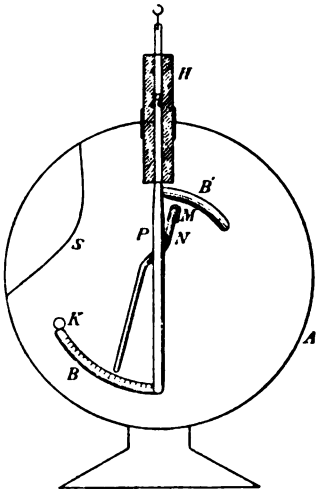


Fig. 5.

Fig. 5 zeigt die Ansicht. Die äußere Hülle $A$ besteht aus einem Messingzylinder von 40 cm Durchmesser und 15 cm Breite. Durch ein Hartgummirohr $H$, das mit Siegellack in die äußere Hülle eingekettet ist, führt ein Messingstab $R$ von 8 mm Stärke. Er trägt unten das eigentliche System. Dieses besteht aus der wohl abgerundeten Messingplatte $P$, 26 cm lang, 8 mm dick und 17 mm breit, mit seitlichen Ansätzen $B$ und $B'$, aus Bleirohr gebogen und an den Enden zugepreßt.

*B* trägt die aufgeklebte Papierskala, *B'* dient als Schutz gegen Spitzenausströmung. Die Nadel *N* ist aus dünnem Aluminiumrohr von 5 mm Durchmesser gebogen und etwas oberhalb der Mitte mit einer Stahlachse versehen, die sich in Spitzenlagern dreht. Durch aufgesetzte Messingkappen *M* läßt sich die Empfindlichkeit in beliebigen Grenzen variieren. Als Zeiger dient ein U-förmig gebogener kurzer Messingdraht, der mit den Schenkeln in das Aluminiumrohr eingekittet ist. Die Kugel *K* ist ein Anschlag. Das in die Hülle eingelötete Messingblech *S* beeinflußt beim Ausschlag der Nadel das Feld so, daß die Ausschläge bis zum Rand der Skala nahezu proportional der angelegten Spannung sind.

Die Dämpfung des Instrumentes ist relativ gut, da die Nadel sehr leicht ist; ferner hat eine derartige Nadel aus Aluminiumrohr den großen Vorteil, daß sie infolge ihrer Form gegen Durchbiegungen sehr gut geschützt ist.

Die Eichung wurde mit Funkenstrecke, wie bei dem kleinen Braunschen Elektrometer, vorgenommen.

Im übrigen wurden die Messungen dieses Abschnittes genau wie früher ausgeführt. Das Potential der Platte *P* wurde langsam bis zum Eintritt des Funkens erhöht, und im Moment des Eintretens am Elektrometer abgelesen. Eine Bestrahlung der Funkenstrecke mit Radiumpräparat zur Aufhebung der Verzögerung habe ich bei den folgenden Messungen als unwesentlich unterlassen, zumal die Messungen meistens so schnell aufeinander folgten, daß bei der zweiten Messung sicher noch einige von den Ionen, die der voraufgehende Funke gebildet hatte, vorhanden waren. Die Tabb. 2, 3 und 4 geben einige orientierende Zahlen, Spannung + oder − bedeutet, daß an die Platte *P'* + oder − Spannung angelegt wurde, während *P* geerdet war. Die Potentiale ohne Bestrahlung waren für − oder + gleich.

Die Tabb. 2 und 3 wurden bei verschieden starker Strahlung, gemessen mit dem Fluorescenzschirm, aufgenommen. Sie zeigen, wie schon die früheren Zahlen, daß die Herabsetzung in den hier gezogenen Grenzen von der Intensität der Strahlung unabhängig ist.

Zu bemerken ist noch, daß die Beobachtung der Tabb. 2 und 3 ohne den Wasserwiderstand *W* gemacht wurden, von

3 mm Funkenlänge an wurde dieser zum Schutz des Fensters vorgeschaltet.

Tabelle 2.

| Funkenpotential in Volt | | | | | | | | | Plattenabstand |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | | Mit Kathodenstrahlen | | | | | |
| | | | | Spannung + | | Spannung − | | | |
| 4300 | 4450 | 4300 | | — | | 1350 | 1350 | 1200 | 1 mm |
| 5750 | 5900 | 5900 | 6000 | 2450 | 2650 | 2450 | 2450 | | $1^1/_2$ |
| 7550 | 7750 | 7550 | | 3400 | 3300 | 3300 | 3300 | | 2 |
| 9400 | 9400 | 9500 | | 4100 | 4300 | 4100 | 4100 | | $2^1/_2$ |
| 11000 | 10750 | 11000 | 10750 | 4750 | 4600 | 4750 | 4900 | | 3 |

Tabelle 3.

Stärkere Strahlung.

| Funkenpotential in Volt | | | | | | | Plattenabstand |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | Mit Kathodenstrahlen | | | | |
| | | | Spannung + | | Spannung − | | |
| 4300 | 4600 | 4600 | 2000 | 1800 | 1600 | 1800 | 1 mm |
| 6000 | 6250 | | 2650 | 2650 | 2650 | 2650 | $1^1/_2$ |
| 7750 | 7850 | | 3300 | 3450 | 3450 | 3300 | 2 |
| 9400 | 9200 | | 4100 | 4100 | 4100 | 4100 | $2^1/_2$ |
| 11000 | 11300 | 11000 | 4750 | 4900 | 4600 | 4600 | 3 |

Tabelle 4.

Längere Funken.

| Funkenpotential in Volt | | | | | | | | | | Plattenabstand |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | | Mit Kathodenstrahlen | | | | | | |
| | | | | Spannung + | | | Spannung − | | | |
| 10500 | 10800 | 10800 | 11000 | 4600 | 4600 | | 4800 | 4800 | | 3 mm |
| 13800 | 14200 | 14000 | | 6400 | 6700 | 6700 | | — | | 4 |
| 17000 | 16600 | 17000 | 17000 | 7900 | 7900 | 8100 | 7900 | 7900 | 7700 | 5 |
| 19700 | 19500 | 19700 | | 9300 | 9300 | | | — | | 6 |
| 22000 | 21600 | 22000 | 22000 | 11000 | 11500 | 11500 | 10500 | 10800 | 10800 | 7 |
| 28500 | 23500 | 23500 | | 12000 | 12600 | 12400 | | — | | 8 |
| 24600 | 24800 | 24600 | | 13700 | 13700 | 13300 | 13700 | 13700 | 13300 | 9 |

Zunächst geht aus den Zahlen hervor, daß das Vorzeichen der Spannung wenig Einfluß auf die Herabsetzung hat, ob

das Potential der Platte $P$ positiv oder negativ ist, ist gleichgültig. Ich habe nun aus diesen Zahlen die Mittelwerte gebildet und dann den Quotienten aus dem Funkenpotential ohne und mit Kathodenstrahlen für die verschiedenen Abstände ausgerechnet. Sie sind in Tab. 5 enthalten.

Tabelle 5.

| Quotienten $Q$ der Funkenpotentiale aus Tabb. 2 und 3. | | Quotienten $Q$ aus Tab. 4. | |
|---|---|---|---|
| $Q$ | Plattenabstand | $Q$ | Plattenabstand |
| 2,83 | 1 mm | 2,23 | 3 mm |
| 2,35 | $1^1/_2$ | 2,09 | 4 |
| 2,30 | 2 | 2,13 | 5 |
| 2,28 | $2^1/_2$ | 2,10 | 6 |
| 2,30 | 3 | 2,00 | 7 |
| | | 1,93 | 8 |
| | | 1,80 | 9 |

Diese Zahlen besagen also: es ist z. B. bei 1 mm Abstand das Funkenpotential ohne Bestrahlung 2,83 mal so groß wie mit Bestrahlung. In Fig. 6 sind diese Quotienten $Q$ als Abszissen, die Plattenabstände als Ordinaten in ein System eingetragen.

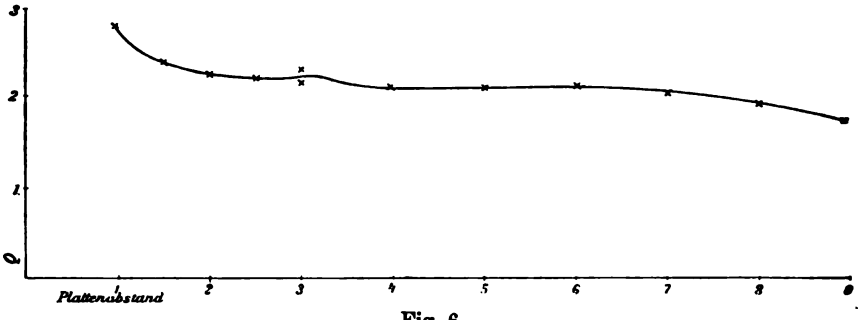



Fig. 6.

Die Kurve zeigt eine starke Zunahme der Erniedrigung für kleinere Funken und eine Abnahme für größere; für mittlere Funkenlängen ist sie nur schwach geneigt.

Dieses ungewöhnliche Anwachsen der Erniedrigung des Potentials bei einer Funkenlänge von 1 mm gegenüber der bei $1^1/_2$ und 2 mm war bei den ersten Messungen mit den Messingkugeln nicht beobachtet. Im übrigen stimmen die

zwischen den Platten beobachteten Erniedrigungen mit denen der Kugelfunkenstrecke merkwürdig gut überein. Die Form des Feldes hat offenbar nicht viel Einfluß auf die Erscheinung.

Jedenfalls legte der Unterschied zwischen den beiden Beobachtungen die Vermutung nahe, daß bei diesen letzten Messungen eine versteckte Fehlerquelle Einfluß habe und das war tatsächlich der Fall. Es zeigte sich, daß durch die Teslaschwingungen die Platte $P$, obgleich sie geerdet war, Ladungen erhielt, wie schwache Fünkchen bewiesen, wenn man die ebenfalls geerdete Platte $P'$ der Platte $P$ bis auf einige $^1/_{100}$ mm näherte. Der Einfluß der an $P$ auftretenden Wechselspannungen wurde natürlich um so größer, je kleiner das Funkenpotential selbst war. Verschiedene Mittel zur Beseitigung dieser unangenehmen Störung versagten und erst die folgende Anordnung hatte den gewünschten Erfolg.

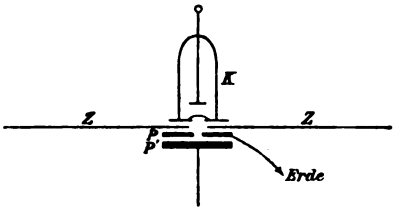



Fig. 7.

In der Mitte einer etwa 2 qm großen Zinbklechtafel $Z$ befand sich ein Loch von 1 cm Durchmesser. Auf der einen Seite wurde isoliert von der Blechwand die Kathodenstrahlröhre $K$ angekittet, auf der anderen, ebenfalls isoliert, die durchbohrte Platte $P$. Das Aluminiumfenster und die Messingkappe der Röhre wurden durch die Gasleitung geerdet, die Zinkwand $Z$ und die Platte $P$ durch die Wasserleitung, doch so, daß die Verbindungsstellen mit dieser möglichst weit voneinander entfernt lagen. Der Schutz war jetzt vollkommen, Spannungen an $P$ wurden nicht mehr beobachtet.

### Einfluß des Wasserwiderstandes.

Eine weitere Fehlerquelle bildete der zum Schutze des Aluminiumfensters vorgeschaltete Wasserwiderstand $W$, wie die folgende Tabelle zeigt.

Tabelle 6.

| Funkenpotential in Volt | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | Mit Kathodenstrahlen | | |
| 11000 | 11000 | 4750 | 4600 | 4600* |
| 11000 | 11000 | 5100 | 4950 | 4950** |

* Ohne Wasserwiderstand. ** Mit Wasserwiderstand.

Diese Einwirkung prägt sich auch schon in der Kurve von Fig. 6 aus. Von 4 mm Funkenlänge an liegen offenbar alle Kurvenpunkte etwas zu niedrig. Der Wasserwiderstand wurde deshalb auch bei größeren Funkenlängen fortgelassen.

Mit Rücksicht auf die Theorie, die im IV. Abschnitt dieser Abhandlung aufgestellt ist, wurde auch bei den nun folgenden Messungen dafür gesorgt, daß der durch die Ionisation zwischen den Platten hervorgerufene Strom gemessen werden konnte. Zu diesem Zwecke wurde ein empfindliches Galvanometer der Type Deprez-d'Arsonval in die Erdleitung der Platte *P* eingeschaltet. Die Stärke des durch das Galvanometer fließenden Stromes konnte dann mittels Lichtzeiger an einer Milchglasskala direkt abgelesen werden.

Die Stromstärke wurde ebenfalls mit Rücksicht auf diese Theorie so gewählt, daß sie bei allen Funkenpotentialen mit Bestrahlung weit von der Sättigungsstromstärke entfernt war, mit anderen Worten, bis zum Eintritt des Funkens mußte die Stromstärke im Gase, die durch die Kathodenstrahlionisation im Verein mit der angelegten Spannung bedingt wird, proportional der angelegten Spannung wachsen. Ich habe auch versucht, Messungen bei Sättigungsstrom zu machen, doch scheiterten diese an der Inkonstanz der Kathodenstrahlröhre. Man konnte wohl die Ionisation so stark bekommen, daß die erste Bedingung erfüllt war, doch war es nicht möglich, sie in der für Sättigungsstrom gerade nötigen Stärke konstant zu erhalten.

Die unter den neuen Bedingungen erhaltenen Resultate sind in der Tab. 7 enthalten.

Tabelle 7.

| Funkenpotential in Volt | | | | | Funkenlänge | Vorzeichen der Spannung an $P'$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | Mit Kathodenstrahlen | | | | | |
| 4400 | 4300 | 2000 | 1950 | | 1 mm | + | Kleines Elektrometer |
| 4200 | 4200 | 1850 | 1750 | | | − | |
| 7500 | 7500 | 3300 | 3300 | | 2 | − | |
| 7500 | 7500 | 3300 | 3300 | | | + | |
| 10750 | 10750 | 4650 | 4550 | | 3 | + | |
| 10750 | 10750 | 4650 | 4650 | | | − | |
| 10600 | 10800 | 4800 | 4700 | | 3 | − | Großes Elektrometer |
| 10800 | 10850 | 4700 | 4800 | | | + | |
| 13500 | 13500 | 6100 | 5900 | | 4 | + | |
| 13500 | 13500 | 5900 | 5900 | | | − | |
| 16400 | 16500 | 7400 | 7200 | | 5 | + | |
| 16500 | 16500 | 7200 | 7400 | | | − | |
| 18900 | 18900 | 8900 | 8900 | | 6 | − | |
| 18700 | 18800 | 9300 | 9100 | 9300 | | + | |
| 4500 | 4500 | 2000 | 2000 | | 1 | − | Kontrolle |
| 4500 | 4500 | 2000 | 2000 | | | + | |

Zunächst sieht man aus diesen Zahlen wieder, daß innerhalb der Fehlergrenzen die Erniedrigung vom Vorzeichen der an $P'$ angelegten Spannung unabhängig ist.

Nimmt man nun die Mittelwerte und bildet wie früher die Quotienten aus den Funkenpotentialen ohne und mit Bestrahlung, so zeigen diese jetzt wenigstens für Funken bis 5 mm eine recht befriedigende Konstanz.

Sie sind in Tab. 8 zusammengestellt.

Ich habe wieder die analoge Kurve gezeichnet, wie in Fig. 6, sie sieht jetzt so aus (Fig. 8):

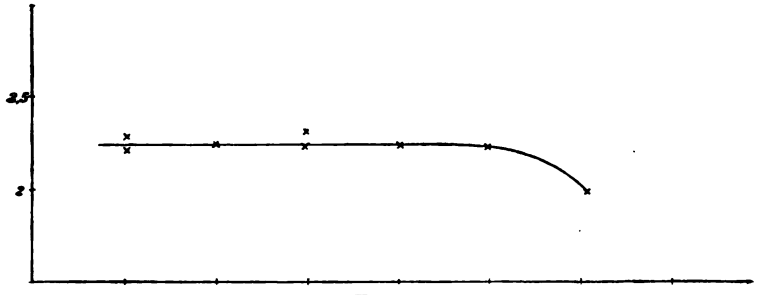



Fig. 8.

Tabelle 8.

Quotienten aus den Mittelwerten der Funkenpotentiale mit und ohne Bestrahlung.

| $Q$ | Plattenabstand |
|---|---|
| 2,28 u. 2,25 | 1 mm |
| 2,27 | 2 |
| 2,32 u. 2,27 | 3 |
| 2,27 | 4 |
| 2,25 | 5 |
| 2,06 | 6 |

Die Herabsetzung des Funkenpotentials ist also für kleinere Funkenlängen unabhängig von dieser.

Über 6 mm hinaus konnte ich leider keine Beobachtungen machen, da die von der Influenzmaschine gelieferte Stromstärke nicht ausreichte, um die Platte $P'$ bei Bestrahlung auf das Funkenpotential zu bringen. Vielleicht ist diesem Umstand auch schon der kleine Wert der Erniedrigung bis 6 mm Plattenabstand zuzuschreiben.

## III. Abschnitt.

### Einfluß des Elektrodenmaterials.

Da die Kathodenstrahlen beim Auftreffen auf Metallwände je nach der Art des Metalles mehr oder weniger kräftige Sekundärstrahlen erregen und diese nun ihrerseits, und zwar noch stärker wie die primären Kathodenstrahlen selbst, ionisierend auf Gase wirken, so war zu vermuten, daß eventuell das Elektrodenmaterial auf die Herabsetzung des Funkenpotentials Einfluß haben konnte. Diese Vermutung bestätigte sich nicht. Ich habe vergleichende Versuche mit Blei, Aluminium und Messing angestellt. Die Platte $P$, die den Strahlen gerade ausgesetzt war, wurde nacheinander durch eine in den Dimensionen gleiche Blei- und Aluminiumplatte ersetzt. Die Funkenlänge wurde so gewählt, daß das Potential ohne Bestrahlung bei den drei Messungen dasselbe war. Aus den Tabb. 9, 10 und 11 geht hervor, daß die Sekundärstrahlung eine merkbare Wirkung nicht ausübt.

Tabelle 9.

Messingplatte.

| Funkenpotential in Volt | | | | | | Vorzeichen der Spannung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | Mit Kathodenstrahlen | | | |
| 10600 | 10600 | 10250 | 4650 | 4650 | 4650 | + |
| 10600 | 11000 | 11000 | 4650 | 4800 | 5000 | − |

Tabelle 10.

Aluminiumplatte.

| Funkenpotential in Volt | | | | | | Vorzeichen der Spannung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | Mit Kathodenstrahlen | | | |
| 10600 | 10250 | 10400 | 4650 | 4750 | 4650 | + |
| 10250 | 10250 | 10250 | 4500 | 4500 | 4300 | − |

Tabelle 11.

Bleiplatte.

| Funkenpotential in Volt | | | | | | Vorzeichen der Spannung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | Mit Kathodenstrahlen | | | |
| 10400 | 10400 | 10400 | 4500 | 4750 | 4500 | + |
| 10600 | 10600 | 10600 | 4650 | 4500 | 4650 | − |

Die Quotienten aus den Mittelwerten der Funkenpotentiale sind für:

| | |
|---|---|
| Messing . . . . . | 2,26 |
| Aluminium . . . . . | 2,26 |
| Blei . . . . . | 2,28 |

Innerhalb der Fehlergrenzen, die etwa 4 Proz. betragen, muß man die Zahlen als gleich ansehen.

Dieses Resultat ändert sich auch nicht, wenn man die Platten $P'$ durch Kugeln ersetzt:

Tabelle 12.

Messingkugel gegenüber *P*.

| Funkenpotential in Volt | | | | Vorzeichen der Spannung |
|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | Mit Kathodenstrahlen | | |
| 9900 | 10000 | 4350 | 4350 | − |
| 9900 | 9900 | 4350 | 4350 | + |
| 11700 | 11700 | 5150 | 5150 | − * |

* Größerer Abstand.

Tabelle 13.

Bleikugel gegenüber *P*.

| Funkenpotential in Volt | | | | Vorzeichen der Spannung |
|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | Mit Kathodenstrahlen | | |
| 11250 | 11250 | 4800 | 5000 | + |
| 11400 | 11400 | 4800 | 5000 | − |

Der Quotient aus den Zahlen für Blei ist wieder etwas größer als für Messing, doch liegt er auch hier innerhalb der Fehlergrenzen. Jedenfalls kann man sagen, daß das *Elektrodenmaterial*, soweit es hier untersucht ist, *einen wesentlichen Einfluß nicht ausübt.*

## IV. Abschnitt.

### Die Herabsetzung des Funkenpotentials in verschiedenen Gasen.

Die Untersuchung der Herabsetzung in verschiedenen Gasen ist deshalb von Interesse, weil in ihnen die Ionenbeweglichkeit, die doch zweifellos bei diesen Erscheinungen eine Rolle spielt, sehr variiert. Hängt die Herabsetzung von der Ionenbeweglichkeit ab, so müssen sich z. B. in Wasserstoff und Kohlensäure andere Werte ergeben wie in Luft.

Um die Versuche durchführen zu können, mußte die Funkenstrecke natürlich in ein Gefäß eingeschlossen werden, das mit dem betreffenden Gase gefüllt werden konnte. Dieses Gefäß wurde aus Glas hergestellt und einfach mit Klebwachs

vor die Blechwand gekittet. Die Anordnung und Form des Glasgefäßes zeigt Fig. 9.

Die untersuchten Gase, Wasserstoff und Kohlensäure, wurden in Kippschen Apparaten entwickelt, durch konzentrierte Schwefelsäure und ein Chlorcalciumrohr getrocknet, und vor dem Versuch einige Zeit durch das Meßgefäß $G$ geleitet. Als Gasleitungsröhren dienten die Ansätze $A$ und $A'$. In $A''$ war der Zuleitungsdraht zu $P'$ verschiebbar eingesetzt. Der Ansatz $A'''$ war mit einem Stopfen verschlossen, der auf einer Nadel ein Stückchen Natrium zum Trocknen trug.

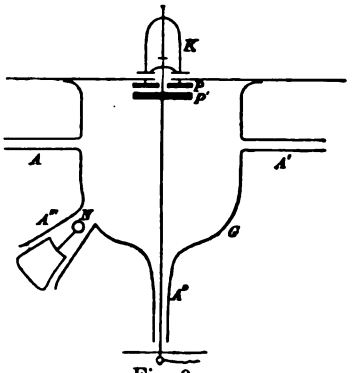


Fig. 9.

**Ausführung der Messungen.**

Zunächst wurde mit der neuen Anordnung zur Kontrolle die Herabsetzung in Luft untersucht, um einen eventuellen Einfluß des Trocknens festzustellen. Zu diesem Zwecke wurde einmal gewöhnliche Zimmerluft in das Gefäß $G$ gefüllt, aus dem vorher das Natriumstückchen entfernt war, und eine Meßreihe aufgenommen. Beim zweiten Versuch wurde die Luft durch konzentrierte Schwefelsäure und ein Chlorcalciumrohr geleitet, und außerdem in $G$ noch durch Natrium getrocknet. Die beiden Versuchsreihen zeigen einen ganz geringen Unterschied, der vermutlich der Verzögerung zuzuschreiben ist; doch habe ich ihn als unwesentlich vernachlässigt. Die Tabb. 14 und 15 zeigen die beiden Reihen.

Tabelle 14.

Gewöhnliche Zimmerluft.

| Funkenpotential in Volt | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | Mit Kathodenstrahlen | |
| 11500 | 11400 | 11400 | 4800 | 5000 |
| 11400 | 11250 | 11500 | 5000 | 5000 |

Quotient aus den Mittelwerten 2,30.

Tabelle 15.

Trockene Luft.

| Funkenpotential in Volt | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | Mit Kathodenstrahlen | | |
| 11700 | 11500 | 11450 | 4800 | 5000 | 5000 |
| 11500 | 11500 | 11550 | 4800 | 5000 | 5000 |

Quotient aus den Mittelwerten 2,33.

Die beiden folgenden Tabellen enthalten die Werte für trockenen Wasserstoff und Kohlensäure, teils für verschiedene Funkenlängen.

Tabelle 16.

Wasserstoff.

| Funkenpotential in Volt | | | | | | Spannung | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | Mit Kathodenstrahlen | | | | |
| 7700 | 7500 | 7500 | 2500 | 2550 | | + | 3,00 |
| 9200 | 9200 | 9200 | 2750 | 2950 | | + | 3,28 |
| 9350 | 9350 | 9350 | 2750 | 2750 | 2600 | − | |
| 9350 | 9300 | | 3100? | 2950 | | − | |
| 9350 | 9350 | 9350 | 2950 | 2950 | 2600 | + | |
| 10750 | 10750 | | 3800 | 3800 | | − | 2,82 |
| 10900 | 10900 | | 3950 | 3800 | | + | |
| 9000 | 9200 | 9100 | 2750 | 2950 | 3100 | − | 2,99 |
| 8900 | 8900 | 8900 | 3100 | 3100 | 2950 | + | |
| 8900 | 8900 | 8900 | 2950 | 3100 | 3100 | − | |
| 9000 | 9000 | 9200 | — | 2950 | 2950 | + | |

Der Wert des Quotienten $Q$ aus der zweiten Beobachtungsreihe 3,28 ist etwas groß. Er ergab sich, als das Gefäß längere Zeit innen noch mit Phosphorpentoxyd getrocknet war. Es ist möglich, daß gerade in Wasserstoff geringe Spuren von Feuchtigkeit schon einen merkbaren Einfluß ausüben. Die geringe Größe des Quotienten in der dritten Reihe, 2,82, erklärt sich durch die etwas große Funkenstrecke. Ähnliches

war ja auch in Luft beobachtet. Als Mittel ergibt sich für die Erniedrigung in Wasserstoff 3,1.

Tabelle 17.

Kohlensäure. 1. Reihe.

| Funkenpotential in Volt | | | | | | | Spannung | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ohne Kathodenstrahlen | | | Mit Kathodenstrahlen | | | | | |
| 9700 | 9900 | 9700 | 4800 | 4650 | 5000 | 4800 | − | 2,01 |
| 9550 | 9700 | 9400 | 4800 | 4650 | 4650 | 4800 | + | |
| 9900 | 9550 | 9700 | 4800 | 5000 | 5000 | | − | |
| 9550 | 9700 | 9700 | 4800 | 4650 | 5000 | | + | |
| Kontrolle mit trockener Luft. | | | | | | | | |
| 10250 | 10400 | 10250 | 4350 | 4350 | 4350 | | + | 2,30 |
| 10050 | 10400 | 10400 | 4650 | 4650 | 4500 | 4350 | − | |
| Kohlensäure. 2. Reihe. | | | | | | | | |
| 9550 | 9700 | 9700 | 4650 | 4500 | 4650 | | + | 2,08 |
| 9550 | 9700 | 9900 | 4650 | 4650 | 4650 | | − | |
| 9550 | 9550 | 9700 | 4800 | 4650 | 4500 | 4650 | + | |

Diese Zahlen geben für Kohlensäure einen mittleren Quotienten von 2,04 bis 2,05.

Ehe ich nun zu den theoretischen Betrachtungen übergehe, will ich kurz noch einmal die experimentellen Resultate zusammenfassen.

Durch Bestrahlung mit Kathodenstrahlen wird das Funkenpotential herabgesetzt, und zwar in verschiedenen Gasen verschieden stark. Die Quotienten der Funkenpotentiale ohne und mit Bestrahlung sind nahe für:

| | |
|---|---|
| Luft . . . . . | 2,3 |
| Wasserstoff . . | 3,1 |
| Kohlensäure . . | 2,0 |

Die Herabsetzung ist, wenigstens für kleinere Funken bis 5 mm, unabhängig von der Funkenlänge und ferner unabhängig von dem Elektrodenmaterial.

## V. Abschnitt.

### Theoretische Betrachtungen über die Herabsetzung des Funkenpotentials.

Diese Betrachtungen schließen sich an die Berechnungen an, die Hr. G. Mie über den Feldverlauf zwischen zwei ebenen Platten in einem ionisierten Gase angestellt hat.[1])

Durch die Ionisierung wird ja bekanntlich die Form des elektrischen Feldes stark geändert, es geht vom statischen in den dynamischen Zustand über. Es sind nun theoretisch zwei Fälle zu unterscheiden. Einmal kann die Ionisation so stark sein, daß in dem Gase das Ohmsche Gesetz noch gilt, d. h., daß bei Veränderung der an die Platten angelegten Spannung die Stromstärke im Gase proportional dieser Spannung wächst oder abnimmt. Der zweite Fall ist der des Sättigungsstromes. Dieser kommt hier nicht in Betracht, denn es war ja durch die Stärke der Kathodenstrahlen dafür gesorgt, daß die erste Bedingung erfüllt war.

Für diesen ersten Fall nun läßt sich nach Hrn. Mie das Feld zwischen den Platten nach folgender Formel berechnen:

$$E = \frac{RJ}{2A}\sqrt{Z}.$$

Hierin bedeutet $E$ die Feldstärke, $R$ den Widerstand der ionisierten Luft zwischen den Kondensatorplatten pro Quadratzentimeter in Ohm, $J$ die Stromdichte in Ampere pro Quadratzentimeter, $2A$ den Abstand der beiden Platten und $\sqrt{Z}$ eine Funktion, die im wesentlichen von der Ionenbeweglichkeit abhängt.

Nach den Anschauungen, die wir über die Funkenentladung besitzen, tritt nun zwischen zwei gleichen Kugeln oder Platten eine selbständige Strömung, Funkenentladung, dann ein, wenn der Spannungsabfall an der Kathode auf der mittleren freien Weglänge gleich der Ionisierungsspannung des positiven Ions geworden ist.

Es ist deshalb für den vorliegenden Fall nur nötig, die Feldstärke unmittelbar an der Kathode zu betrachten, denn die mittlere freie Weglänge eines Ions ist bei Atmosphärendruck kleiner als $^1/_{1000}$ mm.

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 13. p. 857—889. 1904.

Für die Feldstärke an der Kathode erhält die obige Formel den Wert

$$E_K = \frac{RJ}{2A}\sqrt{c_{0K}}. \tag{1}$$

Der Index $K$ an $c_0$ bedeutet, daß der Wert von $c_0$ an der Kathode genommen werden soll.

$c_0$ ist nach folgenden Formeln zu berechnen:

$$\left\{\begin{aligned} &c_0 = c(1+\delta),\\ &c = \lambda^{\frac{\lambda}{\lambda-1}},\\ &\delta\left(\frac{1-\varkappa}{2\varkappa}\cdot\frac{c-1}{\lambda}+\frac{c}{\lambda}-\frac{1}{c-1}\right) = -1,\\ &\lambda_K = \lambda_A = \frac{u_K+u_A}{\alpha\, s},\\ &\varkappa_A = \frac{u_A-u_K}{u_A+u_K},\quad \varkappa_K = -\varkappa_A. \end{aligned}\right. \tag{1a}$$

Hierin bedeuten $u_K$ und $u_A$ die Geschwindigkeiten (cm/sec) der positiven bzw. negativen Ionen bei einer Feldstärke von 1 Volt/cm. $\alpha$ ist die Wiedervereinigungskonstante und

$$s = \frac{\varepsilon_0}{F} = \frac{\text{Dielektrizitätskonstante d. reinen Äthers}}{\text{Äquivalentladung der Ionen in Coulomb}} = 0{,}916\,.\,10^{-18}.$$

Die Größen $c_0$, $c$, $\lambda$, $\delta$ und $\varkappa$ berechnen sich aus $u$, $\alpha$ und $s$ in der angegebenen Weise.

Für die weitere Betrachtung ist die Konstante der Abhängigkeit der Gesamtspannung $\psi$ zwischen den Elektroden von der Stromdichte $J$ erforderlich. Nach den Berechnungen des Hrn. Mie ist diese Abhängigkeit durch die Formel

$$\psi = RJ\left(1+\frac{C_A+C_K}{2}\frac{J}{J_m}\right)$$

gegeben. $C_A$ und $C_K$ sind zwei Konstanten, deren Bedeutung uns hier aber nicht interessiert, da das Glied, in dem sie vorkommen, fortfällt. Unter den gegebenen Versuchsbedingungen ist nämlich $J/J_m$ ($J_m$ = Sättigungsstromstärke) ein sehr kleiner Bruch, und damit auch der Ausdruck $\frac{C_A+C_K}{2}\frac{J}{J_m}$, da $\frac{C_A+C_K}{2}$ z. B. für Luft etwa den Wert 1,04 hat. Es bleibt also für die Spannung

$$\psi = RJ \tag{2}$$

und dies entspricht auch der Forderung des Ohmschen Gesetzes.

Durch Kombination der beiden Formeln (1) und (2) erhält man nun die Feldstärke $E_K$ in ihrer Abhängigkeit von der Gesamtspannung zwischen den Elektroden zu

$$E_K = \frac{\Psi}{2A}\sqrt{c_{0K}}. \tag{3}$$

Es bleibt nun noch übrig, für verschiedene Gase den Wert $\sqrt{c_{0K}}$ auszurechnen. Zunächst für Luft.

Es ist für Luft

$$v_A = 1{,}85 \text{ cm/sec}, \quad u_K = 1{,}34 \text{ cm/sec}, \quad \alpha = 0{,}98 \cdot 10^{18}.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln (1a) ein, so erhält man

$$\sqrt{c_{0K}} = 2{,}74$$

und

$$E_K = \frac{\Psi}{2A}\,2{,}74. \tag{4}$$

Was bedeutet nun diese Formel? $\Psi/2A$ gibt die Feldstärke für ein gleichförmiges Feld an, ein statisches Feld, in dem sich keine Ionen befinden.

Die Formel besagt also: Bringe ich in ein statisches Feld zwischen zwei Platten, dessen Stärke durch den Ausdruck $\Psi/2A$ gegeben ist, so viel Ionen hinein, daß die Stromstärke im Gase weit von der Sättigungsstromstärke entfernt ist, so wächst dadurch die Feldstärke an der Kathode um das 2,74 fache. Daraus folgt unmittelbar der Schluß, daß der $2{,}74^{\text{ste}}$ Teil der Gesamtspannung im statischen Zustande genügt, um im dynamischen Zustande an der Kathode dieselbe Feldstärke zu haben.

Die Konstante 2,74 ist also der Quotient der Spannung im statischen Zustand und der Spannung, die im stark ionisierten Gase an der Kathode dieselbe Feldstärke hervorruft.

Die Anwendung dieses theoretischen Resultates auf die experimentellen Ergebnisse gestaltet sich sehr einfach.

Zwischen zwei Elektroden tritt in einem Gase Funkenentladung ein, wenn die Gesamtspannung zwischen den Elektroden so groß geworden ist, daß an der Kathode Ionisierung durch Ionenstoß eintreten kann, d. h. also, sobald an der Kathode eine bestimmte Feldstärke erreicht ist. Nach der obigen Theorie kann man an der Kathode bei einer 2,74 mal

kleineren Gesamtspannung dieselbe Feldstärke erreichen, wenn man nur genügend viel fremde Ionen in das Feld hineinbringt. Dieses besorgen die Kathodenstrahlen. Es muß also nach dieser Theorie der Quotient aus dem Funkenpotential ohne und mit Bestrahlung gleich 2,74 sein. Der experimentell gefundene Wert ist 2,3, also etwas zu klein.

Ehe diese Differenz einer kurzen Betrachtung unterzogen wird, sollen jetzt die Quotienten für Kohlensäure und Wasserstoff ausgerechnet werden.

Für Kohlensäure ist

$$u_A = 0{,}81, \quad u_K = 0{,}76, \quad \alpha = 0{,}98 \cdot 10^{18},$$

dasselbe wie für Luft. Für Wasserstoff

$$u_A = 7{,}95, \quad u_K = 6{,}70, \quad \alpha = 0{,}85 \cdot 10^{18}.$$

Werden diese Werte in (1a) eingesetzt, so ergeben sich die Quotienten für

Kohlensäure = 1,96,
Wasserstoff = 5,09.

In Tab. 14 sind die experimentell gefundenen und theoretisch berechneten Werte zusammengestellt.

Tabelle 18.

| | Quotienten $Q$ | |
|---|---|---|
| | theoretisch ber. | experimentell gefunden |
| Kohlensäure . . . | 1,96 | 2,0 |
| Luft . . . . . | 2,74 | 2,3 |
| Wasserstoff . . . | 5,09 | 3,1 |

Die Werte für Kohlensäure stimmen innerhalb der Fehlergrenzen überein. Für Luft und Wasserstoff sind die experimentell gefundenen Daten kleiner als die theoretisch berechneten, und zwar nimmt die Abweichung mit abnehmendem Atomgewicht zu. Diese Abweichungen erklären sich vermutlich durch die Vorgänge an der Kathode. Die Theorie setzt voraus, daß an der Metallfläche selbst keine Ionen entstehen. Die Bedingung ist hier nicht erfüllt; denn in der Nähe des Funkenpotentials werden durch den Stoß der positiven Ionen

an der Kathodenoberfläche zahlreiche neue Ionen gebildet, die den theoretisch berechneten Feldverlauf variieren. Das Feld wird geschwächt, und um so mehr, je beweglicher diese Ionen sind. Eventuell können auch Wirbelbewegungen im Gase, die die Theorie ebenfalls ausschließt, das starke Feld an der Kathode schwächen.

### Zusammenfassung der Resultate.

1. Durch Bestrahlung oder präziser durch Ionisierung einer Funkenstrecke wird das Funkenpotential stets herabgesetzt.

2. Die Herabsetzung ist um so größer, je stärker die Ionisation ist, jedoch überschreitet sie einen bestimmten Grenzwert nicht.

3. Dieser Grenzwert wird dann erreicht, wenn die Ionisation so stark ist, daß in dem Meßbereiche die Stromstärke in der Funkenstrecke sehr weit von der Sättigungsstromstärke entfernt ist.

4. Die Grenzwerte sind für verschiedene Gase verschieden; die Herabsetzung geht bei einer Funkenstrecke zwischen Platten in Kohlensäure bis auf $^1/_2$, in Luft bis auf $^1/_{2,3}$ und in Wasserstoff bis auf etwa $^1/_3$.

5. Die Herabsetzung ist für kleinere Funken unabhängig von der Funkenlänge und vom Elektrodenmaterial.

(Eingegangen 3. September 1907.)

## 8. *Der Peltiereffekt Eisen–Konstantan und Nickel–Kupfer zwischen 0° und 560° C.;* von *Paul Cermak.*

(Auszug aus den Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wissensch. zu Wien. Abt. IIa. 116. p. 657. 1907.)

Lecher[1]) hat ein thermoelektrisches Kalorimeter angegeben, das es ermöglicht, die Peltiereffekte der verschiedenen Metalle innerhalb weiter Temperaturgrenzen ihrem absoluten Werte nach zu untersuchen. In der vorliegenden Arbeit sollen die Ergebnisse gezeigt werden, die für die Metallkombinationen Eisen–Konstantan und Nickel–Kupfer zwischen 0° und 560° C. erhalten wurden.

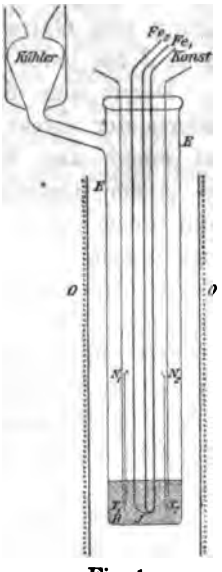


Fig. 1.

Das benutzte *Kalorimeter* zeigte nur unwesentliche Abweichungen von jenem, das Lecher bei seinen Untersuchungen verwendet hat. Es bestand aus zehn hintereinander geschalteten Thermoelementchen, die in einem Kreise von etwa 1 cm Durchmesser angeordnet waren. Die Fig. 1 zeigt einen Durchschnitt durch das im elektrischen Ofen befindliche Kalorimeter.

Von den zehn Thermoelementchen sind in der Figur nur zwei gezeichnet, ihre Lötstellen befinden sich bei $N_1$, $N_2$; $T_1$, $T_2$. Von zwei oberen Lötstellen $N$ führen Kupferdrähte zu einem Edelmannschen Drehspulengalvanometer mit objektiver Ablesung. Die unteren Lötstellen tauchen in die Kalorimeterflüssigkeit $B$, die sich in dem eprouvettenartigen Glasgefäße $E$ befindet. Als Flüssigkeit wurde bis 150° C. *Petroleum*, bis 300° *Reten*, darüber *Chrysen* verwendet. In das Innere ragten

1) E. Lecher, Wiener Ber. 115. Abt. IIa. p. 1506. 1906.

die zur Bestimmung des Peltiereffektes dienenden, in der Figur stark gezeichneten Metalldrähte. Der Eisendraht $Fe_1$ war mit dem gleichstarken Konstantandrahte *Konst.* hart verlötet. An beide waren außerhalb des elektrischen Ofens Kupferdrähte gelötet, die zu einer Akkumulatorenbatterie (4 Volt) führten. Derselbe Stromkreis enthielt noch ein Ampèremeter, Regulierwiderstände und einen Stromwender. Der Eisendraht $Fe_2$, das daran hart angelötete Konstantandrähtchen $J$ (0,06 mm Durchmesser und ca. 1 cm Länge), das ganz in die Kalorimeterflüssigkeit taucht, und der Eisendraht $Fe_1$ bildeten mit der obigen Akkumulatorenbatterie einen zweiten Alternationsstromkreis; mit diesem wurde durch den von einem bekannten Strome im dünnen Drähtchen $J$ hervorgebrachten Jouleeffekte das Kalorimeter zu jeder Messung geeicht. Ein in diesen Stromkreis geschalteter Normalwiderstand und eine Zweigleitung zum Galvanometer ließen den Widerstand des Drähtchens $J$ bei jeder Temperatur bestimmen.

Damit nun die Drähte $Fe_1$, $Fe_2$ und *Konst.* niemals das Kalorimeter direkt berührten, waren die Thermoelementchen mit einem aus Wasserglas und Mennige hergestellten Kitt auf einem Glasrohre befestigt und nach außen sowohl wie nach innen durch weitere Glasröhren geschützt. (In der Figur weggelassen.)

Das ganze Kalorimeter befand sich in einem 65 cm langen, vertikal gestellten elektrischen *Ofen*, der in der Figur bei $O$ verkürzt angedeutet ist. Er bestand aus einem Messingrohre, um das nach entsprechender Isolation mit Asbestpappe Nickeldraht von 0,5 mm Dicke bifilar gewickelt war; nach außen schützten wiederum Asbestschichten vor zur großem Wärmeverluste.

An dem oben erwähnten Thermoelemente $Fe_1$–*Konst.*, das der Messung des Peltiereffektes diente, war noch eine Zweigleitung zum Galvanometer angebracht. Außerdem war ein zweites, aus genau gleichen Drähten hergestelltes Thermoelement, das auch zum Galvanometer geschaltet werden konnte, in einem zweiten elektrischen Ofen eingebettet, der ein bis 550° C. geeichtes Quecksilberthermometer enthielt. Mit diesen beiden Anordnungen konnte leicht die Temperatur im Kalorimeter gemessen werden. Den steten Ausgleich der Temperatur

in der Kalorimeterflüssigkeit bewirkte eine magnetische Rührvorrichtung, die in der Figur nicht eingezeichnet ist.

Bei der Bestimmung des Peltiereffektes Nickel–Kupfer blieb die Anordnung genau dieselbe, nur wurden statt der Eisen- und Konstantandrähte Nickel- und Kupferdrähte benutzt. Nur das Konstantandrähtchen $J$ wurde in der gleichen oben ausgeführten Weise benutzt.

### Durchführung der Messungen.

Vor jedem Versuche wurde die Temperatur in der Kalorimeterflüssigkeit bestimmt. Dann wurde der Widerstand des kleinen Konstantandrähtchens $J$ bestimmt. War dies geschehen, so wurden die zehn Thermoelementchen des Kalorimeters dauernd mit dem Galvanometer verbunden. Da die oberen und unteren Enden der Thermosäule ($F$ und $N$) trotz aller Sorgfalt nie genau die gleiche Temperatur hatten, mußte eine Vorrichtung getroffen werden, um den Lichtfleck des Galvanometers im mittleren Skalenbereiche zu halten. Zu diesem Zwecke wurde der Widerstand von etwa 0,1 Ohm in die Galvanometerleitung geschaltet, und an die Enden dieses Widerstandes wurde ein Hilfsstromkeis (Beutelelement mit vorgeschaltetem ca. 1000 Ohm-Widerstand) angelegt. Durch Änderung dieses Widerstandes gelang es, den Galvanometerausschlag auf eine beliebige Stelle der Skala zu bringen.

Nun wurde, um das Kalorimeter zu eichen, der *Joulee*ffekt während sechs halber Minuten bestimmt. Ein Strom, dessen Stärke so gewählt war, daß die von ihm hervorgerufene Erwärmung der Erwärmung bzw. Abkühlung beim später zu messenden Peltiereffekt ungefähr gleichkam, wurde durch das System Eisendraht-Konstantandrähtchen-Eisendraht ($Fe_1$–$J$–$Fe_2$) geschickt. Vor und nach dem Versuche wurde der Gang des Galvanometerausschlages eine Zeitlang beobachtet und aus diesen Beobachtungen wurde eine Korrektur berechnet. Die Art der Messung war dabei dieselbe, wie sie Lecher[1]) angegeben hat. Dabei wurde der jeweilige Stand des Galvanometerausschlages alle halbe Minuten nach dem Schlage einer genau gehenden Pendeluhr abgelesen und verzeichnet.

1) E. Lecher, l. c. p. 1512.

Um mit dem jetzt geeichten Kalorimeter den *Peltiereffekt* zu messen, wurde ein bekannter Strom (ungefähr ein Ampère) durch das System Eisen–Konstantan (*$Fe_1$–Konst.*) geschickt und durch sechs halbe Minuten der bewirkte Galvanometerausschlag beobachtet. Auch hier wurde aus dem Gange des Ausschlages vor und nach der eigentlichen Messung eine Korrektur angebracht. Die Beobachtung wurde dann mit umgekehrter Stromrichtung wiederholt. Da die beiden Ausschläge nach entgegengesetzter Richtung erfolgten, erhielt man durch Addition ihrer korrigierten absoluten Beträge und Division durch zwei jenen Ausschlag, der dem Peltiereffekte der jeweiligen Stromstärke während sechs halber Minuten entsprach. Nun wurde nach der bekannten Formel $0{,}239 . i^2 w t$ der Wert des *Joule'effektes* für 3 Minuten in Grammkalorien ausgerechnet. Entspricht diesem Werte $A$ ein Ausschlag von $a$ cm, so entsprechen den $b$ cm Ausschlag, die beim Bestimmen des *Peltiereffektes* während dreier Minuten gefunden wurden, $B = Ab/a$ Grammkalorien. Dividiert man $B$ noch durch die Stromstärke (in Ampère) und die Sekundenzahl der Beobachtungszeit (180), so erhält man den *Wert des Peltiereffektes in Grammkalorien für ein Coulomb.* Zur Kontrolle wurden nach jeder Beobachtung noch einmal der Joule'effekt und auch die Temperatur bestimmt.

### Ergebnisse.

Die ersten Versuche über den Peltiereffekt Eisen–Konstantan wurden bei Zimmertemperatur ausgeführt und ergaben $3{,}6 . 10^{-3}$ Grammkalorien pro Sekunde. Dieser Wert stimmt gut überein mit dem von Lecher[1]) gefundenen $3{,}4 . 10^{-3}$, zumal die von mir benutzte Eisensorte anderer Provenienz war.

Die folgenden zwei Tabellen enthalten die Ergebnisse: die erste für Eisen–Konstantan, die zweite für Nickel–Kupfer. Bei Zimmertemperatur wurden je zehn Beobachtungen gemacht, bei den höheren Temperaturen mußten meist mehr Beobachtungen gemacht werden, unter denen für die Tabelle jene ausgewählt worden sind, die um höchstens $\pm 5^\circ$ C. von der angegebenen Durchschnittstemperatur abwichen.

---

1) E. Lecher, l. c. p. 1520.

Bei 0° C. befand sich das Glasgefäß, das das Kalorimeter enthielt (Fig. 1, *E*), in schmelzendem Schnee, sonst immer im elektrischen Ofen. Dieser wurde bis zu Temperaturen von 160° mit dem Gleichstrom der Hausbatterie (30 Akkumulatoren), bei höheren Temperaturen mit dem Wechselstrom der städtischen Leitung geheizt. Da letztere oft größeren Schwankungen unterworfen ist, kann er wohl die etwas größeren Abweichungen der einzelnen Werte bei höheren Temperaturen mitverursacht haben.

Eisen-Konstantan.

| Temperatur in ° C. | 0 | 20 | 130 | 240 | 320 | 560 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2,95 | 3,71 | 4,11 | 6,08 | 7,11 | 11,9 |
| | 3,06 | 3,63 | 4,65 | 5,97 | 8,40 | 13,1 |
| | 2,98 | 3,70 | 4,63 | 6,16 | 7,91 | 12,2 |
| Einzelne | 3,04 | 3,64 | 5,24 | 6,84 | 9,02 | 11,7 |
| Werte | 3,06 | 3,40 | 4,47 | 6,21 | 8,70 | 12,4 |
| in Gramm- | 3,11 | 3,65 | 4,39 | 6,52 | 7,76 | 11,6 |
| kalorien . $10^{-3}$ | 2,99 | 3,74 | 4,38 | 6,29 | 7,96 | 13,8 |
| | 3,69 | 3,70 | 4,48 | 5,88 | 8,03 | 12,9 |
| | 2,89 | 3,71 | 4,37 | 5,98 | 8,30 | 12,6 |
| | 3,03 | 3,60 | 4,36 | 6,43 | 8,00 | 12,8 |
| Mittelwerte: | 3,1 | 3,6 | 4,5 | 6,2 | 8,2 | 12,5 |

Nickel-Kupfer.

| Temperatur in ° C. | 19 | 95 | 235 | 290 | 340 | 445 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2,04 | 2,23 | 2,53 | 2,07 | 1,97 | 2,27 |
| | 2,08 | 2,12 | 2,38 | 1,94 | 1,84 | 2,42 |
| | 2,05 | 2,27 | 2,49 | 2,13 | 1,92 | 2,35 |
| Einzelne | 1,70 | 2,09 | 2,29 | 2,15 | 2,07 | 2,42 |
| Werte | 1,83 | 2,18 | 2,52 | 1,98 | 1,82 | 2,29 |
| in Gramm- | 1,98 | 2,14 | 2,45 | 2,06 | 1,88 | 2,38 |
| kalorien . $10^{-3}$ | 1,87 | 2,08 | 2,41 | 2,22 | 1,96 | 2,46 |
| | 1,83 | 2,20 | 2,53 | 2,02 | 1,94 | 2,50 |
| | 2,00 | 2,13 | 2,49 | 1,99 | 1,85 | 2,35 |
| | 1,81 | 2,07 | 2,44 | 2,08 | 1,87 | 2,41 |
| Mittelwerte: | 1,92 | 2,15 | 2,45 | 2,06 | 1,91 | 2,38 |

Um ein Bild der Abhängigkeit des Peltiereffektes von der Temperatur zu erhalten, wurden die gefundenen Werte in ein Koordinatensystem eingetragen, wobei als Einheit der Abszisse 100° C., als Einheit der Ordinate $10^{-3}$ Grammkalorien genommen wurden.

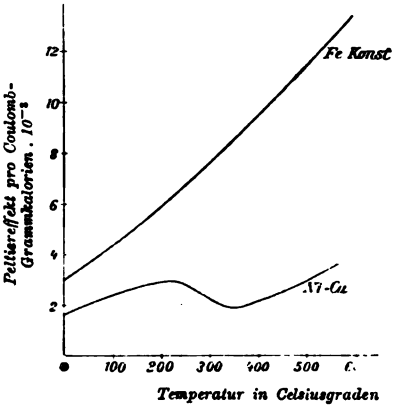



Fig. 2.

Die Kurve für Eisen–Konstantan weicht ziemlich stark ab von jener, die Bausenwein[1]) angegeben hat; doch erklärt sich die Abweichung aus der geringeren Zuverlässigkeit seiner Methode. Die Kurve für Nickel–Kupfer zeigt gute Übereinstimmung mit der von Rziha[2]) gefundenen.

Prag, Deutsche Universität.

---

1) E. Bausenwein, Wiener Ber. 114. Abt. IIa. p. 1632. 1905.
2) K. Rziha, Wiener Ber. 116. Abt. IIa. p. 715. 1907.

(Eingegangen 9. September 1907.)

## 9. *Über den Durchgang des Lichtes durch eine planparallele inhomogene Schicht; von P. Boedke.*

1. Das Problem des Lichtdurchgangs durch inhomogene Körper ist vielfach behandelt worden. Doch fast immer wurde nur die Form der Lichtstrahlen bestimmt, die Frage nach den Intensitätsverhältnissen dagegen nicht berührt. Erst neuerlich hat Hr. Schlick anknüpfend an frühere Untersuchungen von Lord Rayleigh das Problem auch von dieser Seite aus betrachtet und die Reflexionen bestimmt, die im Innern einer planparallelen inhomogenen Schicht auftreten.[1]) Er verfährt hierbei in der Weise, daß er die Maxwellschen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes für diesen Fall, also bei variabler Dielektrizitätskonstante wirklich streng integriert. Doch verweist Hr. Schlick auch noch auf ein anderes Verfahren, wie es früher bei der Bestimmung der Lichtbahnen in inhomogenen Medien ganz allgemein benutzt wurde. Man kann sich nämlich das inhomogene Medium zunächst aus sehr vielen sehr dünnen homogenen Schichten zusammengesetzt denken, für diese homogenen Schichten das Problem lösen und dann versuchen, durch Grenzübergang die gewünschten Resultate für das inhomogene Medium abzuleiten. Hr. Schlick erklärt nun diese indirekte Behandlung des Problems als zwar für die Anschauung bequem, jedoch als zur Durchführung der Rechnung nicht geeignet. In der Tat sind die Vorzüge der direkten Integration der Feldgleichungen einleuchtend. Indessen ist auch der andere Weg gangbar und gewährt eben wegen seiner Anschaulichkeit wieder andere Vorteile. Im folgenden soll deshalb versucht werden, die Schlickschen Resultate auf die beschriebene Weise herzuleiten. Wir be-

1) Moritz Schlick, Über die Reflexion des Lichtes in einer inhomogenen Schicht. Berliner Diss. 1904.

schränken uns dabei von vornherein auf den auch von Hrn. Schlick allein betrachteten Fall einer planparallelen inhomogenen Schicht, in der die Dielektrizitätskonstante zudem nur in der zu den Grenzebenen der Schicht normalen Richtung stetig variabel sein möge. Von Dispersion und Absorption wird abgesehen, die elektrische Leitfähigkeit gleich Null angenommen. Die einfallende Lichtwelle sei als eben und homogen mit der Frequenz $n$ vorausgesetzt.

Die Durchführung des angegebenen Gedankens im einzelnen unterscheidet sich wesentlich von dem sonst angewandten Verfahren. Das Problem des Lichtdurchgangs durch einen Satz planparalleler Platten wird wohl immer so behandelt, daß man einen einzelnen Strahl des im ganzen reflektierten oder durchgelassenen Lichtes betrachtet und sich ihn entstanden denkt aus Teilen der einfallenden Welle, die durch wiederholte Reflexionen an den Trennungsflächen in seine Richtung hineingelenkt werden. Durch Summation über alle diese Komponenten wird dann die Intensität des betreffenden Strahles gefunden.[1]) Demgegenüber werden wir folgendermaßen vorgehen. Unter Voraussetzung des Reflexions- und des Brechungsgesetzes übersieht man leicht, daß außer der im ganzen reflektierten und der im ganzen durchgelassenen Welle in jeder Platte des Systems noch zwei Wellen fortschreiten werden. Alle diese Wellen nehmen wir als von gleicher Natur wie die einfallende Welle, nur mit anderer Amplitude und Phase an. Diese vorläufig unbestimmten Konstanten werden dann durch die Aufstellung der Grenzbedingungen des elektromagnetischen Feldes erhalten. Daß auf diesem Wege die gleichen Resultate wie bei jenem summarischen Verfahren gefunden werden, habe ich für den Fall *einer* Platte an anderer Stelle gezeigt.[2]) Die dort abgeleiteten Bedingungen lassen sich ohne weiteres auf den gegenwärtigen Fall eines Systems planer homogener Schichten übertragen. Die Gleichungsgruppen, welche sich so ergeben, sind zwar im allgemeinen unbequem zu handhaben, lassen jedoch den Grenzübergang zu unendlich vielen unend-

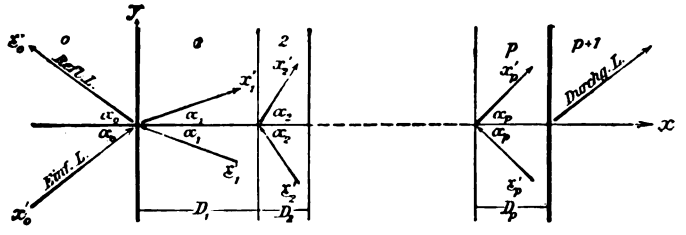
1) Vgl. z. B. F. Neumann, Vorlesungen über theoretische Optik, p. 33, 145. Leipzig 1885.

2) Vgl. eine demnächst im Arch. d. Math. u. Physik erscheinende Mitteilung.

lich dünnen Schichten zu, und führen so zu den gewünschten Resultaten.

2. Die zu betrachtende inhomogene Schicht denke man sich aus $p$ homogenen zwischen parallelen Ebenen liegenden Schichten zusammengesetzt. Die auf eine beliebige dieser letzteren Schichten bezogenen Größen bezeichnen wir durch den Index $r$, der gleichzeitig auch auf diejenige Grenzebene der betreffenden Schicht bezogen werde, welche dem einfallenden Lichte zugewendet ist. So seien die einzelnen Schichtdicken $D_r$, die bezüglichen Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_r$, die Lichtgeschwindigkeiten $q_r$. Durch den Index 0 werde auf das Medium auf der Seite des einfallenden Lichtes, durch den Index $(p+1)$ auf das diesem gleiche Medium jenseits der Schicht hingedeutet.

Die Normale zu den Grenzebenen der Schicht machen wir zur $x$-Achse eines rechtshändigen orthogonalen Koordinatensystems. Dessen $(xy)$-Ebene falle mit der Einfallsebene des Lichtes, die gleichzeitig Zeichnungsebene sei, zusammen. Die $z$-Achse sei normal zur Zeichnungsebene dem Beschauer zugewendet, der Anfangspunkt $O$ des Systems liege in der




Grenzebene zwischen den Medien 0 und 1. Wir nehmen in jedem der $p$ homogenen Medien zwei Wellen an, dazu eine im ganzen reflektierte und eine im ganzen durchgelassene Welle. Die Fortschreitungsrichtungen aller dieser Wellen ergeben sich aus dem Reflexions- und dem Brechungsgesetz. Sie seien $x$-Achsen in Koordinatensystemen $(x_r'\ y_r'\ z_r')$ und $(\xi_r'\ \eta_r'\ \zeta_r')$, deren $z$-Achsen der $z$-Achse des ungestrichenen Systems parallel seien. Der Nullpunkt des auf die im ganzen reflektierte Welle bezogenen Systems falle mit $O$ zusammen, die übrigen Anfangspunkte seien in die Schnittpunkte der

$x$-Achse des ungestrichenen Systems mit derjenigen Grenzebene der einzelnen Schichten verlegt, die dem einfallenden Lichte zugewendet ist.

Der Einfallswinkel sei $\alpha_0$, die bezüglichen Brechungswinkel in den einzelnen Schichten seien $\alpha_r$. Dann ist nach dem Brechungsgesetz

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_{p+1} = \alpha_0, \\ \sqrt{\varepsilon_r} \sin \alpha_r = \sqrt{\varepsilon_0} \sin \alpha_0. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum_1^{r-1\mu} D_\mu = \Delta_r, \\ \Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = 0, \end{cases}$$

so bestehen die folgenden geometrischen Beziehungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} x_r' = \quad (x - \Delta_r) \cos \alpha_r + y \sin \alpha_r, \\ \mathfrak{x}_r' = -(x - \Delta_r) \cos \alpha_r + y \sin \alpha_r. \end{cases}$$

Bezeichnen ferner $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die elektrische und die magnetische Feldstärke, $c$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, so stützen wir uns auf folgende Form der Maxwellschen Gleichungen für das elektromagnetische Feld

$$(4) \qquad \begin{cases} \varepsilon \dot{\mathfrak{E}} = c \operatorname{curl} \mathfrak{H}, & \dot{\mathfrak{H}} = -c \operatorname{curl} \mathfrak{E}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, & \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \end{cases}$$

Die zugehörigen Grenzbedingungen werden wir erst weiter unten einführen.

3. Wir wenden uns nunmehr zu dem eigentlichen Ansatz unseres Problems. Der allgemeine Fall beliebig homogenen Lichts läßt sich dekomponieren, indem man die einfallende Welle in zwei andere Wellen zerlegt, von denen die eine in der Einfallsebene, die zweite senkrecht dazu polarisiert ist. Diese beiden Fälle betrachten wir gesondert und beginnen mit dem Fall, daß das Licht in der Einfallsebene polarisiert ist. Es bedeute $t$ die Zeit. Dann nehmen wir die einfallende Welle in der Form

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{x_0'} = 0, \\ \mathfrak{E}_{y_0'} = 0, \\ \mathfrak{E}_{z_0'} = a_0 \cos\left\{n\left(t - \frac{x_0'}{q_0}\right) + s_0\right\}, \\ \mathfrak{H}_{x_0'} = 0, \\ \mathfrak{H}_{y_0'} = -\sqrt{\varepsilon_0}\, a_0 \cos\left\{n\left(t - \frac{x_0'}{q_0}\right) + s_0\right\}, \\ \mathfrak{H}_{z_0'} = 0 \end{cases}$$

an. Die im ganzen reflektierte, die im ganzen durchgelassene und je die beiden Wellen in den einzelnen Schichten setzen wir nun in der gleichen Form wie die einfallende Welle an. Wir geben dabei nur die nicht verschwindenden Komponenten an und setzen in der $z$-Richtung gleich die ungestrichenen für die gestrichenen Größen ein, was gestattet ist, da diese Richtungen parallel sind. Alle genannten Wellen sind im folgenden Ansatz enthalten:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{z_r} = a_r \cos\left\{n\left(t - \frac{x_r'}{q_r}\right) + s_r\right\}, \\ \mathfrak{E}_{\mathfrak{z}_r} = \mathfrak{a}_r \cos\left\{n\left(t - \frac{\mathfrak{x}_r'}{q_r}\right) + \mathfrak{s}_r\right\}; \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_{y_r'} = -\sqrt{\varepsilon_r}\, a_r \cos\left\{n\left(t - \frac{x_r'}{q_r}\right) + s_r\right\}, \\ \mathfrak{H}_{\mathfrak{y}_r'} = -\sqrt{\mathfrak{e}_r}\, \mathfrak{a}_r \cos\left\{n\left(t - \frac{\mathfrak{x}_r'}{q_r}\right) + \mathfrak{s}_r\right\}, \end{cases}$$

wobei $a$, $\mathfrak{a}$, $s$, $\mathfrak{s}$ vorläufig unbestimmte Konstante bedeuten. Um im Medium $(p+1)$ nur eine Welle zu erhalten, haben wir jedoch

$$\mathfrak{a}_{p+1} = 0$$

anzunehmen.

Durch die Ansätze (5), (6), (7) werden die Bedingungen (4) im Inneren des Feldes jedenfalls befriedigt. Es handelt sich nun weiter darum, zu zeigen, daß die willkürlichen Konstanten zur Erfüllung der Grenzbedingungen ausreichen. Diese verlangen den stetigen Übergang der tangentiellen Komponenten der Feldintensitäten an der Grenzfläche zweier Medien, fordern also für unseren Fall für $x = \Delta_{r+1}$

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{z_r} + \mathfrak{E}_{\mathfrak{z}_r} = \mathfrak{E}_{z_{r+1}} + \mathfrak{E}_{\mathfrak{z}_{r+1}}, \\ \mathfrak{H}_{y_r} + \mathfrak{H}_{\mathfrak{y}_r} = \mathfrak{H}_{y_{r+1}} + \mathfrak{H}_{\mathfrak{y}_{r+1}}. \end{cases}$$

Um diese Gleichungen weiter zu verwerten, müssen zunächst aus (7) die Komponenten der magnetischen Feldstärke im ungestrichenen System berechnet werden. Setzt man danach noch zur Abkürzung

$$n\left(t - \frac{y \sin \alpha_r}{q_r}\right) = \eta, \tag{8a}$$

$$\frac{n D_r \cos \alpha_r}{q_r} = \varphi_r,$$

und beachtet (1), so folgt aus (3), (6), (7), (8)

$$\left\{\begin{aligned} &a_r \cos(\eta + s_r - \varphi_r) + \mathfrak{a}_r \cos(\eta + \mathfrak{s}_r + \varphi_r) \\ &\quad = a_{r+1} \cos(\eta + s_{r+1}) + \mathfrak{a}_{r+1} \cos(\eta + \mathfrak{s}_{r+1}), \\ &\cot \alpha_r \{a_r \cos(\eta + s_r - \varphi_r) - \mathfrak{a}_r \cos(\eta + \mathfrak{s}_r + \varphi_r)\} \\ &\quad = \cot \alpha_{r+1} \{a_{r+1} \cos(\eta + s_{r+1}) - \mathfrak{a}_{r+1} \cos(\eta + \mathfrak{s}_{r+1})\}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

In diesen Gleichungen lösen wir die Kosinus so auf, daß $\eta$ von dem Argument abgetrennt wird. Dadurch werden die Gleichungen linear und homogen in bezug auf $\sin \eta$ und $\cos \eta$. Da $\eta$ aber beliebig variabel ist, so können die Beziehungen nur bestehen, falls die Koeffizienten von $\sin \eta$ und $\cos \eta$ auf beiden Seiten einzeln einander gleich sind. Infolge dieser Überlegung zerfällt jede der Gleichungen (9) in zwei andere. Dadurch ergeben sich für alle $(p+1)$ Grenzflächen im ganzen $4(p+1)$ Gleichungen. Wir hatten aber in jeder der $p$ Schichten zwei Wellen, dazu die im ganzen reflektierte und die im ganzen durchgelassene Welle mit je zwei also im ganzen mit $4(p+1)$ willkürlichen Konstanten angenommen. Diese Konstanten werden sonach durch die infolge der Grenzbedingungen sich ergebenden Gleichungen gerade bestimmt. Die aus (9) abzuleitenden Gleichungen lauten:

$$\left\{\begin{aligned} &a_r \cos(s_r - \varphi_r) + \mathfrak{a}_r \cos(\mathfrak{s}_r + \varphi_r) \\ &\quad = a_{r+1} \cos s_{r+1} + \mathfrak{a}_{r+1} \cos \mathfrak{s}_{r+1}, \\ &a_r \sin(s_r - \varphi_r) + \mathfrak{a}_r \sin(\mathfrak{s}_r + \varphi_r) \\ &\quad = a_{r+1} \sin s_{r+1} + \mathfrak{a}_{r+1} \sin \mathfrak{s}_{r+1}, \\ &\cot \alpha_r \{a_r \cos(s_r - \varphi_r) - \mathfrak{a}_r \cos(\mathfrak{s}_r + \varphi_r)\} \\ &\quad = \cot \alpha_{r+1} \{a_{r+1} \cos s_{r+1} - \mathfrak{a}_{r+1} \cos \mathfrak{s}_{r+1}\}, \\ &\cot \alpha_r \{a_r \sin(s_r - \varphi_r) - \mathfrak{a}_r \sin(\mathfrak{s}_r + \varphi_r)\} \\ &\quad = \cot \alpha_{r+1} \{a_{r+1} \sin s_{r+1} - \mathfrak{a}_{r+1} \sin \mathfrak{s}_{r+1}\}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

4. Um die soeben abgeleiteten Gleichungen für späteren Gebrauch bequemer zu gestalten, seien die folgenden beiden komplexen Größen eingeführt:

$$(11)\qquad \begin{cases} P_r = a_r e^{i s_r} + \mathfrak{a}_r e^{i \mathfrak{s}_r}, \\ Q_r = a_r e^{i s_r} - \mathfrak{a}_r e^{i \mathfrak{s}_r}. \end{cases}$$

Indem man in (10) die Kosinus und Sinus auflöst, ergibt sich leicht:

$$(12)\qquad \begin{cases} P_{r+1} = P_r \cos\varphi_r - i\, Q_r \sin\varphi_r, \\ Q_{r+1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{r+1}}{\operatorname{tg}\alpha_r}\{Q_r \cos\varphi_r - i\, P_r \sin\varphi_r\}. \end{cases}$$

Kann man aus (12) $P$ und $Q$ bestimmen, so erhält man danach aus (11) die Konstanten $a$, $\mathfrak{a}$, $s$, $\mathfrak{s}$.

5. Ohne auf die Berechnung der Intensität der verschiedenen Wellen aus (10) näher einzugehen, wollen wir doch eine bestätigende Probe auf die bisherigen Betrachtungen kurz anführen. Multipliziert man nämlich die erste und die dritte, die zweite und die vierte der Gleichungen (10) miteinander und addiert danach, so folgt:

$$\cot\alpha_r(a_r^2 - \mathfrak{a}_r^2) = \cot\alpha_{r+1}(a_{r+1}^2 - \mathfrak{a}_{r+1}^2) = \text{const.}$$

Durch diese Beziehung werden die Amplituden der Wellen in zwei beliebigen Schichten miteinander in Verbindung gebracht. So folgt z. B. für die Medien 0 und $(p+1)$

$$\mathfrak{a}_0^2 + a_{p+1}^2 = a_0^2.$$

Diese Gleichung drückt aus, daß die Intensität der einfallenden Welle der Summe der Intensitäten der im ganzen reflektierten und der im ganzen durchgelassenen Welle gleich ist, und ist sonach evident.

6. Nachdem wir bisher nur in der Einfallsebene polarisiertes Licht betrachtet haben, wenden wir uns nunmehr zu dem Falle, daß das Licht senkrecht zu dieser Ebene polarisiert ist. Die nicht verschwindenden Komponenten der Feldintensitäten der einfallenden Welle seien in der die Gleichungen (4) erfüllenden Form

$$(12a)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{y_0'} = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cos\left\{n\left(t - \frac{x_0'}{q_0}\right) + s_0\right\}, \\ \mathfrak{H}_{z_0} = a_0 \cos\left\{n\left(t - \frac{x_0'}{q_0}\right) + s_0\right\} \end{cases}$$

angenommen. Die weiteren Ansätze geschehen ganz analog dem vorigen Fall. Man kommt so zu Gleichungen, die vollständig den Gleichungen (9), (10) entsprechen. Die beiden ersten Gleichungen in (9) bzw. (10) bleiben direkt bestehen und in den beiden letzten Gleichungen ist nur die Substitution

$$\cot \alpha_r \mid \sin 2\alpha_r$$

zu vollziehen. Da also die leitenden Gedanken bei der Herleitung genau die gleichen bleiben und die eben gemachte Angabe für alle im folgenden zu ziehenden Schlüsse ausreicht, so beschränken wir uns darauf, gleich das Endresultat in der Form der Gleichungen (12) anzugeben, wobei wir zur Unterscheidung zu den dort vorkommenden Größen $P$ und $Q$ nur andere Lettern anwenden. Es wird

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_{r+1} = \mathfrak{P}_r \cos \varphi_r - i\,\mathfrak{Q}_r \sin \varphi_r, \\ \mathfrak{Q}_{r+1} = \frac{\sin 2\alpha_r}{\sin 2\alpha_{r+1}} \{\mathfrak{Q}_r \cos \varphi_r - i\,\mathfrak{P}_r \sin \varphi_r\}. \end{cases}$$

7. Wir sind jetzt dazu vorbereitet, den Übergang zu einem inhomogenen Medium vollziehen zu können. Auch hier betrachten wir zuerst allein den Fall, daß das Licht in der Einfallsebene polarisiert ist.

Aus den bisherigen Ausführungen geht hervor, daß in jedem Punkte der inhomogenen Schicht Reflexionen stattfinden. Es hat sonach keine physikalische Bedeutung, von einer bestimmten in der Schicht sich fortpflanzenden Welle zu reden; denn eine solche müßte, wenn sie auch nur unendlich wenig fortschreitet, sofort Amplitude und Phase ändern. Wir unterlassen deswegen von jetzt ab die Unterscheidung zweier Wellen in jeder Schicht — einer reflektierten und einer gebrochenen — und ziehen die Komponenten der Feldstärken in (6) und (7) in ihre Resultante zusammen. Für diese Resultierende in einem beliebigen Punkte der Schicht unterdrücken wir gleichzeitig den Index $r$ und erhalten so:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= \mathfrak{E}_{z_r} + \mathfrak{E}_{z_r'}, \\ \mathfrak{H}_x &= -\sin\alpha \{\mathfrak{H}_{y_r'} + \mathfrak{H}_{y_r}\}, \\ \mathfrak{H}_y &= \cos\alpha \{\mathfrak{H}_{y_r'} - \mathfrak{H}_{y_r}\}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (3), (8a), (11) gehen diese Beziehungen über in

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = P e^{i\eta}, \\ \mathfrak{H}_x = \sqrt{\varepsilon_0}\sin\alpha_0 P e^{i\eta}, \\ \mathfrak{H}_y = \sqrt{\varepsilon}\cos\alpha\, Q e^{i\eta}. \end{cases}$$

Dabei sind die Feldstärken natürlich nur dem reellen Teil der rechts stehenden komplexen Größen gleich zu setzen.

8. Die Größen $P$ und $Q$ sind im Falle eines inhomogenen Mediums als Funktionen von $x$ und den Konstanten des Anfangszustandes anzusehen. Sie werden durch Differentialgleichungen bestimmt, die wir aus (12) herzuleiten haben. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\begin{aligned} P_{r+1} &= P + P' dx, \\ Q_{r+1} &= Q + Q' dx, \\ q_r &= \frac{n\cos\alpha}{q} dx, \\ \alpha_{r+1} &= \alpha + \alpha' dx, \\ \alpha' &= -\frac{\varepsilon' \operatorname{tg}\alpha}{2\varepsilon}, \end{aligned}$$

wobei die gestrichenen Größen die Ableitungen nach $x$ bezeichnen und $\varepsilon$ als gegebene Funktion von $x$ angenommen wird. Es folgt nach Einführung dieser Werte in (12)

$$(15)\qquad \begin{aligned} P' &= -\frac{in\cos\alpha\sqrt{\varepsilon}}{c} Q, \\ Q' &= \frac{\alpha'}{\sin\alpha\cos\alpha} Q - \frac{in\cos\alpha\sqrt{\varepsilon}}{c} P. \end{aligned}$$

Indem wir die erste dieser Gleichungen noch einmal nach $x$ differentiieren, können wir $Q$ und $Q'$ durch $P$ und seine Ableitungen ausdrücken und diese Werte in die zweite Gleichung einsetzen. Dadurch folgt für $P$ die Differentialgleichung

$$P'' + \frac{n^2\varepsilon\cos^2\alpha}{c^2} P = 0$$

oder, wenn wir noch (1) beachten,

$$(16)\qquad P'' + \left\{\frac{n^2\varepsilon}{c^2} - \frac{n^2\varepsilon_0\sin^2\alpha_0}{c^2}\right\} P = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist $P$ als Funktion von $x$ zu ermitteln und mit den gehörigen Integrationskonstanten versehen in (14) einzusetzen. Diese letzteren Konstanten werden dann aus den Grenzbedingungen an den Grenzflächen $r = 1$ und $r = p + 1$

erhalten. Die entsprechende Differentialgleichung für $Q$ brauchen wir nicht erst herzuleiten, da diese Größe infolge (15) in der letzten der Gleichungen (14) mit Hilfe von $P'$ ersetzt werden kann.

9. Wir erledigen weiter kurz den Fall, daß das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist. Durch Zusammenziehen der Komponenten der Feldstärken ergibt sich hier die Resultante

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_z &= \mathfrak{H}_{z_r} + \mathfrak{H}_{z_r},\\ \mathfrak{E}_x &= -\sin\alpha\{\mathfrak{E}_{y_r'} + \mathfrak{E}_{y_r'}\},\\ \mathfrak{E}_y &= \cos\alpha\{\mathfrak{E}_{y_r'} - \mathfrak{E}_{y_r'}\}\end{aligned}$$

oder wieder ganz wie oben

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_z &= \mathfrak{P}e^{i\eta},\\ \mathfrak{E}_x &= -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\mathfrak{P}e^{i\eta},\\ \mathfrak{E}_y &= \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\mathfrak{Q}e^{i\eta}.\end{aligned}$$

Es ergibt sich hiernach aus (13) für $\mathfrak{P}$ die Differentialgleichung

$$\mathfrak{P}'' + \left\{\frac{n^2\varepsilon}{c^2} - \frac{n^2\varepsilon_0\sin^2\alpha_0}{c^2}\right\}\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\mathfrak{P}'. \tag{17}$$

Auch hier ist nicht nötig, die Differentialgleichung für $\mathfrak{Q}$ aufzustellen, da diese Größe durch die zu (15) analoge Beziehung mit Hilfe von $\mathfrak{P}'$ eliminiert werden kann.

10. Vergleicht man (16), (17) mit den Gleichungen (7), (12), (23) der Schlickschen Arbeit, so zeigt sich, daß das von uns beabsichtigte Ziel erreicht ist; denn man erkennt leicht die bereits bestehende vollständige Übereinstimmung. Nur ist hier infolge der Voraussetzung des Brechungs- und des Reflexionsgesetzes die von Hrn. Schlick eingeführte willkürliche Konstante $C$ schon bestimmt. Es erübrigt sich, durch den Ansatz der Grenzbedingungen noch die Integrationskonstanten der Gleichungen (16), (17) zusammen mit den Konstanten der im ganzen reflektierten und der im ganzen durchgelassenen Welle zu ermitteln, da wir hierbei genau das gleiche Verfahren, wie Hr. Schlick es anwendet, befolgen müßten.

Rixdorf, September 1907.

(Eingegangen 23. September 1907.)

## 10. *Über den Siedepunkt des flüssigen Ammoniaks;*
## *von Edward C. Franklin.*

Während des vergangenen Jahres sind von zwei unabhängigen Forschern[1]) Bestimmungen des Siedepunktes von flüssigem Ammoniak bei atmosphärischem Druck veröffentlicht worden, ohne dabei auf die früheren Arbeiten von Gibbs[2]) und von de Forcrand[3]) einzugehen.

Ich möchte hiermit auf dieses Versehen aufmerksam machen, aber auch besonders die Methoden und Ergebnisse von de Forcrand, Davies und Brill mit denen von Gibbs vergleichen, um womöglich ausfindig zu machen, warum die Angaben dieser Forscher so weit auseinander gehen.

Für den Siedepunkt des flüssigen Ammoniaks bei 760 mm Druck haben die Herren de Forcrand, Gibbs, Davies bzw. Brill die Zahlen $-32{,}5^0$, $-33{,}46^0$, $-33{,}5^0$ und $-33{,}0^0$ gefunden.

Der Gibbssche Wert wurde durch ein sorfältig ausgearbeitetes Verfahren erhalten, und deshalb wurde zurzeit der von ihm bestimmte Siedepunkt als richtig angesehen.

Der von Davies erlangte Wert, welcher praktisch mit dem Gibbsschen identisch ist, und der von Brill, welcher, wie man bemerken wird, einen halben Grad höher liegt, sind beide aus Dampfdruckmessungen interpoliert. Brill soll ferner sein Resultat durch direkte Bestimmungen des Siedepunktes der bei atmosphärischem Druck kochenden Flüssigkeit bestätigt haben.

Wir haben deshalb zwischen den Gibbsschen Angaben, welche durch die Messungen von Davies bestätigt werden,

1) B. Davies, Proc. Roy. Soc. 78. A. p. 41. 1906 und O. Brill, Ann. d. Phys. 21. p. 176. 1906.

2) H. D. Gibbs, Journ. Am. Chem. Soc. 27. p. 851. 1905.

3) de Forcrand, Ann. de chim. et phys. (7) 28. p. 537. 1903. Trotz eines sorgfältigen Durchsehens der Literatur hat auch Gibbs die Arbeit von de Forcrand übersehen.

den von de Forcrand und den übereinstimmenden direkten und aus Dampfdruck interpolierten Werten von Brill eine Wahl zu treffen, und zwar erlauben folgende Erwägungen einen Schluß aus diesen sich widersprechenden Ergebnissen zu ziehen.

Erstens machen wir auf die bekannte Tatsache aufmerksam, daß Dampfdruckbestimmungen durch die statische Methode [1]), aus vielerlei schwer zu beherrschenden Gründen, sehr beträchtlichen Irrtümern unterworfen sind. Es wird deshalb der durch Interpolieren aus den Dampfspannungen abgeleitete Siedepunktswert nicht dasselbe Vertrauen beanspruchen können, wie der durch die direkte Methode bestimmte.

Zweitens ist es klar, daß die in der Nähe des Siedepunktes bestimmte Dampfdruckkurve des Ammoniaks entweder von dem einen oder dem anderen dieser Forscher irrtümlich gemessen wurde, wodurch beide zweifelhaft sind.

Wir sind also berechtigt, mit dem aus Dampfdruckbestimmungen hergeleiteten Siedepunkte des Ammoniaks uns nicht weiter zu beschäftigen und wenden uns nun den direkten Messungen de Forcrands, Gibbs' und Brills zu.

de Forcrand hat den Siedepunkt des Ammoniaks dadurch bestimmt, daß er einfach ein geprüftes Baudinsches Toluolthermometer in die in einem großen Probierröhrchen befindliche Flüssigkeit versenkte und das Sieden der Flüssigkeit durch Berührung der Röhre mit der Hand einführte. Daß es unmöglich ist, auch nur annähernd genaue Siedepunktsbestimmungen durch direktes Eintauchen des Thermometers in die siedende Flüssigkeit auszuführen, ohne dabei auf besondere Vorsichtsmaßregeln zur Aufhebung des Überhitzens Rücksicht zu nehmen, ist eine wohlbekannte Tatsache. Das Resultat de Forcrands kann deswegen verworfen werden, weil er solche Vorsichtsmaßregeln bei seinen Experimenten einzuführen versäumt hat.

Über Brills augenscheinliche Bestätigung seiner Dampfdruckbestimmungen durch die direkten Messungen des Siedepunktes kann man sagen, daß die Anwesenheit von Platinfolie

1) Vgl. z. B. die Dampfdruckbestimmungen von Bunsen, Faraday Regnault, Pictet und Blümke, über welche Gibbs l. c. schon referiert hat.

und Glasfäden die Überhitzung der Flüssigkeit nur dann völlig aufhebt, wenn dafür gesorgt wird, daß durch hinreichende Berührung zwischen Dampf und Flüssigkeit das Gleichgewicht zwischen den beiden Phasen eintritt. Brill erklärt nicht, auf welche Weise er seine Flüssigkeit erhitzt habe. Wenn die Wärme über eine große Fläche des Glasgefäßes zugeführt wurde, so scheint es in Anbetracht der starken Neigung des reinen flüssigen Ammoniaks sich zu überhitzen, sehr wahrscheinlich, daß seine Vorsichtsmaßregeln nicht genügend waren, die Überhitzung der Flüssigkeit gänzlich aufzuheben.

Noch eine Überlegung, welche zugunsten der Angaben von Gibbs gegenüber denen von de Forcrand und Brill spricht, ist die offenbare Unmöglichkeit zu erklären, wie eine Flüssigkeit, im Sieden gehalten durch die intensive Wärmezufuhr, wie es in dem Gibbsschen Apparat besorgt wurde, und umgeben von einem Gefäß, welches unmöglich eine niedrigere Temperatur als die Flüssigkeit haben kann, unterhalb ihres wahren Kochpunktes sieden kann. Selbstverständlich kann in einem offenen Gefäße, welches freien Luftzutritt gestattet und dabei den Zustand herbeiführt, wo die Oberfläche der Flüssigkeit nicht mehr mit ihrem gesättigten Dampfe das Gleichgewicht hält, die Flüssigkeit rasch verdampfen, nicht aber sieden und sich weit unter dem wahren Siedepunkt abkühlen, was aller Wahrscheinlichkeit nach bei den Versuchen von Regnault[1]) und Loir und Drion[2]) der Fall ist.

Der Verfasser hat sich nach sorgfältiger Durchsicht der Gibbsschen Arbeit davon überzeugt, daß alle Ursachen, die zu bedeutenden Irrtümern führen könnten, beseitigt wurden, und daß der damals festgesetzte Siedepunkt des Ammoniaks bis auf ein Zehntelgrad richtig ist.

California, Stanford University, Juni 1907.

1) V. Regnault, Compt. rend. 50. p. 1063. 1860.

2) A. Loir u. Ch. Drion, Bull. soc. chim. Séances de 1858—60 p. 185. 1860. Vgl. de Forcrand, l. c. Auch der Verfasser hat oft Gelegenheit gehabt, dieses Phänomen zu beobachten.

(Eingegangen 29. August 1907.)

## 11. *Ursprung der Wärmeentwickelung bei Absorption von Röntgenstrahlen; von E. Angerer.*

Hr. W. Wien entwickelt in seiner Arbeit „Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis zur Energie der Röntgen- und Sekundärstrahlen“ [1]) den Gedanken, es könnte die Wärmeentwickelung, die man bei der Absorption von Röntgenstrahlen und von (ultraviolettem) Licht beobachtet, vielleicht zum Teil von dem Zerfall der Atome des bestrahlten Körpers herrühren. Denn wie bekannt emittieren die Körper, solange sie diesen Strahlen ausgesetzt sind, negative Elektrizität, $\beta$-Strahlen, deren Geschwindigkeit überdies von der Art und der Intensität der auslösenden Strahlung fast unabhängig ist.

Denselben Schluß zog, etwas später, H. A. Bumstead [2]), anknüpfend an die modernen Anschauungen über den Zerfall der radioaktiven Elemente, die spontan $\beta$-Strahlen emittieren, und bei denen die Temperaturerhöhung nachweisbar ist. Er prüft seine Hypothese durch Versuche, denen folgende Idee zugrunde liegt:

Wenn die Wärmeentwickelung, die man an einem Metall beobachtet, welches Röntgenstrahlen absorbiert, zum Teil Absorptionswärme im gewöhnlichen Sinne ist, zum Teil aber aus der Atomenergie dieses Metalles stammt, dann ist es wahrscheinlich, daß dieser letztere Betrag bei verschiedenen Metallen ungleich groß ist, und daß infolgedessen in zwei Metallen, in denen die gleiche Menge Röntgenstrahlen absorbiert wird, verschieden große Wärmemengen frei werden. Bumstead benützt zu seinen Versuchen die Metalle Zink und Blei. Die Dicken derselben gleicht er so ab, daß die Röntgenstrahlen, die durch das Zink oder durch das Blei noch hindurchdringen, einen Ionisationsstrom von gleicher Stärke hervorrufen. Die

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 18. p. 991. 1905.
2) H. A. Bumstead, Phil. Mag. 11. p. 292. 1906.

Dicke von dem Bleiblech betrug 0,30 mm, von dem Zinkblech 0,81 mm.

Da die Wärmewirkung der Röntgenstrahlen nur sehr geringfügig und schwer meßbar ist, so verwendet Bumstead ein *Radiometer*, das in folgender Weise für seinen Zweck konstruiert ist:

Den beiden Metallblechen gegenüber sind die beiden Radiometerflügel aus Aluminiumfolie an einem Quarzfaden aufgehängt. Der Betrag der Drehung wird mit Spiegel und Skala abgelesen. Die beiden Bleche sind mit Aluminiumfolie belegt, um dieselbe Beschaffenheit der Oberfläche und auf diese Weise gleiche äußere Wärmeleitung zu erhalten. Sie sind in einem der drei Ausschnitte einer Hartgummischeibe befestigt, welche mit einer elektromagnetischen Vorrichtung um ihre Achse gedreht werden kann. So lassen sich nacheinander verschiedene Bleche prüfen. Das Instrument befindet sich unter einem Glassturz, aus dem die Luft bis zum Optimum der Wirkung ausgepumpt wird.

Die Versuche, die mit diesem Instrument angestellt werden, ergeben nun, daß bei der Bestrahlung mit Röntgenstrahlen in dem Blei etwa doppelt so viel Wärme erzeugt wird, als in dem Zink. Alle Fehlerquellen, die einen Einfluß haben könnten, werden mit großer Sorgfalt in der Arbeit diskutiert und es wird gezeigt, daß sie für das Resultat ohne Belang sind. Dieser Effekt wäre von größter Bedeutung sowohl für alle Untersuchungen über die Energie der Röntgenstrahlen als auch überhaupt für unsere Kenntnis von der Umwandelbarkeit der chemischen Elemente.

Einer Anregung von Hrn. Geheimrat Wien folgend habe ich nun die Bumsteadschen Versuche einer Nachprüfung unterzogen und bin dabei zu ganz anderen Resultaten gelangt.

Zur Messung der Temperaturerhöhung verwendete ich *Thermosäulen*, und zwar im ersten Teil der Arbeit zwei Wismut–Antimonsäulen des Würzburger Instituts, später eine besonders konstruierte Säule, die im folgenden beschrieben wird. Der Thermostrom wurde mit einem Paschenschen Galvanometer gemessen, das bei etwa 5,5 $\Omega$ mit einer Empfindlichkeit von etwa $2 . 10^{-10}$ Amp./Skt. benutzt wurde. Da das Galvanometer seine Empfindlichkeit häufig änderte, wurde dieselbe

unmittelbar vor jedem Versuch neu bestimmt. Die Schwingungsdauer des (35 mg schweren) Magnetsystems betrug 6—8 Sek. Alle stromführenden Teile waren sorgfältig gegen ungewollte Thermoströme geschützt: das Galvanometer stand, in Watte eingewickelt, in einem Zinkblechzylinder, die Leitungen lagen in Bergmannrohren und die Thermosäulen waren in dem innersten von drei Weißblechkästchen untergebracht, deren Vorderwand aus Aluminiumfolie von 0,02 mm Dicke bestand. Dieselben waren gegenseitig durch Watte thermisch isoliert, und, wie die Bergmannrohre, durch die Wasserleitung zur Erde abgeleitet.

Das Induktorium von Ernecke war für 40 cm Schlagweite gebaut und wurde mit einem Turbinenunterbrecher der A. E.-G. benutzt, der pro Sekunde etwa 100 Unterbrechungen machte. Von dem Induktor führten zwei etwa 3 m lange blanke Kupferdrähte zu einer neuen Röntgenröhre mit Palladiumregenerierung.

### I. Versuche mit den beiden Wismut-Antimon-Thermosäulen.

Von den beiden Thermosäulen hatte die eine 30, die andere 42 Wismut–Antimonelemente. Der Widerstand der ersten betrug 2,3 $\Omega$, der zweiten 2,7 $\Omega$. Die letztere hatte ein etwas größeres Volumen. Es war eine Vorrichtung getroffen, daß die beiden Säulen sowohl einzeln verwendet als auch gegeneinander geschaltet werden konnten.

Auf die Vorderfläche jeder Säule wurde das absorbierende Blech, ein quadratisches Stückchen von 1,7 cm Seitenlänge, mit einer dünnen Gummischnur aufgedrückt. Zwischen Blech und Säule kam eine Zwischenlage, welche die Aufgabe hatte, einen Nebenschluß der einzelnen Thermoelemente durch das Blech zu verhindern, jedoch der Ausbreitung der in dem Blech entwickelten Wärme auf die Thermosäule möglichst geringen Widerstand entgegenzusetzen. Von zehn verschiedenen Materialien, die zu diesem Zweck untersucht wurden, erwies sich am vorteilhaftesten *Seidenpapier*, das mit *Paraffinöl* getränkt war.

Wurden nun die beiden Thermosäulen, zunächst ohne aufgesetzte Bleche, gegeneinander geschaltet und befand sich das Galvanometer in dem Stromkreis, so zeigte sich bei der Bestrahlung mit dem Licht einer Glühlampe folgendes: Es

entstand mit Beginn der Bestrahlung eine Ablenkung des Galvanometers nach den großen Zahlen (gleich überwiegende Erwärmung der kleineren Säule), die nach etwa 10″ ein Maximum erreichte, nach etwa 30″ durch Null hindurch zu negativen Werten überging (gleich überwiegende Wirkung der größeren, empfindlicheren Säule) und sich nach etwa 2′ einer Grenzlage genähert hatte. Durch einen Nebenschluß zu der empfindlicheren Säule ließ sich wohl die endgültige Einstellung verändern, nicht aber die Schwankung der Kurven in den ersten zwei Minuten verkleinern.

Diese Schwankung rührte vermutlich von der verschiedenen Wärmekapazität der beiden Säulen her, und ich befestigte daher zunächst das *Zinkblech*, das eine etwa neunmal so große Wärmekapazität besaß wie das Bleiblech, vor der *kleinen*, das Bleiblech vor der größeren Säule.

Dadurch wurde die Richtung der Ablenkungen schon umgekehrt, und man konnte also durch Variation der Dicke der Bleche eine möglichst geringe Schwankung erzeugen. Die Bleche, mit denen die Versuche mit Röntgenstrahlen gemacht wurden, waren so ausprobiert, daß bei der Bestrahlung mit *Licht* zunächst eine Ablenkung entstand, deren Richtung einer Erwärmung des Bleies entsprach, die nach etwa 15″ ihr Maximum gleich 20 Proz. des unkompensierten Ausschlages erreichte und nach etwa 30″ auf Null zurückging. Das Zinkblech war 1,50 mm dick, das Bleiblech 3,56 mm. Bei allen Versuchen waren die Bleche auf der Vorderseite berußt. Kontrollversuche zeigten, daß die Röntgenstrahlen, die in dem Zinkblech noch nicht zur Absorption gelangen, vollständig zu vernachlässigen sind.

Die Röntgenstrahlen waren von mittlerer Intensität und Härte. Die Röhre arbeitete unter diesen Bedingungen mit sehr zufriedenstellender Gleichmäßigkeit. Da der Induktor durch seine magnetischen Wirkungen die Nullage des Galvanometers veränderte, so wurde er bei jedem Versuch so lange in Betrieb gesetzt, bis das Galvanometer wieder zur Ruhe gekommen war. Dann erst wurde ein Bleiblech fortgezogen, das die Strahlung bis dahin von den Säulen abhielt. Die Exposition dauerte 30″; der unkompensierte Ausschlag infolge der Erwärmung des Zinkbleches durch Röntgenstrahlen betrug in

dieser Zeit etwa 70 Skt. Eine fast ebenso große Ablenkung war nach den Angaben Bumsteads bei der Kompensation zu erwarten. Bei meinen Versuchen fand ich jedoch dieselben Verhältnisse wie bei der Bestrahlung der Bleche mit dem Licht einer Glühlampe.

Der Gang eines Versuches ist nach dem oben Gesagten selbstverständlich: Nachdem die gewünschte Schaltung der Thermosäulen gemacht und — was sich fast vor jedem Versuch nötig erwies — das Galvanometer frisch astasiert war, wurde die Galvanometerempfindlichkeit bestimmt und dann die Wanderung des Skalenbildes alle 15″ abgelesen und notiert. Schien die Wanderung genügend langsam, so wurde das Induktorium in Betrieb gesetzt, die neue Ruhelage notiert und die Bleche exponiert. Als Beispiel möchte ich Versuch 15 anführen.

| Vorperiode | | Induktor in Betrieb | | |
|---|---|---|---|---|
| 0″ | 45,60 | 105″ | 38,1 | |
| 15 | ,15 | 120 | 36,2 | Exposition |
| 30 | ,21 | 135 | 37,7 | Exposition |
| 45 | 46,12 | 150 | 39,7 | |
| 60 | ,30 | | | |
| 75 | 45,70 | (Exposition von 105″ bis 135″) | | |

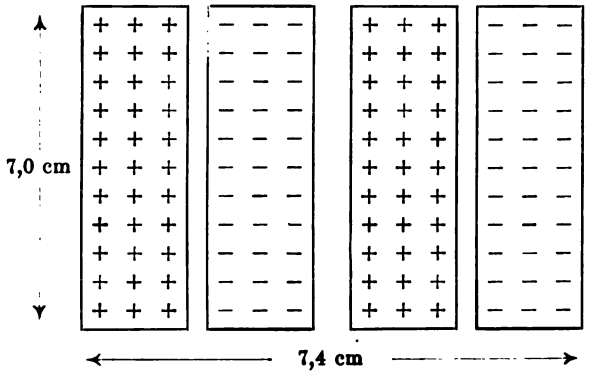
Ausschlag nach den kleinen Zahlen bedeutet hierbei: überwiegende Erwärmung des Bleies, Ausschlag nach den großen Zahlen: überwiegende Erwärmung des Zinkes, bzw. größere Empfindlichkeit von dessen Thermosäule. Genau wie bei den Versuchen mit Licht entsteht also in der ersten Hälfte der Bestrahlungszeit eine Ablenkung nach den kleinen Zahlen, die nach etwa 15″ ihr Maximum erreicht und in der zweiten Hälfte bis auf Null abnimmt. Es wurden diese Versuche mehrfach wiederholt und ergaben stets dasselbe Resultat. Innerhalb der Genauigkeitsgrenzen des Experimentes ist also die bei der Absorption der Röntgenstrahlen entstehende Wärmeentwickelung von derselben Art wie bei Licht. Der Umstand, daß die Röntgenstrahlen in tieferen Schichten absorbiert werden als die Lichtstrahlen kann, bei der Dicke der angewandten Metallplatten von keinem nennenswerten Einfluß sein.

### II. Versuche mit der Differentialthermosäule.

Da nun einerseits die Empfindlichkeit der Anordnung eine nicht besonders große war, andererseits infolge der verschiedenen Empfindlichkeit und Wärmekapazität der beiden Thermosäulen vielleicht doch irgendwelche Fehlerquellen dieses Resultat nur vortäuschen konnten, so entschloß ich mich, eine möglichst symmetrisch gehaltene Thermosäule für diesen Zweck neu zu konstruieren, *bei der beide „Pole" der Strahlung zugekehrt waren.*

Diese Thermosäule bestand aus Eisen-Konstantanelementen, Drähten von 1 mm Durchmesser, die U-förmig gebogen waren, so daß die geraden *und* die ungeraden Lötstellen bestrahlt werden konnten. Diese Drahtbügel waren durch eine durchlöcherte Hartgummiplatte gesteckt, und die Enden, die ca. 1 cm weit vorstanden, fortlaufend verlötet. Eine Thermosäule bestand aus 12 Reihen von je 18 Lötstellen und hatte etwa das Ansehen einer Bürste. Die Lötstellen wurden dann gemeinsam plan geschliffen, so daß ein ebenes Blech alle gleichmäßig berührte. Endlich wurde eine seidene Schnur zwischen die Reihen gesteckt und alle Drähte sorgfältig lackiert. Es wurden zwei derartige Thermosäulen gefertigt und hintereinander geschaltet. Die eine hatte 3,4, die andere 3,7 Ω.

Bezeichnet man mit + die Lötstellen, deren Erwärmung, einen Ausschlag nach den *großen* Zahlen gibt, mit − diejenigen, die das Galvanometer nach den *kleinen* Zahlen ablenken, so läßt sich folgende Zeichnung von der der Strahlung zugekehrten Fläche der Thermosäule machen:



Bei dieser Anordnung ist die Entfernung von der Mitte einer +Fläche zu der Mitte der entsprechenden −Fläche klein gegen die Entfernung Antikathode → Thermosäule = 11 cm. Wenn daher die Säule in dem Blechkasten auch etwas schräg zu dem axialen Röntgenstrahl steht, so hat das keinen merklichen Einfluß auf das Resultat.

Die Schwierigkeit, die in der Verschiedenheit der spezifischen Wärmen von Zink und Blei liegt, wurde (nach einem Vorschlag von Hrn. Dr. Harms) auf folgende Weise umgangen: Es wurden vier Streifen von 0,75 mm dicken Zinkblech[1]) hergestellt und auf jeden ein entsprechender Streifen von 0,27 mm dicken Bleiblech mit der ganzen Fläche mit möglichst wenig Zinn aufgelötet. Diese fournierten Streifen zeigten sich in ihrer Wärmekapazität nicht merklich voneinander verschieden. Je nachdem aber, ob man einen derartigen Streifen mit der Blei- oder mit der Zinkseite den Röntgenstrahlen aussetzt, müßte nach Bumstead seine Temperaturerhöhung größer oder geringer sein.

Die zu prüfenden Bleche wurden mit Rahmen aus dünnem Messingblech auf die Lötstellen aufgepreßt, elektrisch von denselben isoliert. Bei dieser Anordnung kann die Thermosäule nur den *Wärme*zustand der Blechstreifen angeben, unabhängig von dem elektrischen Zustand des Raumes, in dem sie sich befindet. — Zu den Versuchen mit Röntgenstrahlen befanden sich die Säulen wieder in dem innersten von drei, thermisch gegeneinander isolierten Weißblechkästen, deren Vorderwände aus 0,02 mm dicker Aluminiumfolie bestanden.

Die ersten Versuche zum Ausprobieren der Thermosäulen wurden mit homogenen, planparallel abgedrehten Blechen aus Messing, später aus Zink unternommen. Die Bleche waren auf der Vorderseite mit matt schwarzem Zaponlack überzogen. Bestrahlt wurde wieder zunächst mit einer 16 kerzigen Glühlampe aus etwa 35 cm Entfernung. Auch jetzt erwies sich das mit Paraffinöl getränkte Seidenpapier als das günstigste Zwischenmedium. Am vollständigsten war die Kompensation, wenn das Seidenpapier eben vollständig mit Öl getränkt, aber

1) Nach den Messungen von Holtsmark (Ann. d. Phys. 10. p. 522. 1903) genügt diese Dicke, um die Intensität von Röntgenstrahlen mittlerer Härte auf einen ganz minimalen Betrag abzuschwächen.

kein Überschuß vorhanden war. Andernfalls erhielt ich nach jedem Lockern und Neufestklemmen der Blechstreifen bei der Bestrahlung kleine Ablenkungen bald nach den großen, bald nach den kleinen Zahlen. Bei richtiger Durchtränkung erschien das Papier, wenn es mit den Blechen von den Thermosäulen abgenommen wurde, im allgemeinen matt, nur die Stellen, wo es mit den Drahtenden in Berührung gewesen war, glänzten feucht. Als ich mit homogenen Blechen eine zufriedenstellende Kompensation erlangt hatte, wurden die furnierten verwendet, und zunächst alle mit der geschwärzten Bleiseite der Lichtstrahlung zugekehrt. Sie zeigten kein abweichendes Verhalten. Endlich wurden zwei der furnierten Bleche auf der Zinkseite geschwärzt und mit der Bleiseite aufgepreßt. Die Symmetrie ist jetzt nicht mehr ganz erhalten, denn die Wärme, die an der Oberflächenschicht entwickelt wird, pflanzt sich durch das Blei anders fort, als durch das Zink. Die Versuche mit Licht zeigten jedoch, daß dieser Einfluß nicht zur Geltung kommt. Im Verlauf von mehreren Stunden änderte sich die Güte der Kompensation um höchstens 2 Proz. Um jedoch auch diesen Fehler möglichst zu eliminieren, wurden vor und nach jeder Gruppe von Röntgenstrahlenversuchen Kontrollversuche mit der Glühlampe gemacht.

Gegen die Erwartung zeigte sich bei den Versuchen mit Röntgenstrahlen eine Ablenkung, die etwa einem Fünftel der ganzen Wärmewirkung entsprach. *Diese Ablenkung kehrte jedoch ihren Sinn nicht um, wenn die Bleche so vertauscht wurden,* daß die mit der Bleivorderseite auf den anderen Pol der Thermosäulen zu liegen kamen. Nun war die Probe, ob die Kompensation gut sei, mit Licht von etwa der 600fachen Intensität der Röntgenstrahlen gemacht worden. Als ich diese Prüfung mit Licht von einer den Röntgenstrahlen vergleichbaren Intensität wiederholte, zeigte sich derselbe Ausschlag nach den großen Zahlen, gleichfalls von etwa $^1/_5$ des Gesamteffektes, und auch diesmal behielt er seine Richtung und Größe beim Vertauschen der Blechstreifen bei. Es war bei diesen Versuchen schwer, den Wärmeschutz so gut zu gestalten, wie bei den Versuchen mit Röntgenstrahlen. Außerdem wurden Kontrollversuche mit Röntgenstrahlen gemacht, bei welchen die furnierten Bleche durch homogene, etwa 0,5 mm dicke

Bleibleche ersetzt waren. Auch bei diesen Versuchen zeigte sich die Ablenkung nach den großen Zahlen von demselben Betrage. — Daß die Empfindlichkeiten beider Thermosäulen von der Intensität der auffallenden Strahlung, wenn diese um mehrere hundert Male anwächst, nicht ganz unabhängig ist, ist nicht weiter auffallend. Die beobachtete Ablenkung hat also durchaus nichts mit dem von Bumstead angegebenen Effekt zu tun, und da mir dieselbe für die Sicherheit des Resultates belanglos zu sein schien, so habe ich nicht mehr versucht, sie durch Hinzuschalten einiger gerader Thermoelemente zu beseitigen.

Es wurden mit dieser Anordnung folgende Versuche gemacht:

Die beiden Thermosäulen sind mit den auf der Vorderseite geschwärzten Blechstreifen bedeckt, so daß die beiden Streifen, bei denen das *Zink vorne* ist, auf den Polen liegen, die den Ausschlag nach den *großen Zahlen* geben. Etwa 4 mm vor diesen beiden Streifen befinden sich, durch eine Luftschicht getrennt, zwei Bleibleche von 3 mm Dicke, die vorläufig die Röntgenstrahlung von den +Polen abhalten sollen. Zwischen Röntgenröhre und dem äußersten Schutzkasten hängt ein 0,72 mm starkes Zinkblech. Es soll gezeigt werden, daß diese Dicke genügt, um die Röntgenstrahlen auf einen zu vernachlässigenden Bruchteil abzuschwächen.

Bei einer Bestrahlung von 30″ betrug die Ablenkung bei

Versuch 17: −1 Skt.
„ 18: 0 „
„ 19: −0,7 „
} Mittel: − 0,6 Skt.

Nach Entfernung des Zinkbleches mit derselben Anordnung:

Versuch 20: −104 Skt.

Nun werden die Kästen geöffnet und die Bleibleche vor den fournierten Streifen entfernt: die Säule ist jetzt in Differentialschaltung, und zwar heißt Ausschlag nach den großen Zahlen: Überwiegende Erwärmung von dem Zink. Es folgt jetzt der Kontrollversuch mit Licht, dann mehrere Versuche mit Röntgenstrahlen, endlich wieder der Kontrollversuch mit Licht. Nach einer derartigen Reihe — nach jeder Zeile in

der folgenden Tabelle — werden die Bleche vertauscht, so daß der durch einen Bumsteadeffekt bewirkte Galvanometerausschlag nach der anderen Seite hin erfolgen müßte. Wenn an den zur Erzeugung der Röntgenstrahlen dienenden Apparaten eine Änderung vorgenommen wird, so werden wieder zwei gleichnamige Pole der Säule mit Blei abgeschirmt, und aufs neue die Gesamtablenkung durch die Wärmewirkung der Röntgenstrahlen bestimmt. Diese Zahlen sind in der folgenden Tabelle mit „Ausschlag durch *X*-Strahlen" bezeichnet. In der nächsten Kolumne ist angegeben, um wieviel Prozent nach den Versuchen der eine Pol der Thermosäule wärmer wird als der andere, und außerdem, welches Metall auf diesem Pol die Strahlung absorbiert. In der letzten Kolumne endlich ist das den prozentualen Angaben zukommende Gewicht nach der Zahl der jeweiligen Versuche und nach deren Güte (Ruhe des Galvanometers bei dem Versuch) angegeben.

Tabelle.

| | Positiver Ausschlag bedeutet überwiegende Erwärmung von | | Ausschlag durch *X*-Strahlen | Prozent | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| | Zink | Blei | | | |
| | | Bleche vertauscht | | | |
| I | +11,0 | | 92 mm | Blei 6,3 | 2 |
| II | | +22,9 | | | 2 |
| III | +22,3 | | | | 4 |
| IV | | +13,0 | 160 mm | Zink 1,9 | 3 |
| V | +16,2 | | | | 5 |
| VI | | +22,6 | | | ½ |
| VII | +5,7 | | 190 mm | Blei 2,9 | 3 |
| VIII | | +11,5 | | | 2 |

Bei Reihe I bis V war die Härte der Röhre ziemlich konstant und entsprach einer Schlagweite von 3 cm zwischen Messingkugeln von 5 cm Durchmesser. Reihe VI bis VIII wurden dagegen mit einer anderen, sehr harten Röhre gemacht, der eine Schlagweite von 5 bis (bei VIII) 8 cm zwischen diesen

Kugeln äquivalent war. Die Durchdringungsfähigkeit der Röntgenstrahlen hat also auf das Ergebnis keinen merklichen Einfluß.

Man erkennt beim Studium der Tabelle, daß sich die Angaben Bumsteads mit diesen Resultaten durchaus nicht in Einklang bringen lassen. Nimmt man das Mittel aus den einzelnen Prozentangaben mit Berücksichtigung der Gewichte, so findet man, daß das Blei um 0,8 Proz. wärmer wird als das Zink — eine Zahl, die entschieden unter der Meßgenauigkeit liegt.

Immerhin wäre es möglich, daß ein derartig kleiner Bruchteil der Röntgenstrahlenergie dem von Bumstead untersuchten Effekt zukommt. Jedoch zeigen meine Versuche, daß dieser Effekt, wenn überhaupt vorhanden, mit der Absorptionsenergie der Röntgenstrahlen nicht vergleichbar ist und bei ihrer Messung außer Betracht gelassen werden kann.

Es sei mir gestattet, Hrn. Geheimrat Wien für das rege Interesse, das er meinen Untersuchungen entgegenbrachte, meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Würzburg, Physik. Inst. d. Univ.

(Eingegangen 25. September 1907.)

## 12. *Bemerkung zu der Arbeit von K. Fuchs: „Direkte Ableitung einiger Kapillaritätsfunktionen“*[1]*; von G. Bakker.*

In meiner Antwort an Fuchs am 7. September bemerkte ich schon, weshalb ich es *nicht* überflüssig fand, um durch eine elementare Betrachtung und auch durch die Rechnung zu zeigen, daß die totale Abweichung von dem Pascalschen Gesetz in der Kapillarschicht die Kapillarkonstante von Laplace gibt. Ich habe indessen die Arbeit von Fuchs gelesen und meine Meinung hat sich dadurch nicht geändert.

Fuchs findet für die Differenz der Drucke[2] bzw. in einer Richtung senkrecht und parallel der Oberfläche der Kapillarschicht in einem Punkt:

$$-\frac{1}{15}\pi J^5(\varrho\,\varrho''-\varrho'^2),$$

wo $J^5$ eine Konstante darstellt. Diesen Ausdruck betrachtet Fuchs als die Spannung in dem betrachteten Punkt. Hätte er mit Hilfe dieses Ausdruckes die Konstante $H$ von Laplace berechnet, so würde er gefunden haben:

$$H=-\frac{\pi J^5}{15}\int_1^2\left\{\varrho\,\frac{d^2\varrho}{dh^2}-\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2\right\}dh=\frac{2\pi J^5}{15}\int_1^2\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^4 dh,$$

und daß dieser Ausdruck im allgemeinen, selbst nicht angenähert, den Wert der Konstante von Laplace darstellen kann, habe ich in der Zeitschr. f. physik. Chem. gezeigt.[3]

Die Potentialfunktion

$$-f\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}$$

1) K. Fuchs, Wiener Sitzungsber. **98**. p. 1862. 1889.

2) Diese Drucke bedeuten hier die „Force of Cohesion“ von Young. Vgl. „On the Cohesion of Fluids“, Phil. Trans 1805.

3) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chem. **34**. p. 178. 1900.

z. B. ($f$ und $\lambda$ sind Konstanten), welche ihrer Natur gemäß für die Attraktionskräfte zwischen den Volumelementen des betrachteten Agens sehr brauchbar ist und vielleicht die einfachste Funktion darstellt, welche allen Forderungen der Theorie genügt[1]), gibt bei den Vernachlässigungen von Fuchs für den Wert der Kapillarkonstante von Laplace: Null.[2])

Weiter möchte ich noch bemerken, daß statt von Druck[3]), expansive Spannung, kontraktive Spannung und wirkliche Spannung zu reden, wie Fuchs es tut, es vielleicht einfacher ist, mit Thomas Young[4]) den *hydrostatischen* Druck zu betrachten als die Differenz zwischen dem expansiven Druck[5]) (Spannung, repulsive force von Young) und der Kohäsion (force of cohesion von Young).

Wie ich durch eine elementare Betrachtung zeigte[6]), ist die Oberflächenspannung (die Konstante von Laplace) die Differenz zwischen den totalen hydrostatischen Drucken bzw. in einer Richtung senkrecht und parallel der Oberfläche der Kapillarschicht. Geht man also aus von der Auffassung von Young, so sieht man leicht ein, *weshalb* man die Konstante von Laplace berechnen kann als die Differenz zwischen den Kohäsionen in den genannten Richtungen. Auf *diese* Weise aber tut sich nicht die Schwierigkeit hervor, wovon Fuchs redet, wenn er auf p. 1382 l. c. sagt: „Wieder taucht die Frage auf, ob im Elemente $\partial x \partial y \partial H$ der Druck $p$ oder der Druck $q$ herrscht, da doch nur einer von beiden herrschen kann, wenn Gleichgewicht vorhanden ist." ($p$ und $q$ sind bzw. die Drucke, welche das betrachtete Flüssigkeitselement pro Flächeneinheit erleidet an der oberen und an seinen vertikalen Seitenflächen.)

---

1) J. D. van der Waals, Zeitschr. f. physik. Chem. **13.** p. 657. 1894 und G. Bakker, l. c. **33.** p. 485. 1900.

2) G. Bakker, l. c. **34.** p. 178. 1900.

3) Druck bedeutet bei Fuchs *nicht* den hydrostatischen Druck.

4) Thomas Young, „On the Cohesion of Fluids", Phil. Trans. 1805.

5) Ich habe diesen Druck immer den thermischen Druck genannt, und van der Waals war so freundlich, diesen Namen von mir zu übernehmen.

6) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chem. **33.** p. 483. 1900.

Es macht in der Arbeit von Fuchs bisweilen den Eindruck, als ob er die *Abweichung* von dem Gesetz von Pascal mit Hilfe dieses Gesetzes selbst zeigen wollte. Nachdem Fuchs z. B. den „Druck" auf der oberen Seite einer Flüssigkeitsschicht berechnet hat, bemerkt er (p. 1377 l. c.): „Diesen Druck pro Flächeneinheit erleidet $n_0$ (so deutet er die betrachtete Schicht an) auf seiner oberen Fläche. Mit dieser Kraft trachtet sich also $n_0$ horizontal auszubreiten."

Wahrscheinlich sind es Äußerungen dieser Art, welche die Ursache sind, daß die Arbeit von Fuchs nicht die Anerkennung gefunden hat, die sie verdient.

(Eingegangen 24. September 1907.)

## 13. *Eine absolute Messung des Zeemanphänomens; von Anna Stettenheimer.*

(Tübinger Inaugural-Dissertation 1907.)

### Einleitung.

Nach den bisherigen Untersuchungen scheint es, daß die Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfeld proportional mit der Feldstärke erfolgt. Um dieses Gesetz experimentell zu prüfen, ist vor allem nötig, eine genaue Methode zur Messung magnetischer Felder zu besitzen, da die optische Messung mit großer Genauigkeit ausgeführt werden kann. Zugleich ergibt sich dann auch ein absoluter Wert der Proportionalitätskonstanten, mit Hilfe dessen sämtliche bisherigen relativen Messungen (z. B. die von den Herren Runge und Paschen) auf absolutes Maß zurückgeführt werden. Eine solche genaue Messung hat Hr. Färber[1]) ausgeführt und er zeigte, daß die Abweichungen, die die Resultate der früheren Beobachter aufweisen, wahrscheinlich auf Fehlern der Feldmessung beruhen. Um die Resultate von Hrn. Färber zu prüfen und auf höhere Feldstärken auszudehnen, wurden die folgenden Untersuchungen unternommen. Dafür war ausschlaggebend, daß inzwischen die Mittel des Instituts für solche Zwecke besser geworden waren. Besonders die Methode der Feldmessung, die mir von Hrn. Prof. Paschen zur Verfügung gestellt wurde, scheint genauer zu sein, als sie frühere Beobachter besessen haben. Auch der benutzte große Elektromagnet ist für diese Untersuchungen sehr vorteilhaft. Seine Schenkel haben einen Durchmesser von 25 cm und tragen eine Wickelung, die Ströme von 25 Amp. leicht aushalten kann. Auf den Schenkeln stehen quadratische Pole von 25 cm Kante, deren Ecken zur Vermeidung der Streuung alle sorgfältig abgerundet sind, so daß die Kraftlinien in möglichst großer Zahl zur Erzeugung des Feldes dienen. Dadurch erhält man starke, homogene Felder von großer Ausdehnung.

1) A. Färber, Über das Zeemanphänomen, Diss. Tübingen 1902.

**Die magnetische Anordnung.**

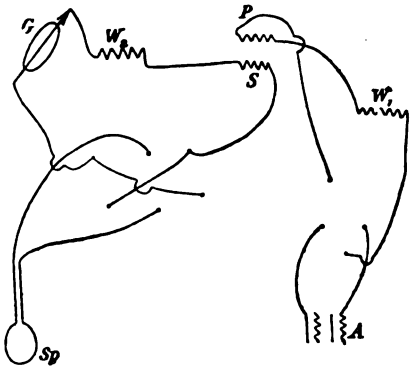
Eine Spule aus eisenfreiem $^1/_{10}$ mm-Draht von 6 mm Durchmesser und 2 mm Dicke war in der Mitte des Feldes in einem Messingrohr so geführt, daß sie beim Herausfallen aus dem Felde sich genau um 90° drehte. In der Endlage, die sich 12 cm über der Anfangslage befand, gingen nun keine Kraftlinien mehr durch die Spule. Daher bildete die Elektrizitätsmenge, die beim Herausfallen in der Spule induziert und durch Galvanometerausschlag gemessen wurde, direkt ein Maß für die Kraftlinienzahl im Felde. Das Galvanometer war ein Deprez-d'Arsonvalgalvanometer, das die Firma Edelmann in München geliefert hatte. Sein Widerstand war 9244 Ω. Es stand ca. $1^1/_2$ m vom Magneten entfernt. Eine Messungsreihe zeigte, daß die ballistischen Ausschläge der Stromstärke genügend angenähert proportional waren, und zwar ergaben sie im Mittel Proportionalität, so daß kein Wert darauf zu legen war, nach beiden Seiten gleiche Ausschläge zu erhalten:

| Widerstand | Ausschlag | | | Konstante |
|---|---|---|---|---|
| | rechts | links | Mittel | |
| 356,644 S.-E. | 66,9<br>66,8 | 66,9<br>67,0 | 66,9 | 2385,9 |
| 256,644 S.-E. | 92,9<br>93,0<br>92,9 | 92,8<br>92,8<br>92,8 | 92,87 | 2383,5 |
| 106,644 S.-E. | 223,9<br>223,9<br>223,8 | 223,0<br>223,0<br>223,1 | 223,45 | 2383,0 |
| 56,644 S.-E. | 421,3<br>421,1<br>421,1 | 419,9<br>419,9<br>419,1 | 420,4 | 2381,3 |
| 51,644 S.-E. | 462,1<br>462,1 | 460,0<br>460,0 | 461,05 | 2381,1 |
| 43,144 S. E. | 496,0<br>496,0 | 493,9<br>493,8 | 494,93 | 2382,9 |

Um von Temperaturänderungen und sonstigen äußeren Einflüssen unabhängig zu sein, wurde vor jeder Feldmessung

eine solche Empfindlichkeitsmessung gemacht und alle Ausschläge auf eine einmal angenommene Normalempfindlichkeit reduziert. Zu diesem Zweck wurde in den Galvanometerkreis noch die Sekundärspule einer wechselseitigen Induktion gelegt, deren Primärspule einen Widerstand von 6,644 S.-E. hatte. Der Primärstrom wurde durch zwei Akkumulatoren erzeugt, hinter denen noch 100 S.-E. eines Rheostaten lagen, so daß die durch Temperaturschwankungen bedingten Änderungen des Kupferwiderstandes von 6,644 S.-E. vernachlässigt werden konnten. Denn es betrug so die Änderung des Gesamtwiderstandes zwischen den äußersten vorkommenden Temperaturgrenzen weniger als $^1/_{1000}$. Es war also nur nötig, die Akkumulatorenspannung genau zu kennen und den Galvanometerausschlag des Sekundärstromes auf eine einmal angenommene Normalspannung zu reduzieren, um für jede Feldmessung die Empfindlichkeit zu erhalten.

Die Spannung der Akkumulatoren wurde durch ein Clarkelement gemessen, das durch Vergleich mit einem Westonelement als richtig befunden wurde. Für die Spannung des Clarkelementes wurde eine Tabelle für Temperaturen zwischen 10 und 20° angelegt, und die Akkumulatorenspannung durch die Kompensationsmethode damit verglichen. Als Nullinstrument diente dasselbe Galvanometer wie zu den übrigen Messungen.




Bei den höchsten Feldern wurden die Ausschläge zu groß, so daß durch Einschalten von Widerstand die Empfindlichkeit verkleinert werden mußte, was, wie eine erneute Messungsreihe zeigte, die Proportionalität des Galvanometers nicht beeinträchtigte. Die Schaltung gestaltete sich daher folgendermaßen:

Es ist $G$ das Galvanometer, $Sp$ die Meßspule, $S$ die Sekundärspule der wechselseitigen Induktion, $P$ die Primärspule derselben, $A$ die Akkumulatorenbatterie, $W_1$ der Rheo-

statenwiderstand von 100 S.-E. und $W_2$ der Widerstand, der bei den höchsten Feldern vors Galvanometer geschaltet wurde.

Bei einer Feldmessung wurden z. B. folgende Operationen vorgenommen: Am Thermometer des Clarkelementes wurde 13,6° abgelesen, der gemeinsame Widerstand $b$ war 5000 S.-E. und der Widerstand $a$ im Akkumulatorenkreis mußte so lange verändert werden, bis bei 9130 S.-E. die Kompensation erreicht war. Die Spannung der Akkumulatoren war daher 4,0572 Volt. Nun wurde der Magnet erregt, die Spule hoch gezogen und die Empfindlichkeit bestimmt. Bei hohen Feldern beeinflußte nämlich die Streuung des Magneten am Orte des Galvanometers die Empfindlichkeit, so daß diese immer bei erregtem Magneten gemessen werden mußte. Dann wurde die Spule ins Feld gesetzt, und der Ausschlag des beim Herausfallen in ihr induzierten Stromes bestimmt. Dieser Ausschlag gab, multipliziert mit einer Konstanten, das Feld. Eine Messung ergab also z. B. folgende Beobachtungsreihe:

| Spannung | Empfindlichkeit | | | Reduz. Empfindlichkeit | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13,6° = 1,4857 Volt | Ruhelage 5090 | | | log Spannung . . | 60823 |
| $a+b$ = 14130 S.-E. | Umkehrp. | Ausschl. | | log Normalspannung | 60909 |
| $b$ = 5000 „ | 7309 | 2219 | Mittel | log Reduktionsfaktor | 00086 |
| | 2880 | 2210 | 221,45 | log Empfindlichkeit | 34528 |
| 15706 | 7309 | 2219 | | log reduz. Empfindl. | 34614 |
| 15014 | 2880 | 2210 | | | |
| 30720 | | | | | |
| 69897 | | | | | |
| 60823 = log Spannung | | | | | |

| Ausschlag des Feldes | | | Reduzierter Ausschlag | | Feld | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ruhelage 5000 | | | log Empfindlichkeit | 34614 | log Ausschlag | 16940 |
| Umkehrp. | Ausschl. | | log Normalempfindl. | 34469 | log Konstante | 83261 |
| 3518 | 1482 | Mittel | log Reduktionsfaktor | 00145 | log Feld | 00201 |
| 3518 | 1482 | 148,2 | log Ausschlag . . | 17085 | Feld | 10050 |
| 6482 | 1482 | | log reduz. Ausschlag | 16940 | | Gauss |
| 6482 | 1482 | | | | | |

Um die Felder in absoluten Einheiten zu erhalten, wurden sie mit dem Feld verglichen, das in den von Hrn. Prof. Paschen beschriebenen[1]) Galvanometerrollen von 1 Amp. er-

1) F. Paschen, Physik. Zeitschr. 6, p. 371. 1905.

zeugt wird. Die Rollen waren vorher von Hrn. Prof. Paschen mit noch größerer Sorgfalt nochmals mit der Tangentenbussole ausgemessen worden. Es wurden drei solcher Rollenpaare benutzt. Die Vergleichung wurde mit einer Spule von 11 mm Durchmesser und 5 mm Dicke ausgeführt. In die Rollen wurde ein genau gemessener Strom geschickt und der Ausschlag des Galvanometers beim Kommutieren dieses Stromes bestimmt. Daraus und aus der bekannten Feldstärke des Spulenpaares bei 1 Amp. wird der Ausschlag des Galvanometers bei 1 Gauss erhalten.

Messungsreihe.

| Strom | Ausschlag | Ausschlag für 1 Amp. | |
|---|---|---|---|
| 2,852 Amp. | 131,0 (rechts) | 45,93 | Mittel |
| 2,840 „ | 131,1 (links) | 46,16 | 46,05 |
| 2,828 „ | 130,0 (rechts) | 45,97 | 46,08 |
| 2,810 „ | 129,8 (links) | 46,19 | |

Nun ist das Feld in den Galvanometerrollen nicht homogen, sondern nimmt von der Mitte aus mit wachsendem Radius ab. Es war mir angegeben worden, daß das Feld in einer Kreislinie von 10 mm Durchmesser den Wert 216,19 Gauss hat, während es in der Mitte 5 Promille größer ist. Da die benutzte Spule 11 mm Durchmesser besitzt, so kann mit genügender Genauigkeit der Mittelwert dieser beiden Feldstärken als für die Induktion wirksames Feld genommen werden. Dieser Wert ist 216,73 Gauss bei 1 Amp.

Der Wert dieses Feldes kann auch theoretisch abgeleitet werden, wenn man den Ausdruck für die Form des Feldes kennt. Nimmt man nun an, das Feld habe in der Richtung senkrecht zur Achse der Rollen die Form $H = H_0(1 - a\varrho^2)$, so findet man denselben Wert wie bei der empirischen Bestimmung. Es ist $H_0$ der Wert des Feldes in der Mitte und $a$ eine Konstante, die aus obigen Daten zu $0{,}0023 \frac{1}{\text{mm}^2}$ gefunden wird. Es ist nun für einen Kreisring mit dem inneren Radius $\varrho$ und dem äußeren Radius $\varrho + d\varrho$ die Induktion

$$\int_0^{\varrho} H_0(1 - a\varrho^2)\, 2\pi\varrho\, d\varrho\,.$$

Fallen auf die Längeneinheit $n$ Windungen, so ist die Induktion auf diese Windungen:

$$n\,d\varrho \int_0^{\varrho} H_0 (1 - a\varrho^2) 2\pi\varrho\,d\varrho .$$

Also im ganzen:

$$\int_0^R n\,d\varrho \int_0^{\varrho} H_0 (1 - a\varrho^2) 2\pi\varrho\,d\varrho = H_0 . 2\pi n \frac{R^3}{6} \left(1 - \frac{3a}{10} R^2\right).$$

Diese Induktion geht aber von einem gleichförmigen Felde

$$H = H_0 \left(1 - \frac{3a}{10} R^2\right)$$

aus. Denn es ist die Induktion des gleichförmigen Feldes $H$:

$$H . 2n\pi \frac{R^3}{6}.$$

Setzt man:

$$H = H_0 \left(1 - \frac{3a}{10} R^2\right),$$

so erhält man die Induktion:

$$H_0 \left(1 - \frac{3a}{10} R^2\right) \cdot 2n\pi \frac{R^3}{6}.$$

Rechnet man den Wert für $H$ aus, so findet man $H = 216{,}82$ Gauss, was mit dem oben abgeleiteten Wert so gut wie identisch ist.

Nun ist also bei 216,73 Gauss der Ausschlag des Galvanometers 46,06 und daher bei 1 Gauss 0,21252.

Um größere Ausschläge des Galvanometers und daher größere Genauigkeit zu erhalten, wurde die Empfindlichkeit im Galvanometerkreis vermehrt. Man erhielt für die drei benutzten Rollenpaare die Werte

0,39495, 0,39515, 0,39591,

die im Verhältnis der Empfindlichkeiten umgerechnet beziehungsweise

0,21304, 0,21262, 0,21252

ergaben. Im Mittel war daher der Ausschlag des Galvanometers bei 1 Gauss 0,21267 mm.

Mit dieser Spule wurde nun ein Etalon geeicht. Dies ist ein zu einem Ring gebogener Elektromagnet. Er trägt einen 6 mm weiten Schlitz. Die Flächen seines Eisenkerns, der sich nach den Enden zu verjüngt, dienen direkt als Pole. Sie

haben einen Durchmesser von 15,5 mm. Hr. Gans hat diese Anordnung zuerst als Etalon angegeben und benutzt. Sein Feld war zwischen den Stromstärken 1,6 und 2,9 Amp. proportional der Stromstärke und darstellbar durch $H = C.J$. Die Konstante $C$ wurde gefunden, indem man die Vergleichsspule aus dem Feld des Etalons herausfallen ließ.

Messungsreihe.

| Strom | Ausschlag | Ausschlag bei 1 Amp. |
|---|---|---|
| 1,640 Amp. | 410,4 | 250,3 |
| 1,812 „ | 455,1 | 251,2 |
| 1,940 „ | 488,4 | 251,8 |
| 1,644 „ | 411,4 | 250,2 |
| 1,822 „ | 457,6 | 251,2 |
| 1,944 „ | 489,6 | 251,9 |

Das Feld des Etalon gab also einen Ausschlag von 251,1. Es hatte daher eine Stärke von 2362 Gauss bei 1 Amp. Diese Konstante war früher schon zweimal von Hrn. Prof. Paschen auf anderem Wege bestimmt worden und zu 2351 und 2354 gefunden worden. Meinen Messungen wurde das Mittel aus diesen drei Bestimmungen 2356 zugrunde gelegt.

Mit diesem nunmehr absolut gemessenen Etalon wurde jetzt die Feldmeßspule geeicht. Man ließ sie bei derselben Anordnung, bei der die Felder des großen Magneten gemessen wurden, aus dem Etalon herausfallen. Es ergab sich folgende Messungsreihe:

| Strom | Ausschlag | Feld | Konstante |
|---|---|---|---|
| 2,232 Amp. | 77,33 | 5258 | 68,00 |
| 2,421 „ | 83,96 | 5704 | 67,94 |
| 2,892 „ | 100,12 | 6814 | 68,06 |
| 2,898 „ | 100,32 | 6828 | 68,06 |
| 2,002 „ | 69,30 | 4717 | 68,06 |
| 2,600 „ | 90,06 | 6126 | 68,02 |
| 2,803 „ | 97,21 | 6616 | 68,06 |
| 2,427 „ | 84,16 | 5718 | 67,94 |

Die Konstante der Spule, d. h. diejenige Größe, mit der die Ausschläge des Galvanometers zu multiplizieren sind, um

die Felder des Elektromagneten in absolutem Maß zu erhalten, ergab sich hieraus zu 68,02 $\frac{\text{Gauss}}{\text{mm Ausschlag}}$.

Das Ampèremeter, das bei allen Strommessungen benutzt wurde, war ein Präzisionsmilliampèremeter von Siemens & Halske. Es wurde durch Spannungsmessung mit dem Clarkelement geeicht und für die vorkommenden Ablesungen eine Korrektionstabelle angelegt.

*Beispiel:* Die Spannung des benutzten Clarkelementes war bei 15,6° $e = 1{,}4333$ Volt. Die Kompensation war erreicht, wenn der gemeinsame Widerstand $w_1 = 30\,000$ S.-E. und $w_2 = 11967$ S.-E. war. Der Strom war dann:

$$i = \frac{e(w_1 + w_2)}{w_1} = 2{,}0051 \text{ Amp.}$$

| Dies entsprach einer Ablesung von | Tatsächlich abgelesen | Korrektion | Beigegebene Korrektion |
|---|---|---|---|
| 100,25 | 100,1 | + 0,1 | + 0,1 |

Für die übrigen Ablesungen wurde:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100,12 | 100,0 | + 0,1 | + 0,1 |
| 80,33 | 80,2 | + 0,1 | 0,0 |
| 139,4 | 139,4 | 0,0 | 0,0 |

Es zeigte sich, daß die dem Instrument beigegebene Korrektionstabelle bei einer Ablesung falsch war.

Da die Fehler aller Zwischenmessungen in Summa den Betrag $^8/_{1000}$ nicht übersteigen, hat die Feldmessung höchstens diesen Fehler.

Es wurden in der Nähe von drei verschiedenen Feldstärken Messungen gemacht, bei 10000, bei 20000 und bei 30000 Gauss. Die benutzten Polschuhe hatten konische Form mit kreisförmigen Stirnflächen von 0,9 cm Durchmesser. Die Poldistanz war anfangs 5, später 3 mm. Der Erregungsstrom des Elektromagneten variierte zwischen 1 und 25 Amp. Vor und nach jeder Aufnahme wurde die Intensität des Feldes gemessen, die durch einfache Stromregulierung gut konstant gehalten werden konnte.

### Die optische Anordnung.

Als Lichtquelle diente der elektrische Funke, der zwischen einer Zink- und einer Cadmiumelektrode parallel den Kraftlinien übersprang. Er wurde durch einen Hochspannungstransformator, der durch den Strom aus der Wechselstrommaschine gespeist wurde, erzeugt. Die Anordnung der Metalle war die von Herren Runge und Paschen angegebene.[1]) Um scharfe Linien zu erzeugen, wurde nach Hemsalech[2]) eine Kapazität parallel und eine danach abgeglichene Selbstinduktion in Serie mit dem Funken geschaltet.

Durch eine Sammellinse und eine Zylinderlinse wurde auf dem Spalt ein scharfes Bild des Funkens entworfen, und von dort gelangte das Licht in den Spektralapparat, der von Hrn. Färber eingehend beschrieben ist.[3]) Es wurde die Anordnung ebenso benutzt, nur war Sorge getragen, daß die Instrumente eine festere Aufstellung erhielten. Der Spalt war durch eine Eisenplatte in der Wand gehalten, der Hohlspiegel stand auf einem Betonpfeiler, das Gitter auf einem Steintisch und die Camera war auf zwei festen Holzstativen festgeklemmt. Es wurde dadurch erreicht, daß sich die Justierung während der ganzen Dauer der Versuche nicht änderte.

Daß das Feld an der Stelle, wo der Funke übersprang, das gleiche war, wie da, wo es gemessen wurde, d. h. daß es im Bereich der Spule homogen war, wurde dadurch nachgewiesen, daß man untersuchte, wie die Aufspaltung der Spektrallinien sich an den fraglichen Stellen des Feldes gestaltete. Im allgemeinen ließ man den Funken in der Mitte des Feldes überspringen, doch zu dieser Untersuchung machte man drei Aufnahmen, bei denen die Elektroden von der Mitte entfernt standen, und zwar bei der einen Platte um 3 mm in der Vertikallinie, bei der zweiten um 3 mm in der Horizontallinie, bei der dritten endlich ließ man den Funken ganz am Rande der Polschuhe überspringen. Es ergab sich, daß die

1) C. Runge u. F. Paschen, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Sitzung vom 10. April 1902.

2) G. A. Hemsalech, Compt. rend. **129.** p. 285. 1899.

3) A. Färber, l. c.

Aufspaltung bei den beiden ersten Platten sich von der in der Mitte erhaltenen innerhalb der Fehlergrenzen nicht unterschied, während sie bei der letzten Platte um 2 Proz. kleiner war. Es fand sich nämlich:

| | Im Mittel aus den anderen Beob. | 1. Platte, 3 mm nach oben | 2. Platte, 3 mm nach außen | 3. Platte, ganz außen |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 . H} \cdot 10^5$ | 19,01 | 19,08 | 19,09 | 18,61 |

Da diese Messungen bei der größeren Poldistanz gemacht wurden, war das Feld bei allen Messungen als vollständig homogen anzusehen.

Die Platten wurden ungefähr 10 Min. exponiert, und auf jeder Platte erhielt man die Linien 4678,339 Cd; 4680,319 Zn; 4722,339 Zn; 4800,097 Cd und 4810,725 Zn.

Die Wellenlängen sind den Standards of wave lengths von Rowland entnommen. Messungen wurden nur an den beiden homologen Linien 4678 und 4680, die als Triplet erschienen, gemacht; doch zur Feststellung des Maßstabes waren auch die anderen Linien nötig. Die Abstände der Linien wurden mit einem Zeissschen Komparator gemessen. Es zeigte sich, daß der Maßstab im photographierten Bereich sehr genau konstant war; dies war auch zu erwarten, da in der Nähe der Gitternormalen beobachtet wurde. Die Feststellung des Maßstabes, d. h. der Zahl, die angibt, wieviel A.E. auf den Millimeter kommen, geschah in folgender Weise:

| Wellenlängendifferenz in A.E. | | | | Abstand in mm | Maßstab A.E. pro mm |
|---|---|---|---|---|---|
| Zwischen | 4678,339 | u. | 4722,339 = 44,000 | 18,1398 | 2,4256 |
| | | | 4800,097 = 121,758 | 50,1943 | 2,4257 |
| | | | 4810,725 = 132,386 | 54,5685 | 2,4261 |
| „ | 4680,319 | u. | 4722,339 = 42,020 | 17.3203 | 2,4261 |
| | | | 4800,097 = 119,778 | 49,3748 | 2,4259 |
| | | | 4810,725 = 130,406 | 53,7490 | 2,4262 |
| „ | 4722,339 | u. | 4800,097 = 77,758 | 32,0545 | 2,4258 |
| | | | 4810,725 = 88,386 | 36,4287 | 2,4263 |

Auf dieser Platte ergab sich danach der Maßstab im Mittel zu $2{,}4259 \cdot 10^{-8}$, was mit den auf den übrigen Platten gefundenen Werten zu einem Mittel von $2{,}4258 \cdot 10^{-8}$ zusammen genommen wurde. Der Abstand der beiden äußeren Komponenten eines Triplets multipliziert mit dem Maßstab gibt die Aufpaltung $\Delta\lambda$.

Die Messungen ergaben nun folgende Resultate:

| $H$ | $\lambda = 4678{,}339$ | | $\lambda = 4680{,}319$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\Delta\lambda$ | $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 . H} \cdot 10^5$ | $\Delta\lambda$ | $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 . H} \cdot 10^5$ |
| 9970 | 0,4143 | 18,99 | 0,4152 | 19,01 |
| 10050 | 0,4160 | 18,92 | 0,4167 | 18,93 |
| 10210 | 0,4257 | 19,05 | 0,4247 | 18,99 |
| 23270 | 0,9671 | 18,99 | 0,9748 | 19,12 |
| 23345 | 0,9683 | 18,95 | 0,9734 | 19,03 |
| 23420 | 0,9770 | 19,06 | 0,9777 | 19,06 |
| 23640 | 0,9860 | 19,06 | 0,9891 | 19,10 |
| 31700 | 1,3161 | 18,97 | 1,3222 | 19,04 |
| 31720 | 1,3134 | 18,92 | 1,3153 | 18,93 |
| 32010 | 1,3302 | 18,99 | 1,3323 | 19,00 |
| 34910 | 1,4577 | 19,08 | 1,4580 | 19,07 |

Im Mittel ist:

| $\lambda$ | $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 . H} \cdot 10^5$ | Mittlerer Fehler der einzelnen Beobachtungen | Mittlerer Fehler des Resultates |
|---|---|---|---|
| 4678,339 | 18,99 | 3 Promille | 1 Promille |
| 4680,319 | 19,03 | $3^1/_4$ Promille | 1 Promille |

Als Gesamtmittel erhält man daraus die Zahl $\mathbf{19{,}01 \cdot 10^{-5}}$.

Legt man die von Hrn. Runge gefundenen [1]) Gesetzmäßigkeiten in den Spektren zugrunde, so ist die Aufspaltung dieser Linien doppelt so groß wie die Aufspaltung der von Runge als normale Triplets angenommenen Linien. Somit ist der Wert für normale Triplets $9{,}50 \cdot 10^{-5}$ und der daraus berechnete Wert für $e/m$ wird $1{,}79 \cdot 10^7$. Dieser Wert weicht

1) C. Runge, Physik. Zeitschr., 8. Jahrg. Nr. 8.; C. Runge u. F. Paschen, Abhandl. d. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1902.

von den genauesten Werten für $e/m$, die aus den Kathodenstrahlen ermittelt wurden, weniger ab als die Werte für Kathodenstrahlen unter sich.

Es ist nun noch von Interesse, das gefundene Resultat mit dem anderer Beobachter zu vergleichen.

Wenn man das vorhandene Material auf die Zn-Linie 4680 umrechnet, findet man folgende Werte:

| | Reese[1] | Kent[2] | Blythwood u. Marchant[3] | Färber[4] | Gehrcke u. Baeyer[5] | Lohmann[6] | Verf. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 . H} \cdot 10^5$ | 17,0 | 16,8 | 17,2 | 18,13 | 20,6<br>21,5 | 18,25 | 19,01 |

Die Werte für die Messungen der Herren Gehrcke und Baeyer sind aus den beiden Werten für $e/m$ abgeleitet, das die Verfasser aus der Aufspaltung der Hg-Linie 491 gebildet haben. Da die beiden Werte schon unter sich so stark differieren, will die Abweichung vom Wert 19,01 nicht sehr viel besagen; außerdem bezieht sich die Messung auf ein Feld von der Größe 1160 Einh.

Der Wert 18,25 ist aus Hrn. Lohmanns Messungen an den Hg-Linien 5790 und 5769 abgeleitet, indem für die von Hrn. Lohmann selbst angeführten Aufspaltungen der Herren Runge und Paschen der Wert 18,13 zugrunde gelegt ist. Dagegen ergibt sich nach Runge unter Annahme der neuen Rungeschen Gesetze aus dem Gesamtmaterial der Lohmannschen Messungen $e/m = 1{,}75$ statt meines Wertes 1,79.

Was die Abweichung von Hrn. Färbers Wert betrifft, so dürfte wohl vor allem der Grund darin liegen, daß der bei diesen Messungen benutzte Elektromagnet homogene Felder

1) H. M. Reese, Astrophys. Journ. **12.** 1900.

2) N. A. Kent, Astrophys. Journ. **13.** 1901.

3) Lord Blythwood u. E. Marchant, Phil. Mag. **49.** 1900.

4) A. Färber, l. c.

5) E. Gehrcke u. O. v. Baeyer, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch., 8. Jahrg. Nr. 20.

6) W. Lohmann, Beiträge zur Kenntnis des Zeemanphänomens, Diss. Halle 1907.

von so großer Ausdehnung liefert. Außerdem benutzte Hr. Färber zur Zwischenmessung eine Wismutspirale, deren Temperaturkoeffizient eine Unsicherheit gibt.

Der Wert 19,01 scheint einen äußersten Fehler von 13/1000 nicht zu übersteigen, da die optische Messung einen äußersten Fehler von 5 Promille und die Feldmessung einen äußersten Fehler von 8 Promille hat.

Legt man den Wert 19,01 zugrunde, so ergibt sich für das Feld, das den Messungen der Herren Runge und Paschen zugrunde liegt, der Wert 22950 Gauss.

Nach der Fertigstellung dieser Arbeit erschien von P. Weiss und A. Cotton eine Untersuchung[1]), die sich dasselbe Ziel gesetzt hatte. Ihr Resultat differiert von dem meinigen um $1^1/_2$ Proz. Da der äußerste Fehler meiner Messungen 13 Promille beträgt und der der beiden Verfasser nach den vorliegenden Daten noch größer zu sein scheint, worauf Hr. Paschen in seiner Veröffentlichung in der Physik. Zeitschr. Nr. 16, bereits hingewiesen hat, so liegen die beiden Resultate beinahe innerhalb der Fehlergrenzen.

Die vorliegenden Untersuchungen sind von Winter 1905/06 bis Winter 1906/07 im Physikalischen Institut der Universität Tübingen auf Veranlassung und unter Aufsicht von Hrn. Prof. Paschen unternommen worden. Im Winter 1906/07 hat sich Hr. P. Gmelin daran beteiligt.

Ich gestatte mir, auch an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

1) P. Weiss u. A. Cotton, Journ. de Phys., Juin 1907.

(Eingegangen 2. Oktober 1907.)

## 14. *Zur Cohnschen Elektrodynamik; von R. Gans.*

Unter diesem Titel hat Hr. Laue[1]) eine Note erscheinen lassen, die er mir liebenswürdigerweise bereits in der Korrektur zur Verfügung stellte. Auf dem Dresdener Naturforscherkongreß haben wir Gelegenheit gehabt, eingehender über die fraglichen Punkte zu sprechen, und sind übereingekommen, daß ich noch einige Bemerkungen hinzufüge, damit die Stellung der Cohnschen Theorie zur Lorentzschen möglichst deutlich sich ergäbe.

Aus der Linearität der Lorentzschen Gleichungen folgt, daß die Felder mehrerer Elektronen sich einfach superponieren, z. B. auch das „innere" Feld eines beliebig bewegten Elektrons und das „äußere" Feld der Elektronen, welche sich auf einem Kondensator befinden bzw. das Magnetfeld eines Elektromagneten hervorrufen wie bei den Kaufmannschen Versuchen.

Es ist also

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_i + \mathfrak{E}_a, \\ \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i + \mathfrak{H}_a, \end{cases}$$

Ebenso kann nach Lorentz die Kraft in zwei Summanden zerlegt werden, von denen der eine $\mathfrak{f}_i$ als „Kraft des Elektrons auf sich selbst", der andere $\mathfrak{f}_a$ als äußere Kraft angesprochen werden kann. Denn wenden wir die Gleichung für die Kraft auf die Volumeinheit

$$(2)\qquad \mathfrak{f} = \varrho\,\mathfrak{E} + \varrho\left[\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathfrak{H}\right],$$

wo $\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{E}$ ist, auf eine im Elektron befindliche Volumeinheit an, so wird

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_i + \mathfrak{f}_a,$$

wo

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_i = \operatorname{div}\mathfrak{E}_i \,.\, \mathfrak{E}_i + \operatorname{div}\mathfrak{E}_i \left[\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathfrak{H}_i\right], \\ \mathfrak{f}_a = \varrho\,\mathfrak{E}_a + \varrho\left[\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathfrak{H}_a\right] \end{cases}$$

1) M. Laue, Ann. d. Phys. **23**. p. 991. 1907.

ist. $\mathfrak{f}_i$ hängt nur von den Feldstärken des Elektrons selbst ohne Vorhandensein eines äußeren Feldes ab, weil an der Stelle des Elektrons $\operatorname{div} \mathfrak{E}_a = 0$ ist.

Nun läßt sich $\mathfrak{f}_i$ auf die bekannte Form bringen

$$\mathfrak{f}_i = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \tag{4}$$

Die rein elektromagnetisch begründete Dynamik des starren Elektrons setzt

$$\int \mathfrak{f}\, dS = 0,$$

d. h.

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{G}\, dS = \int \varrho \left\{ \mathfrak{E}_a + \left[\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathfrak{H}_a\right] \right\} dS. \tag{5}$$

$\int \mathfrak{G}\, dS$ hängt nur von Größen ab, die durch das Elektron selbst und seine Bewegung gegeben sind; die Form der linken Seite zeigt, daß die Kraft sich aus einer Bewegungsgröße ableiten läßt, und es folgt die Existenz einer Masse bei quasistationären Bewegungen, die außer vom Radius und der Ladung des Elektrons nur von seiner Geschwindigkeit abhängig ist.

Ganz anders liegt der Sachverhalt nach der Cohnschen Theorie:

Erstens superponieren sich das Feld des Elektrons und die äußeren Felder (des Kondensators bzw. des Elektromagneten) im allgemeinen nicht. Darauf weist Hr. Laue eingehend hin. Dann superponieren sich die Kräfte auch nicht (das habe ich bereits bemerkt[1]), so daß man nicht in der Lage ist, die wirkende Kraft in zwei Summanden zu zerlegen, von denen der eine die Kraft des Elektrons auf sich selbst, der andere die äußere Kraft darstellt.

Zweitens aber existiert nach Cohn keine elektromagnetische Bewegungsgröße, wie aus der Cohnschen Form der Kraft auf die Volumeinheit[2]) folgt; diese lautet bis auf die fiktiven Spannungen:

$$-\frac{d\mathfrak{G}}{dt} - \tfrac{1}{2}[\mathfrak{G}, \operatorname{rot}\mathfrak{w}] + \mathfrak{G}\operatorname{div}\mathfrak{w} - (\operatorname{def}\mathfrak{w})\mathfrak{G}. \tag{6}$$

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 18. p. 184—185. 1905.

2) E. Cohn, Berliner Ber. 53. p. 1414. 1904. Gl. (26); siehe auch R. Gans, l. c. p. 184. Gl. (20) und die Bemerkung unten auf der Seite. Hier ist auch die Bedeutung des Symbols (def $\mathfrak{w}$) gegeben.

Der erste Term hat allerdings genau die Form wie bei Lorentz, die anderen drei Terme verschwinden sowohl im Elektron, wo $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit eines starren Körpers ist, als im Vakuum, wo $\mathfrak{w} = 0$ ist, aber in der Übergangsschicht, in der $\mathfrak{w}$ sehr schnell aber stetig von der Geschwindigkeit des starren Elektrons auf Null übergehen muß, können $\mathrm{rot}\,\mathfrak{w}$, $\mathrm{div}\,\mathfrak{w}$, $\mathrm{def}\,\mathfrak{w}$ nicht gleichzeitig verschwinden; dort liefern die letzten drei Terme endliche Beiträge zur Kraft, da zwar das Volumen der Übergangsschicht unendlich klein, aber $\mathrm{rot}\,\mathfrak{w}$, $\mathrm{div}\,\mathfrak{w}$ und $\mathrm{def}\,\mathfrak{w}$ wenigstens zum Teil unendlich groß sind.

Da in der Übergangsschicht sowohl $\mathfrak{E}$ als $\mathfrak{w}$ sich sehr schnell verändern, so *ist die Kraft nicht einmal bestimmt*, wenn man nicht extra angibt, in welcher Weise die willkürliche Übergangsschicht sich bewegen soll, was bei Lorentz unnötig ist, da bei ihm die Kraft auf ungeladene Körper Null ist, während bei Cohn nur die Kraft auf ungeladene *ruhende* Körper verschwindet.[1])

Daraus folgt, daß im allgemeinen auf Grund der Cohnschen Theorie überhaupt keine elektromagnetische Masse existiert, und nicht, daß sie zwar existiert, aber vom äußeren Felde abhängig ist.

Die Schlußbemerkung des Hrn. Laue, daß im allgemeinen auf Grund der Cohnschen Theorie die Möglichkeit einer Dynamik des Elektrons nicht bewiesen sei, will Hr. Laue so verstanden wissen, daß die Analogie zur gewöhnlichen Mechanik nicht existiert, denn die Nichtsuperposition der Felder und das Fehlen einer Masse ist natürlich kein Widerspruch in sich und spricht nicht gegen die Möglichkeit einer Dynamik.

Ja, sie läßt sich sogar auf dieselbe Grundgleichung aufbauen wie bei Lorentz

$$\int \mathfrak{f}\,\delta\mathfrak{s}\,dS = 0, \tag{7}$$

welche aussagt, daß das Elektron sich so bewegt, daß die virtuelle Arbeit der Kräfte verschwindet, wenn $\delta\mathfrak{s}$ eine virtuelle Verschiebung bedeutet. Allerdings folgt aus (7) nur

$$\mathfrak{F} = \int \mathfrak{f}\,dS \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = \int [\mathfrak{r}, \mathfrak{f}]\,dS \tag{8}$$

1) E. Cohn, l. c. p. 1414 letzter Abschnitt.

für die Gesamtkraft und das Drehmoment, wenn alle Volumelemente, an denen Kräfte angreifen, starr miteinander verbunden sind. Das ist aber nach Cohn wegen der Eigenschaften der Übergangsschicht nicht der Fall. Das habe ich bei der Berechnung der Kräfte auf einen Kondensator im Vakuum nicht genügend beachtet.[1])

Die longitudinale Masse habe ich nach der Cohnschen Theorie aus der Energie eines mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Elektrons abgeleitet[2]), da Hr. W. Wien[3]) gemeint hatte, daß bei stationärer Bewegung eines geladenen Körpers die Cohnschen Differentialgleichungen direkt in die eines ruhenden Körpers übergehen, und nur eine magnetische Wirkung, dem Biot-Savartschen Gesetz entsprechend, übrig bleibe. Diese Masse hat nach obigem keine allgemeine Bedeutung, man kann von ihr sprechen, wenn Kräfte nicht-elektromagnetischen Ursprunges auf ein Elektron wirken. Die transversale Masse, die ich am Ende der Arbeit erwähnt habe, existiert überhaupt nicht.

Wenn demnach die Cohnsche Theorie auch wesentlich komplizierter als die Lorentzsche erscheint, sobald es sich um die Dynamik des Elektrons handelt, und wenn auch ohne Angabe über die Bewegung der Übergangsschicht Elektron–Vakuum die Kräfte nicht bestimmt sind, so ist eine Elektrodynamik nach Cohn doch nicht prinzipiell unmöglich; allerdings weicht sie von der Dynamik unserer Mechanik noch mehr ab, als die Dynamik nach der Lorentzschen Theorie dies schon tut.

Tübingen, Physik. Institut, 25. Sept. 1907.

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **18**. p. 172. 1905.
2) R. Gans, Ann. d. Phys. **16**. p. 516. 1905.
3) W. Wien, Ann. d. Phys. **18**. p. 641. 1904.

(Eingegangen 3. Oktober 1907.)

---

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 13.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 24.

## 1. *Zur Theorie des geschlossenen Resonators;* von M. Thiesen.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. *Einleitung.* Unter gewissen ideellen Voraussetzungen bleiben in geschlossenen Räumen stehende einmal vorhandene Schallschwingungen dauernd erhalten. Die Frequenz solcher Schwingungen hängt von der Größe und Form des Raumes ab; die Fälle, für welche die Aufgabe gelöst ist, die Beziehung zwischen der Form des Raumes und den möglichen Schwingungszahlen zu ermitteln, sind in einer besonderen Schrift von einem Schüler Kleins behandelt worden.[1])

Sind die Voraussetzungen der Theorie hinreichend erfüllt, so wird man durch Messung der Schwingungszahlen in Räumen von bekannter Größe die Schallgeschwindigkeit des Gases, welches den Raum erfüllt, berechnen können. Man wird dazu, schon um eine genaue Ausmessung ausführen zu können, eine der einfachsten Raumformen wählen, deren Theorie bekannt ist. Für *relative* Messungen ist es aber überhaupt nur nötig, daß der Raum bei den verschiedenen Gasfüllungen derselbe bleibt, da dann die Schwingungszahlen sich wie die Schallgeschwindigkeiten verhalten müssen. Auch einer etwa durch die Temperatur verursachten Änderung der Dimensionen des Raumes kann man leicht Rechnung tragen, da bei gleicher Raumform und Schallgeschwindigkeit die Wellenlängen den linearen Dimensionen proportional sind.

In genügender Näherung kann die Theorie meistens auch den Umstand berücksichtigen, daß, infolge der Elastizität seiner Wände, der Raum selbst veränderlich ist. Unter gewöhnlichen Umständen wird eine Korrektion aus diesem Grunde kaum anzubringen sein.[2])

1) Fr. Pockels, Die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891.

2) Vgl. D. J. Korteweg, Wied. Ann. 5. p. 525. 1878.

Eine praktisch wichtige und schwieriger zu behandelnde Abweichung von der einfachen Theorie soll den Gegenstand des vorliegenden Aufsatzes bilden. Reibung und Wärmeleitung beeinflussen die Schallgeschwindigkeit auch bei der ungehinderten Ausbreitung im freien Raume, aber bei den üblichen Tonhöhen in ganz verschwindendem Maße. Dagegen kann ihr Einfluß auf die Frequenz der stehenden Wellen in einem geschlossenen Raume recht merklich werden. Die Theorie muß jetzt die Energiezufuhr berücksichtigen, durch welche die Schwingungen erzeugt und unterhalten werden; damit wird die einfache Theorie des geschlossenen Resonators hinfällig. Das Problem, welches prinzipiell nicht mehr von der Theorie des offenen Resonators verschieden ist, muß dann so gefaßt werden, daß man fragt, in welchem Takte die Energie dem Resonator unter gegebenen Bedingungen zugeführt werden muß, damit die Schallschwingungen im Resonator größte Werte annehmen.

Immerhin wird man bei passend gewählten Verhältnissen die Lösungen der einfachen Theorie des geschlossenen Resonators als brauchbare Näherungen ansehen können und man kommt sogar, wie sich zeigen wird, in erster Näherung zu einer verhältnismäßig auch noch einfachen Theorie, in welcher die Art und Weise, in der die Energie dem Resonator zugeführt wird, oder die Art der Koppelung zwischen dem erregenden und dem erregten System keine Rolle spielt.

Die Grundlagen einer Theorie der Schallschwingungen unter Berücksichtigung von Reibung und Wärmeleitung rühren von Kirchhoff her.[1]) Helmholtz hatte eine Formel angegeben, nach welcher die Reibung eine sehr merkliche Rolle bei der Schallbewegung in engen Röhren spielt[2]); aber die Beobachtung ergab eine noch größere Abhängigkeit von der Röhrenweite als Helmholtz' Formel. Man vermutete, daß auch die Wärmeleitung in Frage käme. Diesen Gedanken

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **134.** p. 177. 1868; Abhandlungen **1.** p. 540. 1882.

2) H. v. Helmholtz, Verh. d. nat.-hist.-medizin. Vereins zu Heidelberg **3.** p. 16. 1863; Abhandlungen **1.** p. 383. 1882. Eine Ableitung gab Lord Rayleigh, Theory of Sound **2.** p. 286—287. London 1878. Übersetzung von F. Neesen **2.** p. 371—372. Braunschweig 1880.

führte Kirchhoff aus und kam für zylindrische Röhren von unbegrenzter Länge zu einer Formel, in welcher der Koeffizient der Helmholtzschen Korrektion in der Tat durch Berücksichtigung der Wärmeleitung vergrößert ist. Ob und wie weit diese Formel auch quantitativ den Beobachtungen entspricht, konnte Kirchhoff nicht feststellen, da damals noch keine brauchbaren Beobachtungen über die Wärmeleitung der Gase vorlagen. Theoretisch hatte freilich Maxwell eine Beziehung zwischen Reibung und Wärmeleitung aufgestellt; aber diese Beziehung nimmt, wie Kirchhoff hervorhebt, keine Rücksicht auf die Strahlung und konnte daher viel zu kleine Werte für die Wärmeleitung geben.[1])

Später sind einerseits Versuche über die Wärmeleitung der Luft und anderer Gase ausgeführt, andererseits besondere Untersuchungen zur Prüfung der Kirchhoffschen Formel angestellt worden. Es handelt sich in letzterem Falle um die Fragen, ob der Koeffizient in Helmholtz' Formel überhaupt konstant sei und ob er, falls dies zutrifft, den Wert habe, wie er sich nach Kirchhoff aus den bekannten Reibungs- und Wärmeleitungskoeffizienten berechnen läßt. Zu ganz bestimmten Ergebnissen haben diese Untersuchungen nicht geführt; im allgemeinen weisen sie aber darauf hin, daß auch die von Kirchhoff abgeleitete Korrektion für enge Röhren noch zu klein sei.

Bei einer Prüfung der Grundlagen von Kirchhoffs Theorie muß dieser Umstand sogleich auffallen. Denn Kirchhoff scheint der Wärmeleitung vielmehr einen zu großen Einfluß zuzuschreiben. Er nimmt an, daß das Gas an den Zylinderwänden durch den Einfluß dieser Wände stets auf gleicher Temperatur erhalten werde. Demgegenüber kann man an die Erfahrung denken, daß der Austausch von Wärme zwischen einer Flüssigkeit und einem festen Körper an der Grenzfläche unter Umständen ein starkes Hindernis findet.

---

1) Diese Bemerkung Kirchhoffs ist von späteren Beobachtern mißverstanden worden. Sie spielt keine Rolle bei einer Prüfung der Kirchhoffschen Formel unter Zugrundelegung experimenteller Daten für die Wärmeleitung. Diese haben auch meist kleinere Werte ergeben als die Formel Maxwells.

Andererseits muß man erwarten, daß der Einfluß der Wärmeleitung sich hauptsächlich an den Röhrenenden geltend machen wird, da bei Bewegungen, die wesentlich parallel der Achse erfolgen, hier die Dichte- und also auch die Temperaturänderungen am größten sind. Die Theorie Kirchhoffs kann aber die Bedingungen an den Röhrenenden gar nicht berücksichtigen, und man erkennt schon hieraus, daß diese Theorie bestenfalls nur dann gelten kann, wenn, wie man es bei der Kundtschen Methode voraussetzt, die Bedingungen an den Enden ohne merklichen Einfluß sind, daß es aber unzulässig wäre, sie ohne weiteres auch auf *die* Methoden anzuwenden, bei denen Röhren- und Wellenlänge von gleicher Ordnung sind. Da eine solche Methode auch von mir ausgearbeitet wurde[1]), so habe ich den Versuch unternommen, neue Formeln abzuleiten, welche auch für solche Fälle gültig sind. Vorausgeschickt ist die Behandlung der Kugel, für welche die Endformeln verhältnismäßig leicht abzuleiten sind.

Einwände, welche sich vielleicht gegen Kirchhoffs analytische Behandlung des Problems erheben lassen, treffen nur das spezielle Problem des Kreiszylinders, nicht die eigentliche Grundlage der Theorie. Schon um einige Voraussetzungen allgemeiner fassen zu können, ist aber auch diese Grundlage neu hergeleitet worden, nach welcher die Lösung des Problems von mehreren Funktionen abhängt, welche Lösungen von drei nur durch einen Parameter unterschiedenen partiellen Differentialgleichungen sind.

Bei der weiteren Aufgabe, diese Funktionen für besonders einfach gestaltete praktisch wichtige Körper, die Kugel und den Zylinder zu bestimmen, konnte von verschiedenen Voraussetzungen ausgegangen werden, die sich der Wirklichkeit mehr oder weniger gut anschließen. Von vornherein aussichtslos mußte die Behandlung des Problems in dem Sinne erscheinen, daß man die Art der Zuleitung des Schalles zum Resonator oder die Rückwirkung der erregten auf die erregende Schallschwingung berücksichtigte, da dies Problem selbst für den elektrischen Strom in den einfachsten Fällen noch nicht ge-

1) Physik.-techn. Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. **25**. p. 111. 1895.

löst ist.[1]) Dagegen wurde zunächst vorausgesetzt, daß die Bedingungen an der Oberfläche gegeben seien, und insbesondere wurden diese Bedingungen nach Möglichkeit den Versuchsbedingungen angepaßt, wie sie sich bei der Methode des geschlossenen Resonators praktisch gestaltet haben.

Vollständig durchgeführt ist diese Behandlung allerdings in keinem Falle; vielmehr sind die Endformeln nur in einer ersten Näherung abgeleitet worden, welche, wie schon angedeutet, eine große Vereinfachung zuläßt. Dadurch ist freilich der Nachteil entstanden, daß die Schlußformeln nicht auf dem kürzesten Wege abgeleitet werden, und daß die Durchführung nicht ganz einheitlich erscheint. Dem steht aber der praktische Vorteil gegenüber, daß man für solche Fälle, in denen die erste Näherung nach einer oder der anderen Richtung hin nicht genügt, die Grundlagen vorfindet, auf denen man weitere Näherungen aufbauen kann. Auch wenn man zwar bei der ersten Näherung für die Schwingungszahl stehen bleiben, aber Näheres über die Form und über die Intensität der Schwingungen bei gegebener Erregung erfahren will, werden die hier gegebenen Formeln, soweit sie weiter gehen, als zur unmittelbaren Lösung der gestellten Aufgabe nötig ist, ihre Dienste tun.

2. *Ableitung der partiellen Differentialgleichungen.* Wir setzen voraus, daß die Geschwindigkeiten sowie die zeitlichen und örtlichen Änderungen von Druck und Temperatur sehr klein seien, und daß wir bei weiterer Differentiation die Faktoren der Differentialquotienten als konstant behandeln können, mit anderen Worten, daß die zu behandelnden Gleichungen den Charakter von linearen Differentialgleichungen besitzen. Damit sind alle Erscheinungen ausgeschlossen, die von der Intensität des Schalles abhängen.

Es seien $x'$, $y'$, $z'$ die Komponenten der Geschwindigkeit; $\varepsilon$, $p$, $\vartheta$ Dichte, Druck und Temperatur; $t$ die Zeit; $\eta_1$ und $\eta_2$ Reibungsindizes (nach Stokes' Bezeichnung); $\Delta$ das Symbol

1) Allerdings scheint die Schwierigkeit solcher Lösungen durch H. Weber, Journal f. reine u. angew. Mathem. 75. p. 89. 1875 überschätzt zu werden.

für die Summe der zweiten Differentialquotienten; $V$ die Divergenz der Geschwindigkeit; also

$$V = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z}. \tag{1}$$

Dann ist

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon V = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} = \eta_1 \Delta x' + \eta_2 \frac{\partial V}{\partial x}, \tag{3}$$

wozu die analogen Gleichungen für $y$ und $z$ kommen.

An Stelle von $x'$, $y'$, $z'$ kann man drei neue Größen einführen durch

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ y' &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}, \\ z' &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Hieraus folgt

$$V = \Delta \varphi. \tag{5}$$

Setzt man ferner

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{\partial \psi}{\partial t} - \eta_1 \Delta \psi, \\ B &= \frac{\partial \chi}{\partial t} - \eta_1 \Delta \chi, \\ C &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \eta_1 \Delta \varphi - \eta_2 V + \int \frac{dp}{\varepsilon}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

so gehen die Gleichungen (3) über in

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

aus denen folgt

$$0 = \Delta C. \tag{8}$$

Aus der Zustandsgleichung des betrachteten Gases möge die Beziehung folgen

$$dp = \mathfrak{a}^2 d\varepsilon + \varepsilon e\, d\vartheta. \tag{9}$$

Differentiieren wir nun die letzte der Gleichungen (6) nach $t$ und eliminieren $\partial p/\partial t$ durch (9), $\partial s/\partial t$ durch (2) und $V$ durch (5), so ergibt sich

$$(10) \qquad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\eta_1 + \eta_2)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi - a^2 \Delta\varphi + e\frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Endlich stellen wir noch eine Beziehung dadurch auf, daß wir die Summe der beiden Wärmengen gleich Null setzen, von denen die eine in dem Elementarvolumen infolge der zeitlichen Änderung von Dichte und Temperatur entsteht, die andere ihm durch die Wärmeleitung zugeführt wird. Dieser Beziehung läßt sich die Form geben

$$(11) \qquad 0 = \varepsilon e \eta_3 \Delta\vartheta + (b^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon e \frac{\partial \vartheta}{\partial t},$$

oder bei Benutzung von (2) und (5)

$$(12) \qquad e\eta_3 \Delta\vartheta - (b^2 - a^2)\Delta\varphi = e\frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Unter Benutzung dieser Gleichung können wir noch an Stelle von (9) etwas zweckmäßiger schreiben

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - b^2 \Delta\varphi + e\eta_3 \Delta\vartheta = (\eta_1 + \eta_2)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi + \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Aus den Gleichungen (8), (12) und (13) ließen sich ohne Schwierigkeit partielle Differentialgleichungen ableiten, die nur die Größen $\varphi$ oder $\vartheta$ enthalten; doch wird dadurch die weitere Behandlung nicht vereinfacht.

3. *Allgemeine Lösung in rechtwinkligen Koordinaten.* Da die aufgestellten Differentialgleichungen linear sind, so kann ihre allgemeine Lösung aus partikularen zusammengesetzt werden. Wir nehmen für diese Lösungen an, daß sie die Zeit in Form eines Faktors $e^{i\alpha t}$ enthalten, wo $i$ die imaginäre Einheit, $\alpha$ eine Konstante bezeichnet, die wir später als reell voraussetzen. Es werden also im folgenden nur die rein periodischen Teile der Bewegung und der Temperatur berücksichtigt werden. Insoweit die Lösung von den Koordinaten abhängt, bezeichnen wir sie mit $H_{[\varkappa^2]}$; dieses Symbol, bei dem $\varkappa^2$ eine im allgemeinen komplexe Konstante ist, soll eine Größe bezeichnen, welche der partiellen Differentialgleichung

$$(14) \qquad \Delta H_{[\varkappa^2]} = 4\varkappa^2 H_{[\varkappa^2]}$$

genügt.

Man findet nun Lösungen der Gleichungen (8), (12), (13), in denen $\varphi$, $\vartheta$, $C$ nur durch einen konstanten Faktor unterschieden sind, wenn man setzt

$$(15)\qquad \begin{cases} \varphi = H_{[\varkappa^2]}, \\ \vartheta = h\, H_{[\varkappa^2]}, \\ C = c\, H_{[\varkappa^2]}. \end{cases}$$

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist zunächst $c = 0$, so folgt aus (12) und (13)

$$(16)\qquad e\,h(4\,\varkappa^2\eta_3 - i\,\alpha) = (\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2)\,4\,\varkappa^2;$$

$$(17)\qquad \alpha^2 + 4\,\mathfrak{b}^2\varkappa^2 + 4\,\varkappa^2\, i\,\alpha(\eta_1 + \eta_2) = 4\,\varkappa^2\, e\,h\,\eta_3.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Elimination von $e\,h$ eine Gleichung zweiten Grades für $\varkappa^2$. Ihre beiden Wurzeln mögen mit $\varkappa_1^2$ und $\varkappa_2^2$ bezeichnet und die zugehörigen Werte von $h$ ebenfalls durch Indizes unterschieden werden.

Ist andererseits $c$ von Null verschieden, so ist, wegen Gleichung (7), $\varkappa^2 = 0$ und man erhält, da $\alpha$ nicht verschwinden soll,

$$h = 0, \quad c = i\,\alpha.$$

Die vollständigen Lösungen bei gegebenem $\alpha$ sind also, wenn wir die verschiedenen Funktionen durch Indizes unterscheiden,

$$(18)\qquad \begin{cases} \varphi = H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]} + H_{0[0]}, \\ \vartheta = h_1\, H_{1[\varkappa_1^2]} + h_2\, H_{2[\varkappa_2^2]}, \\ C = i\,\alpha\, H_{0[0]}. \end{cases}$$

Aus dem soeben gefundenen Werte von $C$ ergeben sich $A$ und $B$ mittels der Gleichungen (7) und aus diesen für $\psi$ und $\chi$ mittels (6) die partikulären Lösungen

$$\psi = \frac{A}{i\,\alpha}; \quad \chi = \frac{B}{i\,\alpha}.$$

Allgemeine Lösungen erhält man durch Zufügung von Lösungen der Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial\,\psi}{\partial\,t} - \eta_1\,\Delta\,\psi.$$

Man kann dieser allgemeinen Lösung die folgende Form geben. Es sei

$$(19)\qquad 4\,\varkappa_3^2 = \frac{i\,\alpha}{\eta_1},$$

so ist

$$(20)\qquad \begin{cases} \psi = \dfrac{A}{i\alpha} + \dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} H_{4[\varkappa_2^2]}, \\ \chi = \dfrac{B}{i\alpha} + \dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} H_{5[\varkappa_2^2]}. \end{cases}$$

Aus den Werten von $\varphi$, $\psi$, $\chi$ folgt nun schließlich mittels der Gleichungen (4) unter Berücksichtigung der Bedeutung von $A$ und $B$, da sich $H_{0[0]}$ forthebt,

$$(21)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{\partial\cdot}{\partial x}\left\{H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} H_{4[\varkappa_2^2]}\right\}, \\ y' = \dfrac{\partial\cdot}{\partial y}\left\{H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} H_{5[\varkappa_2^2]}\right\}, \\ z' = \dfrac{\partial\cdot}{\partial z}\left\{H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} H_{4[\varkappa_2^2]} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} H_{5[\varkappa_2^2]}\right\}. \end{cases}$$

4. *Umformung für Rotationskörper.* Behufs ihrer Anwendung auf Rotationskörper sollen jetzt die Gleichungen (21) durch Einführung von Polarkoordinaten umgeformt werden. Es sei

$$(22)\qquad \begin{cases} x + iy = \varrho\, e^{i\sigma}, \\ x' + iy' = \varrho'\, e^{i\sigma} + i\varrho\,\sigma' e^{i\sigma}; \end{cases}$$

$$(23)\qquad \frac{\partial\cdot}{\partial x} H_{4[\varkappa_2^2]} + i\frac{\partial}{\partial y} H_{5[\varkappa_2^2]} = e^{i\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\varrho} H_{3[\varkappa_2^2]} + i\frac{\partial}{\varrho\,\partial\sigma} G\right),$$

so ergibt sich

$$(24)\qquad \begin{cases} z' = \dfrac{\partial\cdot}{\partial z}\left\{H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]} - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial\cdot}{\partial\varrho}\varrho\dfrac{\partial}{\partial\varrho} H_{3[\varkappa_2^2]} - \dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial\sigma^2}\right\}, \\ \varrho' = \dfrac{\partial\cdot}{\partial\varrho}\left\{H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} H_{3[\varkappa_2^2]}\right\}, \\ \varrho\,\sigma' = \dfrac{\partial\cdot}{\varrho\,\partial\sigma}\left\{H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right\}. \end{cases}$$

Da die linke Seite von (23) der Differentialgleichung (14) für $\varkappa^2 = \varkappa_2^2$ genügt, so müssen

$$\frac{\partial}{\partial\varrho} H_{3[\varkappa_2^2]} \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\varrho\,\partial\sigma}$$

Lösungen der folgenden Gleichung sein

$$(25)\qquad \Delta U = \left(4\varkappa^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right) U.$$

Wir werden ausschließlich den Fall betrachten, daß die Bewegung und Temperaturverteilung unabhängig vom Azimut $\sigma$

ist. Dann fällt $G$ in den Gleichungen (24) fort, $\sigma'$ verschwindet, und die Gleichung (14) geht über in

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial H}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 4\varkappa^2 H. \tag{26}$$

Wie schon durch die Bezeichnung vorweggenommen wurde, wird diese Gleichung für $\varkappa^2 = \varkappa_3^2$ auch durch $H_{3[\varkappa_3^2]}$ erfüllt.

Hat die tönende Gasmasse die Gestalt einer Kugel, so ist eine weitere Umformung zweckmäßig. Wir setzen

$$\begin{cases} z = r\,c, & \varrho = r\sqrt{1-c^2}, \\ z' = r'c + cr', & \varrho' = r'\dfrac{\varrho}{r} - \dfrac{r^2 c\,c'}{\varrho}; \end{cases} \tag{27}$$

$$W = \varrho \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \varrho} H_{3[\varkappa_3^2]}, \tag{28}$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + (1-c^2)\frac{\partial^2 W}{r^2\,\partial c^2} = 4\varkappa_3^2 W, \tag{29}$$

und erhalten

$$\begin{cases} r' = \dfrac{\partial}{\partial r}\{H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]}\} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial W}{\partial c}, \\ rc' = \dfrac{1-c^2}{r}\dfrac{\partial .}{\partial c}\{H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]}\} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W}{\partial r}. \end{cases} \tag{30}$$

In den neuen Variabeln ist

$$\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial .}{\partial c}(1-c^2)\frac{\partial H}{\partial c}. \tag{31}$$

Zu diesen Bewegungsgleichungen kommt noch stets die schon früher abgeleitete Gleichung (18) für den periodischen Teil der Temperatur $\vartheta$.

5. *Kugel bei zentraler Erregung.* Die vorstehend abgeleiteten Gleichungen sollen nun zunächst auf die Luftschwingungen in einer Kugel unter der Voraussetzung angewandt werden, daß Bewegungen und Temperatur nur von $r$, dem Abstande vom Mittelpunkte abhängen. Es ist dann nur die erste der Gleichungen (30) zu berücksichtigen und in dieser der zweite Term rechts fortzulassen.

Als Lösung der Differentialgleichung (14) und unter Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Zeit kann dann $H_{[\varkappa^2]}$ in die Form gebracht werden

$$H_{[\varkappa^2]} = \frac{1}{r} C e^{i\alpha t + 2\varkappa r}; \tag{32}$$

genauer sind rechts zwei Terme mit verschiedenem Vorzeichen von $\varkappa$ und verschiedenem konstantem Faktor $C$ hinzuschreiben. Berücksichtigt man nun noch, daß $\varkappa^2$ zwei Werte hat und daß die Konstanten komplex sind, so ergibt sich die Lösung des Problems abhängig von acht reellen Konstanten. Zu berücksichtigen ist natürlich nur der reelle Teil der Lösung, doch übersieht man leicht, daß man mit großem Vorteile die komplexe Bezeichnung beibehalten kann. Die acht reellen Konstanten sind bestimmt, wenn auf zwei konzentrischen Kugelflächen $r'$ und $\vartheta$ nach Amplitude und Phase als periodische Funktionen der Zeit gegeben sind.

Bei einer Anwendung wird nur der Fall zu berücksichtigen sein, daß die Unterhaltung der Schwingungen vom Mittelpunkte aus erfolgt. Denn andernfalls würde es praktisch schwer ausführbar sein, die erregende Ursache gleichzeitig auf alle Stellen der Kugelfläche mit derselben Phase wirken zu lassen. Wir nehmen an, daß für sehr kleine $r$ die Temperatur einen endlichen Wert habe und daß hier

$$r^2 r' = -m e^{i\alpha t}$$

sei.[1])

Gehen nun beim Zeichenwechsel von $\varkappa$ die Indizes 1 und 2 der Konstanten in 3 und 4 über, so werden diese Bedingungen

$$0 = h_1 (C_1 + C_3) + h_2 (C_2 + C_4),$$
$$m = C_1 + C_3 + C_2 + C_4,$$

und daraus

$$C_1 + C_3 = m \frac{h_2}{h_2 - h_1}, \quad C_2 + C_4 = m \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \tag{33}$$

Für die Kugeloberfläche, $r = R$, ergeben sich zwei weitere Bedingungen. Wir nehmen erstens an, daß hier $r' = 0$, also die Hülle starr sei; zweitens soll hier für die Temperatur die Bedingung gelten

$$\vartheta + \zeta \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0, \text{ für } r = R, \tag{34}$$

wo $\zeta$ eine reelle Konstante bezeichnet.

Bei der Ableitung der noch unbestimmten Konstanten aus diesen Bedingungen soll sogleich eine Vernachlässigung ein-

1) Man übersieht leicht, daß abweichende Formulierungen der Bedingungen für den Mittelpunkt nichts Wesentliches ändern.

geführt werden. Wie später genauer abgeleitet wird, hat von den Größen $2\varkappa R$ die eine einen großen positiven reellen Teil; es sei dies $2\varkappa_2 R$. Dann kann $C_4 e^{-2\varkappa_2 R}$ vernachlässigt werden, da $C_4$ selbst nicht groß ist. Denn, wie sich zeigen wird, ist $C_2 e^{2\varkappa_2 R}$ endlich, $C_2$ also äußerst klein und daher muß (wegen (33)) $C_4$ einen endlichen, übrigens selbst schon kleinen Wert haben.

Zur Abkürzung setzen wir

$$H_1 = C_1 e^{2\varkappa_1 R}, \quad H_2 = C_2 e^{2\varkappa_2 R}, \quad H_3 = C_3 e^{-2\varkappa_1 R}, \tag{35}$$

$$2\mathfrak{C} = e^{2\varkappa_1 R} + e^{-2\varkappa_1 R}, \quad 2\mathfrak{S} = e^{2\varkappa_1 R} - e^{-2\varkappa_1 R}; \tag{36}$$

dann ergeben die Bedingungen für die Oberfläche

$$0 = H_1 + H_3 - 2\varkappa_1 R(H_1 - H_3) + (1 - 2\varkappa_2 R) H_2,$$

$$0 = H_1 + H_3 + \frac{2\varkappa_1 R\zeta}{R-\zeta}(H_1 - H_3) + \left(1 + \frac{2\varkappa_2 R\zeta}{R-\zeta}\right)\frac{h_2}{h_1} H_2.$$

Fügt man dazu die Identität

$$C_1 + C_3 = (H_1 + H_3)\mathfrak{C} - (H_1 - H_3)\mathfrak{S},$$

so erhält man aus den drei Gleichungen das Resultat

$$\left\{\begin{aligned}
D(H_1 + H_3) &= 2\varkappa_1 R(C_1 + C_3)\left\{(2\varkappa_2 R - 1)\frac{\zeta}{R-\zeta} - \frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{2\varkappa_2 R\zeta}{R-\zeta}\right)\right\},\\
D(H_1 - H_3) &= (C_1 + C_3)\left\{1 - 2\varkappa_2 R - \frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{2\varkappa_2 R\zeta}{R-\zeta}\right)\right\},\\
D H_2 &= (C_1 + C_3)\frac{2\varkappa_1 R^2}{R-\zeta},\\
D &= (2\varkappa_2 R - 1)\left(\frac{2\varkappa_1 R\zeta}{R-\zeta}\mathfrak{C} + \mathfrak{S}\right) - \frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{2\varkappa_2 R\zeta}{R-\zeta}\right)(2\varkappa_1 R\mathfrak{C} - \mathfrak{S}).
\end{aligned}\right. \tag{37}$$

Da $C_1 + C_3$ durch (33) gegeben ist, so sind hiermit auch die einzelnen $H$ und also auch die Größen $C_1$, $C_2$, $C_3$ bestimmt, während $C_4$ unter Vernachlässigung von $C_2$ durch (33) gegeben ist.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu untersuchen, für welchen Wert von $\alpha$ bei einer gegebenen Erregung, also bei einem gegebenen Werte von $m$ die Schwingungen am stärksten werden. Gemessen werden soll die Stärke der Schwingungen

durch die Größe der Druckschwankungen an der Kugeloberfläche.

Aus den Gleichungen (9), (2) und (5) folgt

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon \left( e \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \mathfrak{a}^2 \Delta \varphi \right), \tag{38}$$

oder, wenn man für $\vartheta$ und $\varphi$ ihre Werte nach (18) setzt,

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial t} = (i \alpha e h_1 - 4 \varkappa_1^2 \mathfrak{a}^2) H_{1[\varkappa_1^2]} + (i \alpha e h_2 - 4 \varkappa_2^2 \mathfrak{a}^2) H_{2[\varkappa_2^2]},$$

oder auch bei Benutzung der Gleichungen (16), (17)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial t} = \alpha^2 (H_{1[\varkappa_1^2]} + H_{2[\varkappa_2^2]}) + 4 i \alpha (\eta_1 + \eta_2)(\varkappa_1^2 H_{1[\varkappa_1^2]} \\ + \varkappa_2^2 H_{2[\varkappa_2^2]}). \end{aligned} \right. \tag{39}$$

In diesen allgemein gültigen Ausdruck wären im vorliegenden Falle $H_{1[\varkappa_1^2]}$ und $H_{2[\varkappa_2^2]}$ durch (32), (35), (37) zu bestimmen, und dann wäre zu untersuchen, für welchen Wert von $\alpha$ der Modul des Faktors von $e^{i\alpha t}$ ein Maximum wird. Die Durchführung bietet im vorliegenden Falle keine prinzipielle Schwierigkeit, hat aber zunächst auch kein besonderes Interesse; mit Berücksichtigung von praktisch zulässigen Vernachlässigungen soll sie weiterhin gegeben werden.

6. *Allgemeinerer Fall der Kugel.* An zweiter Stelle betrachten wir die Schallschwingungen in einer Kugel, wenn die Erregung von der Oberfläche ausgeht; für die Anwendung ist der Fall besonders wichtig, daß die Erregung sich nur auf eine kleine Stelle der Oberfläche beschränkt.

In diesem Falle ist eine geeignete Lösung von (14)

$$H_{[\varkappa^2]} = \frac{1}{r} e^{i\alpha t} \sum_{n=0}^{n=\infty} C^n P_{[c]}^n F_{[\varkappa r]}^n. \tag{40}$$

Hier sind die $C^n$ Konstanten, die $P_{[c]}^n$ die durch

$$\{1 + x^2 - 2xc\}^{-1/2} = \sum x^n P_{[c]}^n$$

definierten einfachen Kugelfunktionen und die $F_{[r]}^n$ Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \left(4 + \frac{n(n+1)}{r^2}\right) F. \tag{41}$$

Diese Lösungen bestimmen wir dadurch, daß sein möge

$$2 F_{[r]}^0 = e^{2r} - e^{-2r}, \quad 2 F_{[r]}^{-1} = e^{2r} + e^{-2r}, \tag{42}$$

während die Funktionen mit anderem Index hieraus rekurrierend durch die Formel

$$F_{[r]}^{n-1} - F_{[r]}^{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{r} F_{[r]}^{n} \tag{43}$$

zu berechnen sind.

Wir bemerken noch die Formel

$$\frac{d F_{[r]}^{n}}{d r} = 2 F_{[r]}^{n+1} + \frac{n+1}{r} F_{[r]}^{n} = 2 F_{[r]}^{n-1} - \frac{n}{r} F_{[r]}^{n}, \tag{44}$$

die sich, wie die übrigen, leicht aus der Theorie der Zylinderfunktionen ergibt.

Entwickelt man nun auch $\partial W / \partial c$ nach Kugelfunktionen, wo $W$ die durch (28) oder (29) definierte Größe bezeichnet, so ergibt sich für den von $r$ abhängigen Faktor ebenfalls die Bedingungsgleichung (41), wenn darin $\varkappa_3 r$ an Stelle von $r$ gesetzt wird. Man kann daher setzen

$$\frac{\partial W}{\partial c} = \sum C_s^n P_{[c]}^n F_{[\varkappa_s r]}^n e^{i \alpha t}. \tag{45}$$

Der Bedingung, daß die Bewegung im Mittelpunkte endlich bleiben muß, ist dadurch genügt, daß nur positive Werte von $n$ berücksichtigt werden. Einer Berücksichtigung des Doppelzeichens von $\varkappa$ bedarf es nicht mehr, da die $F_{[r]}^n$ entweder gerade oder ungerade Funktionen des Argumentes sind.

Es soll nnn die Annahme gemacht werden, daß an der Kugeloberfläche die Bewegung im allgemeinen verschwinde, aber mit Ausnahme einer sehr kleinen Fläche, für welche $c$ zwischen $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und 1 liegen möge. Festzustellen, welches die genauere Form der erregenden Bewegung ist, wird sehr schwierig sein, doch kann man wohl zwei extreme typische Fälle unterscheiden. Man könnte erstens annehmen, daß die Luftbewegung senkrecht zur Öffnung und im ganzen Querschnitt mit derselben Geschwindigkeit stattfindet, und man könnte zweitens die Bewegung in der Öffnung der elektrischen Strömung gleichsetzen, welche die kreisförmige Öffnung in einem isolierenden ebenen Schirm durchsetzt, der den unendlichen leitenden Raum in zwei Teile teilt. Auch in dem letzteren Falle findet die Strömung nur senkrecht zur Öffnung statt, wird aber an den Rändern der Öffnung unendlich groß; ebenso wird $c'$ in einer der Öffnung nahe liegenden Ebene und nahe den Rändern

sehr groß. Tatsächlich müßte sich aber durch den Einfluß der Reibung der zweite Fall dem ersten nähern.

Verzichtet man auf die Untersuchung der Bewegung in unmittelbarer Nähe der Öffnung, so kommen nur Mittelwerte zur Geltung und die beiden Fälle unterscheiden sich nicht mehr. Wir setzen daher voraus, daß $c'$ für die ganze Oberfläche infolge der äußeren Reibung verschwindet und daß $r'$ im allgemeinen auch verschwinde, aber zwischen $c = 1$ und $c = \sqrt{1-\varepsilon^2}$ den Wert $m\,e^{i\alpha t}/\varepsilon^2$ habe. Für $\vartheta$ soll Gleichung (34) gelten.

Durch Entwickelung nach Kugelfunktionen findet man dann, für $r = R$

$$(46)\quad \begin{cases} r' = \dfrac{m}{\varepsilon^2}\, e^{i\alpha t} \sum P^n_{[c]}\, \dfrac{2n+1}{2} \displaystyle\int_{\sqrt{1-\varepsilon^2}}^{1} P^n_{[x]}\, dx \\ \quad = -\, m\, e^{i\alpha t} \sum \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}\, P^n_{[c]}\, \dfrac{\partial}{\partial x}\, P^n_{[x]}, \quad x = \sqrt{1-\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Ist $\varepsilon$ genügend klein, so kann man auch, abgesehen von Werten von $c$, die sehr nahe bei 1 liegen, setzen

$$r' = \frac{m}{4}\, e^{i\alpha t} \sum (2n+1)\, P^n_{[c]}, \quad r = R.$$

Es ist nun leicht, die Bedingungen für die Oberfläche abzuleiten, wenn man die Werte von $H_{[\varkappa^2]}$ aus (40) und von $W$ aus (45) in die Gleichungen (30) und (18) für $r'$, $c'$, $\vartheta$ einführt und die Differentialgleichung für die Kugelfunktionen, sowie Gleichung (44) berücksichtigt. Setzt man zur Abkürzung

$$(47)\qquad F^n_1 = F^n_{[\varkappa_1 R]}$$

und entsprechend für die anderen Indizes, so erhält man für jeden Wert von $n$

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{m}{4}(n+1) = C^n_1 \left( \dfrac{2\varkappa_1}{R} F^{n+1}_1 + \dfrac{n}{R^2} F^n_1 \right) \\ \qquad\qquad + C^n_2 \left( \dfrac{2\varkappa_2}{R} F^{n+1}_2 + \dfrac{n}{R^2} F^n_2 \right) + \dfrac{1}{R^2} C^n_3 F^n_3, \\ 0 = n(n+1)(C^n_1 F^n_1 + C^n_2 F^n_2) + C^n_3 (2\varkappa_3 R F^{n+1}_3 + (n+1) F^n_3), \\ 0 = h_1 C^n_1 \left( F^n_1 + \zeta \left( 2\varkappa_1 F^{n+1}_1 + \dfrac{n}{R} F^n_1 \right) \right) \\ \qquad + h_2 C^n_2 \left( F^n_2 + \zeta \left( 2\varkappa_2 F^{n+1}_2 + \dfrac{n}{R} F^n_2 \right) \right). \end{cases}$$

Durch Auflösung der Gleichungen lassen sich die Konstanten $C_1^n$, $C_2^n$, $C_3^n$ bestimmen, doch soll auch in diesem Falle die weitere Behandlung erst weiterhin und nur angenähert erfolgen.

7. *Kreiszylinder.* Die wichtigste Form des Resonators zur Bestimmung absoluter Schallgeschwindigkeiten ist die eines endlichen Kreiszylinders mit ebenen Endflächen. Insbesondere nehmen wir an, daß die Erregungsstelle in der Mitte der einen Endfläche liegt, die Prüfungsstelle, deren Druckschwankung die Stärke der Resonanz anzeigt, in der Mitte der anderen.

Für die erste dieser Ebenen möge $z = 0$, für die zweite $z = +\pi$ sein, der Radius des Zylinders sei r. Es handelt sich darum, für $H_{[\varkappa^2]}$ eine geeignete Darstellung innerhalb des Zylinders zu finden.

Es sei

$$I^n_{[r]} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2r\cos\vartheta}\cos[n\,\vartheta]\,d\,\vartheta\,, \tag{49}$$

für $n = 0$ soll der Index fortgelassen werden. Die Größen $\beta_\nu$ seien die positiven Wurzeln der Gleichung

$$I'_{[i\,\beta]} = 0, \tag{50}$$

ferner setzen wir zur Abkürzung

$$I_{[i\,\beta_\nu]} = j_\nu\,. \tag{51}$$

Die Größen $\beta_0 = 0$ und $j_0 = 1$ müssen meistens von den anderen gesondert betrachtet werden, die numerischen Werte der übrigen $\beta_\nu$ und $j_\nu$ sind sehr genau bekannt.[1])

Setzt man noch

$$\varrho = r\,\mathfrak{r}, \tag{52}$$

so läßt sich $H_{[\varkappa^2]}$ innerhalb des Zylinders und an den Grenzen durch die Doppelsumme ausdrücken[2])

$$H_{[\varkappa^2]} = \sum_0^\infty\sum_0^\infty C^n_\nu\cos[n\,z]\,I_{[i\,\beta_\nu\,\mathfrak{r}]}\,. \tag{53}$$

Um von diesem Ausdrucke Differentialquotienten bilden zu können, die an den Grenzen nicht ihre Bedeutung verlieren, fügen wir nach Bedarf noch die Ausdrücke zu

1) E. Meissel, Kieler Programm Nr. 284, p. 4. 1890.

2) Man kann auch von einfachen Summen ausgehen, deren einzelne Terme die Differentialgleichung (14) erfüllen; doch ist das hier eingeschlagene Verfahren wohl vorzuziehen.

$$(54)\qquad \begin{cases} 0 = S\left(z - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)z]}{(2n-1)^2}\right), \\ 0 = T\left(z^2 - \frac{\pi^2}{8} - 4\sum_{1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{2n}}{n^2}\cos[nz]\right), \end{cases}$$

$$(55)\qquad 0 = U\left(r^2 - \frac{1}{2} - \sum_{1}^{\infty}\frac{I_{[i\beta_\nu r]}}{j_\nu \beta_\nu^2}\right),$$

falls $S$ und $T$ Funktionen von $r$, $U$ eine Funktion von $z$ bezeichnet. Für diese Funktionen sollen die Entwickelungen gelten

$$(56)\qquad \begin{cases} S = \sum_{0}^{\infty} D_\nu I_{[i\beta_\nu r]} + D\left(r^2 - \frac{1}{2} - \sum_{1}^{\infty}\frac{I_{[i\beta_\nu r]}}{j_\nu \beta_\nu^2}\right), \\ T = \sum_{0}^{\infty} E_\nu I_{[i\beta_\nu r]} + E\left(r^2 - \frac{1}{2} - \sum_{1}^{\infty}\frac{I_{[i\beta_\nu r]}}{j_\nu \beta_\nu^2}\right), \\ U = \sum_{0}^{\infty} C^n \cos[nz]. \end{cases}$$

Die $D$ und $E$ haben nur für $\varkappa = \varkappa_s$ eine Bedeutung; sie sollen daher ohne Index gelassen werden.

Führt man den durch die vorstehenden Ausdrücke gegebenen Wert von $H_{[\varkappa\varrho]}$ und seinen Differentialquotienten in die Gleichung (14) ein und vergleicht die Koeffizienten der einzelnen Terme $\cos[nz]\, I_{[i\beta_\nu z]}$, so erhält man

$$(57)\qquad \begin{cases} C_\nu^n\left(4\varkappa^2 + n^2 + \frac{4}{r^2}\beta_\nu^2\right) = 4E_\nu + \frac{4}{r^2 j_\nu} C^n, \\ \text{für gerade } n \text{ mit Ausschluß der Null}, \\ C_\nu^n\left(4\varkappa^2 + n^2 + \frac{4}{r^2}\beta_\nu^2\right) = -4E_\nu - \frac{4}{\pi} D_\nu + \frac{4}{r^2 j_\nu} C^n, \\ \text{für ungerade } n, \\ C_\nu^0\left(4\varkappa^2 + \frac{4}{r^2}\beta_\nu^2\right) = 2E_\nu + \frac{4}{r^2 j_\nu} C^0, \text{ für } n = 0. \end{cases}$$

Es sei nun auf der Zylinderfläche also für $r = 1$ durchweg

$$\varrho' = 0, \quad z' = 0, \quad \vartheta + \zeta\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho} = 0.$$

Wir drücken diese Bedingungen durch die beiden ersten Gleichungen (24) (für $G = 0$) und die Gleichung für $\vartheta$ in (18)

aus, führen die Werte der $H_{[x\tau]}$ und ihrer Differentialquotienten nach (53), (54), (55) für $r = 1$ ein und setzen die Koeffizienten der $\cos[n\,z]$ gleich Null. Die Gleichung $z' = 0$ integrieren wir vorher. Nachdem $C_\nu^n$ durch (57) eliminiert ist, führen wir, soweit es angeht, die Summation nach $\nu$ mittels des Hilfssatzes aus

$$I_{[b\,r]} = b\,I'_{[b]} \sum_0^\infty \frac{I_{[i\,\beta_\nu\,r]}}{j_\nu\,(b^2+\beta_\nu^2)}\,.$$

Man erhält dann

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = C_1^n + C_2^n - n^2\,C_3^n + \left\{\begin{array}{ll} 4\,E, & \text{für gerade } n,\\ -4\,E - \frac{4}{\pi}\,D, & \text{für ungerade } n,\\ 2\,E, & \text{für } n = 0,\end{array}\right.\\ 0 = C_1^n J_1^n + C_2^n J_2^n - 4\,\frac{b_{3,n}^2}{\mathfrak{r}^2}\,C_3^n J_3^n + K_1^n + K_2^n + L_3^n,\\ \qquad\qquad \text{ausgenommen } n = 0;\\ 0 = h_1\,C_1^n\left(J_1^n + \frac{2}{\mathfrak{r}}\,\zeta\right) + h_2\,C_2^n\left(J_2^n + \frac{2}{\mathfrak{r}}\,\zeta\right) + h_1\,K_1^n + h_2\,K_2^n. \end{array}\right. \tag{58}$$

Dabei ist gesetzt

$$4\,b_n^2 = (n^2 + 4\,\varkappa^2)\,\mathfrak{r}^2, \tag{59}$$

$$J^n = \frac{I_{[b_n]}}{b_n\,I'_{[b_n]}} = \sum_0^\infty \frac{1}{b_n^2 + \beta_\nu^2}\,; \tag{60}$$

$$\left\{\begin{array}{l} K^n = \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{r}^2 j_\nu E_\nu}{b_n^2 + \beta_\nu^2}\,, \text{ für gerade } n \text{ außer } n = 0,\\ K^n = -\sum_0^\infty \frac{\mathfrak{r}^2 j_\nu \left(E_\nu + \frac{1}{\pi}\,D_\nu\right)}{b_n^2 + \beta_\nu^2}\,, \text{ für ungerade } n,\\ K^0 = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{\mathfrak{r}^2 j_\nu E_\nu}{\mathfrak{r}^2\varkappa^2 + \beta_\nu^2}\,. \end{array}\right. \tag{61}$$

$L^n$ entsteht aus $K^n$ durch Zufügung des Faktors $4\,\beta_\nu^2$ unter dem Summenzeichen. Durch die Indizes 1, 2, 3 sind die Größen für die drei verschiedenen Werte von $\varkappa^2$ unterschieden.

An den Endflächen soll für $z = \pi$ durchweg

$$\varrho' = 0,\quad z' = 0,\quad \vartheta + \zeta\,\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,z} = 0,$$

für $z = 0$ soll

$$\varrho' = 0, \quad \vartheta - \zeta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$$

sein, dagegen

$$z' = \sum_{0}^{\infty} G_\nu I_{[i\beta_\nu r]}. \tag{62}$$

Insbesondere seien die $G_\nu$ dadurch bestimmt, daß $z'$ für $0 < r < \varepsilon$ gleich $m/\varepsilon^2$, dagegen für größere Werte von $r$ gleich Null ist.

Wir verfahren hier in ähnlicher Weise wie für die Zylinderfläche, nur integrieren wir die Gleichung $\varrho' = 0$ und benutzen zur Ausführung der Summation nach $n$ den Hilfssatz

$$\cos[i a z] = \frac{a \sin[i a \pi]}{i \pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{i^{2n} \cos[n z]}{n^2 + a^2}. \tag{63}$$

Läßt man nun die Koeffizienten der einzelnen $I_{[i\beta_\nu r]}$ verschwinden, so erhält man aus den einzelnen Bedingungsgleichungen, wenn man für die beiden Endflächen die Summe und die Differenz bildet,

$$\left\{\begin{aligned}
&0 = R_{1,\nu} E_{1,\nu} + R_{2,\nu} E_{2,\nu} + a_{3,\nu}^2 R_{3,\nu} E_{3,\nu} + M_{1,\nu} + M_{2,\nu} + N_{3,\nu},\\
&0 = U_{1,\nu}\left(E_{1,\nu} + \frac{1}{\pi} D_{1,\nu}\right) + U_{2,\nu}\left(E_{2,\nu} + \frac{1}{\pi} D_{2,\nu}\right)\\
&\qquad + a_{3,\nu}^2 U_{3,\nu}\left(E_{3,\nu} + \frac{1}{\pi} D_{3,\nu}\right) + M'_{1,\nu} + M'_{2,\nu} + N'_{3,\nu},\\
&\tfrac{1}{2} G_\nu = D_{1,\nu} + \pi E_{1,\nu} + D_{2,\nu} + \pi E_{2,\nu} + \frac{4\beta_\nu^3}{r^2}(D_{3,\nu} + \pi E_{3,\nu})\\
&\qquad\qquad - \frac{4}{r^2 j_\nu}(D + \pi E),\\
&-\frac{1}{2\pi} G_\nu = E_{1,\nu} + E_{2,\nu} + \frac{4\beta_\nu^2}{r^2} E_{3,\nu} - \frac{4}{r^2 j_\nu} E,\\
&0 = h_1 E_{1,\nu}\left(R_{1,\nu} + \frac{\pi\zeta}{2}\right) + h_2 E_{2,\nu}\left(R_{2,\nu} + \frac{\pi\zeta}{2}\right)\\
&\qquad\qquad + h_1 M_{1,\nu} + h_2 M_{2,\nu},\\
&0 = h_1\left(E_{1,\nu} + \frac{1}{\pi} D_{1,\nu}\right)\left(U_{1,\nu} + \frac{\pi\zeta}{2}\right)\\
&\qquad + h_2\left(E_{2,\nu} + \frac{1}{\pi} D_{2,\nu}\right)\left(U_{2,\nu} + \frac{\pi\zeta}{2}\right) + h_1 M'_{1,\nu} + h_2 M'_{2,\nu}.
\end{aligned}\right. \tag{64}$$

Für $\nu = 0$ fällt die erste der Gleichungen wegen der Integrationskonstante fort. Dabei ist gesetzt

$$a_\nu^2 = 4\varkappa^2 + \frac{4}{\mathfrak{r}^2}\beta_\nu^2, \tag{65}$$

$$\begin{cases} R_\nu = \dfrac{i\pi(1+\cos[i a_\nu \pi])}{2 a_\nu \sin[i a_\nu \pi]} = \dfrac{i\pi}{2 a_\nu}\operatorname{cotg}\left[i a_\nu \dfrac{\pi}{2}\right], \\ U_\nu = \dfrac{i\pi(\cos[i a_\nu \pi]-1)}{2 a_\nu \sin[i a_\nu \pi]} = -\dfrac{i\pi}{2 a_\nu}\operatorname{tg}\left[i a_\nu \dfrac{\pi}{2}\right], \end{cases} \tag{66}$$

$$\begin{cases} M_\nu = \dfrac{2}{\mathfrak{r}^2 j_\nu}\sum' \dfrac{C^{2n}}{a_\nu^2 + 4n^2} = \dfrac{1}{2 j_\nu}\sum \dfrac{C^{2n}}{b_{2n}^2 + \beta_\nu^2}, \\ M_\nu' = -\dfrac{2}{\mathfrak{r}^2 j_\nu}\sum \dfrac{C^{2n+1}}{a_\nu^2 + (2n+1)^2}, \\ N_\nu = -\dfrac{2}{\mathfrak{r}^2 j_\nu}\sum' \dfrac{4n^2 C^{2n}}{a_\nu^2 + 4n^2}, \\ N_\nu' = \dfrac{2}{\mathfrak{r}^2 j_\nu}\sum \dfrac{(2n+1)^2 C^{2n+1}}{a_\nu^2 + (2n+1)^2}. \end{cases} \tag{67}$$

Als Wert von $G_\nu$ ergibt sich aus (62)

$$G_\nu = \frac{2}{j_\nu}\int_0^1 z' I_{[i\beta_\nu r]} r\, dr,$$

falls für $z'$ dessen Wert für $z = 0$ gesetzt wird. Nehmen wir an, daß $z'$ zwischen $r = 0$ und $r = \varepsilon$ den Wert $(1/\varepsilon^2)e^{i\alpha t}$, für größere $r$ den Wert 0 hat, so erhält man

$$G_\nu = \frac{e^{i\alpha t}}{j_\nu}\frac{I'_{[i\beta_\nu \varepsilon]}}{i\beta_\nu \varepsilon}. \tag{68}$$

Ist $\varepsilon$ sehr klein, ohne daß gleichzeitig $\nu$ sehr groß wird, so erhält man einfacher

$$G_\nu = \frac{e^{i\alpha t}}{j_\nu}.$$

Die Behandlung der neun Systeme von Gleichungen, die durch (58) und (64) gegeben sind, läßt sich zwar ohne Beschränkung noch etwas weiterführen; soll aber nur näherungsweise weiterhin durchgeführt werden.

8. *Zylinder von unendlicher Weite.* Die Formeln für den Kreiszylinder müssen in zwei Grenzfällen modifiziert werden, wenn entweder der Radius des Zylinders oder seine Länge unendlich wird. Für die Theorie des geschlossenen Resonators erscheinen beide Fälle zunächst von geringer Bedeutung, und

ihre Behandlung soll daher auch nicht durchgeführt werden; andererseits entspricht aber die Aufstellung der Grundformeln für diese Fälle dem Zwecke dieser Arbeit. Beide Fälle zeichnen sich dadurch aus, daß bei sehr kleiner Reibung nicht, wie im allgemeinen eine zweifache, sondern nur eine einfache Mannigfaltigkeit von Resonanztönen auftritt. Ferner könnte der erste Fall dadurch wichtig werden, daß er der Grenzfall für Zylinder von großem Radius ist, bei dem der von Kirchhoff vernachlässigte Einfluß der Endflächen rein zur Geltung kommt, während der zweite Fall unter Umständen für die Kundtsche Methode wichtig sein kann.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall, bei dem die Schallbewegung zwischen zwei unendlichen parallelen Ebenen vor sich geht. Es tritt dann in (53) statt der Summe nach $\nu$ ein Integral auf; also wird

$$H_{[\varkappa^2]} = \sum_0^\infty C^n \cos[n z]\, I_{[i u \varrho]}\, u\, du, \tag{69}$$

wo die $C^n$ Funktionen von $u$ sind.

Ebenso sind die $S$ und $T$ statt durch (55) durch

$$\begin{cases} S = \int_0^\infty D\, u\, du\, I_{[i u \varrho]}, \\ T = \int_0^\infty E\, u\, du\, I_{[i u \varrho]} \end{cases} \tag{70}$$

zu definieren, wo $D$ und $E$ Funktionen von $n$ bezeichnen.

Wegen der Differentialgleichung (14) gelten für die $C^n$ die Beziehungen

$$C^n(4\varkappa^2 + n^2 + u^2) = \begin{cases} 4E, & n \text{ gerade}, \\ -4E - \frac{4}{\pi} D, & n \text{ ungerade}, \\ 2E, & n = 0. \end{cases} \tag{71}$$

Es möge nun für $z = \pi$ allgemein

$$\varrho' = 0, \quad z' = 0, \quad \vartheta + \zeta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$$

sein, dagegen für $z = 0$ sei

$$\varrho' = 0, \quad \vartheta - \zeta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$$

und

$$z' = \int_0^\infty G\, u\, du\, I_{[i u \varrho]}. \tag{72}$$

Dann werden die Bedingungen

$$(73)\quad \begin{cases} 0 = R_1 E_1 + R_2 E_2 + a_3^2 R_3 E_3, \\ 0 = U_1\left(E_1 + \frac{1}{\pi} D_1\right) + U_2\left(E_2 + \frac{1}{\pi} D_2\right) + a_3^2 U_3\left(E_3 + \frac{1}{\pi} D_3\right), \\ \frac{1}{2} G = D_1 + \pi E_1 + D_2 + \pi E_2 + 4u^2(D_3 + \pi E_3), \\ -\frac{1}{2\pi} G = E_1 + E_2 + 4u^2 E_3, \\ 0 = h_1 E_1\left(R_1 + \frac{\pi\zeta}{2}\right) + h_2 E_2\left(R_2 + \frac{\pi\zeta}{2}\right), \\ 0 = h_1\left(E_1 + \frac{1}{\pi} D_1\right)\left(U_1 + \frac{\pi\zeta}{2}\right) + h_2\left(E_2 + \frac{1}{\pi} D_2\right)\left(U_2 + \frac{\pi\zeta}{2}\right). \end{cases}$$

Dabei ist gesetzt

$$(74)\quad a^2 = 4x^2 + 4u^2,$$

$$(75)\quad \begin{cases} R = i\pi \dfrac{\cos[i a \pi] + 1}{2 a \sin[i a \pi]}, \\ U = i\pi \dfrac{\cos[i a \pi] - 1}{2 a \sin[i a \pi]}. \end{cases}$$

Durch Auflösung der Gleichungen (73) erhält man

$$(76)\quad \begin{cases} P(D_1 + \pi E_1) = \frac{1}{2} G h_2 a_3^2 U_3\left(U_2 + \frac{\pi\zeta}{2}\right), \\ P(D_2 + \pi E_2) = -\frac{1}{2} G h_1 a_3^2 U_3\left(U_1 + \frac{\pi\zeta}{2}\right), \\ P(D_3 + \pi E_3) = \frac{1}{2} G\left\{h_1 U_2\left(U_1 + \frac{\pi\zeta}{2}\right) - h_2 U_1\left(U_2 + \frac{\pi\zeta}{2}\right)\right\}, \\ P = h_2\left(U_2 + \frac{\pi\zeta}{2}\right)(a_3^2 U_3 - 4u^2 U_1) \\ \qquad\qquad - h_1\left(U_1 + \frac{\pi\zeta}{2}\right)(a_3^2 U_3 - 4u^2 U_2). \end{cases}$$

$$(77)\quad \begin{cases} Q E_1 = -\frac{1}{2\pi} G h_2 a_3^2 R_3\left(R_2 + \frac{\pi\zeta}{2}\right), \\ Q E_2 = \frac{1}{2\pi} G h_1 a_3^2 R_3\left(R_1 + \frac{\pi\zeta}{2}\right), \\ Q E_3 = \frac{1}{2\pi} G\left\{h_2 R_1\left(R_2 + \frac{\pi\zeta}{2}\right) + h_1 R_2\left(R_1 + \frac{\pi\zeta}{2}\right)\right\}, \\ Q = h_2\left(R_2 + \frac{\pi\zeta}{2}\right)(a_3^2 R_3 - 4u^2 R_1) \\ \qquad\qquad - h_1\left(R_1 + \frac{\pi\zeta}{2}\right)(a_3^2 R_3 - 4u^2 R_2). \end{cases}$$

Zur Bestimmung von $G$ aus (72) dient der Satz[1])

$$G = 4 \int_0^\infty z' \varrho \, d\varrho \, I_{[i u \varrho]},$$

hat also $z'$ für Werte von $\varrho$, die kleiner als $s$ sind, den Wert $e^{i\alpha t}/s^2$ und verschwindet es für größere Werte, so wird

$$G = 2 e^{i\alpha t} \frac{I_{[i u s]}}{i u s}. \tag{78}$$

9. *Kreiszylinder von unbegrenzter Länge.* Ist andererseits der Radius des betrachteten Zylinders endlich, seine Länge aber unendlich, so verwandelt sich in (53) die Summe nach $z$ in ein Integral und man erhält

$$H_{[x^2]} = \sum_0^\infty I_{[i \beta_\nu r]} \int_0^\infty C_\nu \cos [u z] \, du, \tag{79}$$

und ebenso für die letzte Gleichung (55)

$$U = \int_0^\infty C \cos [u z] \, du, \tag{80}$$

falls $C$ und die $C_\nu$ Funktionen von $u$ sind.

Die partielle Differentialgleichung (14) liefert die Beziehung

$$C_\nu \left(4 x^2 + u^2 + \frac{4}{r^2} \beta_\nu^2\right) = \frac{4}{r^2 j_\nu} C. \tag{81}$$

Mittels des Hilfssatzes (57) erhält man dann aus (79)

$$H_{[x^2]} = \int_0^\infty C \frac{I_{[b r]}}{b I'_{[b]}} \cos [u z] \, du, \tag{82}$$

wo

$$4 b^2 = (u^2 + 4 x^2) r^2 \tag{83}$$

zu setzen ist.

Gelten die früher aufgestellten Bedingungen für die Zylinderoberfläche auch hier, so erhält man

$$0 = C_1 + C_2 - u^2 C_3,$$

$$c = C_1 J_1 + C_2 J_2 - 4 \frac{b_3^2}{r^2} J_3,$$

$$0 = h_1 C_1 \left(J_1 + \frac{2}{r} \xi\right) + h_2 C_2 \left(J_2 + \frac{2}{r} \zeta\right),$$

1) Vgl. E. Heine, Kugelfunktionen 1. p. 443. Berlin 1878.

falls $c$ eine von $z$ und $r$ unabhängige Größe und $J$ die durch (60) definierte Funktion von $b$ bezeichnet. Die Auflösung der Gleichungen ergibt

$$(84)\quad \begin{cases} VC_1 = & c u^2 h_2 \left(J_2 + \frac{2}{r}\zeta\right), \\ VC_2 = - & c u^2 h_1 \left(J_1 + \frac{2}{r}\zeta\right), \\ VC_3 = & c h_2 \left(J_2 + \frac{2}{r}\zeta\right) - c h_1 \left(J_1 + \frac{2}{r}\zeta\right), \\ V = & h_2 \left(J_2 + \frac{2}{r}\zeta\right)\left(u^2 J_1 - \frac{4 b_3^2}{r^2} J_3\right) \\ & - h_1 \left(J_1 + \frac{2}{r}\zeta\right)\left(u^2 J_2 - \frac{4 b_3^2}{r^2} J_3\right). \end{cases}$$

Die einzige noch unbekannte Größe $c$ ist durch die Bedingung für $z = 0$ zu bestimmen.

10. *Prinzipien für die Näherung.* Die weitere Behandlung der vorstehend teilweise gelösten Probleme soll unter Einführung von praktisch erlaubten Näherungen erfolgen. Dazu müssen wir uns zunächst eine Kenntnis von der Größe der vorkommenden Konstanten verschaffen.

Von den in den Gleichungen (16) und (17) vorkommenden Größen ist $\mathfrak{b}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ohne Rücksicht auf Reibung und Wärmeleitung, $\alpha/\mathfrak{b}$ eine zwischen $\sqrt{0{,}6}$ und 1 liegende Zahl, $2\pi\mathfrak{b}/\alpha$ die Wellenlänge, $\eta_1$ der Reibungsindex. Setzt man für $\mathfrak{b}$ und $\eta_1$ die Werte, wie sie etwa der Luft bei $0^0$ und Atmosphärendruck entsprechen, nämlich

$$\eta_1 = 0{,}15\,\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}, \qquad \mathfrak{b} = 33000\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

so findet man auch bei Wellenlängen von wenigen Zentimetern für die dimensionslose Größe $\eta_1\,\alpha/\mathfrak{b}^2$ so kleine Werte, daß sie gegen Eins vernachlässigt werden können. Dasselbe gilt für alle anderen Gase und auch für höhere Temperaturen, da das Anwachsen von $\eta_1$ mit der Temperatur großenteils durch das gleichzeitige Wachsen von $\mathfrak{b}^2$ kompensiert wird. Stark verdünnte Gase, bei denen der Einfluß größer sein würde, werden bei Bestimmungen von Schallgeschwindigkeiten kaum in Frage kommen.

Der Wert von $\eta_2$ ist experimentell nicht bekannt. Nach der Theorie ist es gleich $\eta_1/3$; da überdies $\eta_2$ nur in Termen höherer Ordnung vorkommt, so bleibt es ohne Bedeutung. $\eta_3$ ist größer als $\eta_1$, doch ist der Faktor nach den verschiedenen Theorien und den Versuchsergebnissen klein genug (nicht über 2,5), um auch $\alpha\eta_3/b^2$ vernachlässigen zu können.

Da in der vorliegenden Untersuchung die Phase nicht zu berücksichtigen ist, so können wir auch sehr kleine imaginäre Größen gegen endliche reelle vernachlässigen und umgekehrt, und erhalten dann aus (16), (17), (19) genähert

$$(85)\quad \begin{cases} 2\varkappa_1 = i\frac{\alpha}{b}, \quad 2\varkappa_2 = (1+i)\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2\eta_3}}, \quad 2\varkappa_3 = (1+i)\sqrt{\frac{\alpha}{2\eta_1}}, \\ \frac{h_1}{h_2} = -i\frac{\alpha\eta_3}{b^2}\frac{b^2-a^2}{b^2} = \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_2^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{b^2}. \end{cases}$$

Eine besondere Betrachtung erfordert noch der Wert von $\zeta$, welches den Temperatursprung zwischen dem Gase und der Gefäßwand kennzeichnet. Als untere Grenze kann man für Luft etwa $\zeta = 0{,}00002$ cm annehmen; für Wasserstoff etwas mehr[1]); Werte von dieser Ordnung würden ohne praktische Bedeutung sein. Eine Absorption der von der Wand ausgehenden Strahlung durch das Gas könnte diesen Wert vergrößern, auch eine schlechte Wärmeleitungsfähigkeit der Gefäßwände müßte einen ähnlichen Einfluß haben wie eine Vergrößerung von $\zeta$. Eine allerdings viel zu große obere Grenze läßt sich aus den Bestimmungen der sogenannten äußeren Wärmeleitungsfähigkeit ableiten; für Luft bei gewöhnlichem Drucke ist dieser Wert meist über 100000mal größer als die untere Grenze gefunden worden.

Da also $\zeta$ der Ordnung nach unbekannt ist und seine Berücksichtigung nur die Wirkung haben kann, den Einfluß der Wärmeleitung des Gases zu verringern, so wollen wir für die folgenden Betrachtungen $\zeta = 0$ annehmen. Die Beibehaltung von $\zeta$ führt aber auf keine besondere Schwierigkeit.

Wenden wir uns nun zu der speziellen Aufgabe, zu untersuchen, bei welcher Frequenz eine Erregung von gegebener Größe ein Maximum in der Stärke der Schallbewegung hervor-

1) Vgl. M. v. Smoluchowski, Wied. Ann. **64.** p. 101. 1898; E. Gehrcke, Ann. d. Phys. **2.** p. 102. 1900.

ruft, so ergibt sich eine sehr große Vereinfachung, wenn man den Einfluß der Reibung und Wärmeleitung nur in erster Näherung berücksichtigt. Vernachlässigt man Reibung und Wärmeleitung ganz, so gibt es, wie bekannt ist, bestimmte Werte der Frequenz, für welche die Bewegung unendlich wird. Bei Berücksichtigung von Reibung und Wärmeleitung ist dies unmöglich; in der Darstellung, deren wir uns bedienten, kann der reelle und imaginäre Teil des Nenners der Konstanten, durch welche die Bewegung ausgedrückt wird, nicht gleichzeitig verschwinden. Aber der eine, wie wir annehmen wollen, der reelle Teil, wird sich nur durch die kleinen Reibungsglieder von dem Ausdrucke unterscheiden, dessen Verschwinden in dem einfacheren Problem die Konstanten unendlich macht, der andere imaginäre Teil wird nur solche Reibungsglieder enthalten. Sollen nun die Konstanten möglichst groß werden, und vernachlässigen wir Größen von der Ordnung des Quadrates des imaginären Teiles, so genügt es, den reellen Teil gleich Null zu setzen.

Bei dieser Näherung kommt es dann gar nicht mehr auf den Zähler an, also auch nicht auf die Art der Erregung; ebenso genügt es, wenn sich der Nenner in einzelne Faktoren zerlegen läßt, die einzelnen Faktoren gesondert zu betrachten. Nur ist natürlich darauf zu achten, daß man nur wahre Faktoren untersucht, die sich nicht gegen Faktoren des Zählers fortheben, und daß der Faktor nötigenfalls durch Multiplikation mit einer komplexen Konstante eine solche Form erhält, daß er der Grundbedingung genügt.

Mit derselben Näherung läßt sich auch aus der Betrachtung eines Faktors des Nenners die Form des entsprechenden Maximums herleiten. Sei $\alpha_0$ der Wert von $\alpha$, für welchen der reelle Teil eines Nennerfaktors verschwindet, $\alpha_0 \pm \alpha_1$ der wenig verschiedene Wert, für welchen der reelle Teil gleich dem imaginären wird, so läßt sich der variable Faktor des Nenners genähert durch $\alpha_0 - \alpha + i\alpha_1$ darstellen. Da die Konstanten, deren Nenner wir untersuchen, Geschwindigkeiten darstellen, so ist die Schallintensität in der Nähe des Maximums proportional mit

$$\frac{1}{(\alpha_0 - \alpha)^2 + \alpha_1^2},$$

also für $\alpha = \alpha_0 \pm \alpha_1$ auf die Hälfte des Maximalwertes für $\alpha = \alpha_0$ herabgesunken. Wir wollen $2\alpha_1$ die Breite des Maximums nennen.

Bei derjenigen Versuchsmethode, die hier vorzugsweise im Auge behalten wird, bei der Methode, die die Tonhöhe aufsucht, für welche die Tonstärke ein Maximum wird, hängt die Schärfe der Einstellung wesentlich von der Breite des Maximums ab. Aber diese Größe kann noch eine andere sehr wichtige Rolle spielen, da man aus ihr die Verschiebung des Maximums durch Reibung und Wärmeleitung ableiten kann. In der Tat ist die halbe Breite des Maximums, also $\alpha_1$, gleich dieser Verschiebung, mit anderen Worten: für eine Tonhöhe, bei welcher in einem reibungslosen nichtleitenden Gase bestehende Schwingungen erhalten bleiben würden, finden tatsächlich Schwingungen statt, deren Amplitude das $\sqrt{\frac{1}{2}}$fache der größten, bei gleichartiger Erregung von wenig abweichender Frequenz möglichen Amplitude beträgt.

Gelingt es also, Intensitätsmessungen in der Nähe des Maximums auszuführen, so kann man die durch Reibung und Wärmeleitung bedingte Korrektion ohne jede Kenntnis der betreffenden Koeffizienten und auch für Körperformen, deren besondere Theorie ganz unbekannt bleibt, durchführen.

Der hier aufgestellte Satz ist gültig, weil und insofern als die Determinanten, welche als Nenner der Konstanten auftreten, lineare Funktionen von $\varkappa_3$ und von $\varkappa_1/\varkappa_2$ sind. Der von diesen Größen freie Teil gibt das Maximum bei verschwindender Reibung und Wärmeleitung, da nun diese Größen, wie aus (85) ersichtlich ist, einen ebenso großen reellen wie imaginären Teil besitzen, so ist die oben mit $\alpha_0$ bezeichnete Größe um $\alpha_1$ von dem Maximum der einfachen Theorie verschieden, und dies ist eben der Inhalt des Satzes.

11. *Schlußformeln für die Kugel.* Das vorstehend entwickelte Prinzip wenden wir jetzt auf die verschiedenen behandelten Probleme an.

Für die vom Mittelpunkte aus erregte Kugel haben wir das durch Gleichung (37) gegebene $D$ zu betrachten. Wir setzen

$$x = \frac{\alpha}{b} R, \quad \eta = \frac{b^2 - a^2}{a\,b} \sqrt{\frac{a\,\eta_3}{2\,b^2}}. \tag{86}$$

Vernachlässigt man nun die in $\zeta$ multiplizierten Glieder und Glieder von der Ordnung $\alpha \eta_3 / \mathfrak{b}^2$, berücksichtigt Gleichung (38) und (82) und sieht von einem Faktor ab, so erhält man für $D$ den Ausdruck

$$x \cos x - \left(1 + (1 - i)\eta x\right) \sin x .$$

Das Maximum tritt also ein für

$$x \cos x = (1 + \eta x) \sin x ,$$

dagegen ist für

$$x \cos x = \sin x$$

die Schallstärke auf die Hälfte des Maximalwertes zurückgegangen.

Sei nun $x_0$ eine Lösung dieser letzten Gleichung[1]), welche bei Vernachlässigung der Wärmeleitung für das unendlich große Maximum selbst gilt, so ist nach der früher angegebenen Bezeichnung

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \frac{\mathfrak{b}}{R} x_0 .$$

Andererseits läßt sich die Gleichung für das Maximum selbst, da höhere Potenzen von $\eta$ zu vernachlässigen sind, in die Form schreiben

$$(x + i) \cos [x + \eta] = \sin [x + \eta]$$

und man erhält also $x + \eta = x_0$ oder schließlich

$$(87) \qquad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{\mathfrak{b}}{R} (x_0 - i), \\ \alpha_1 = \frac{\mathfrak{b}}{R} \eta . \end{cases}$$

Hieraus lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Bei der zentral erregten Kugel spielt die Reibung überhaupt keine Rolle. Der relative Einfluß der Wärmeleitung auf die Tonhöhe ist gleich $\eta / x_0$, oder, da $\eta$ mit $\sqrt{\alpha_0}$ proportional ist, umgekehrt proportional mit $\sqrt{x_0 R}$. Die $x_0$ sind Zahlen, welche annähernd den ungeraden Zahlen (mit Ausschluß der Eins) proportional sind. Um den Einfluß der Wärmeleitung möglichst zu verkleinern, ist es daher vorteilhaft, einerseits den Kugelradius möglichst groß zu machen, andererseits einen

1) Die von Lord Rayleigh (Theory of Sound 1. p. 279) gegebenen Werte von $x_0 / \pi$ enthalten kleine Fehler; die richtigen Werte sind 1,4303; 2,4590; 3,4709; 4,4774; 5,4815; 6,4844; 7,4865 usw.

möglichst hohen Oberton zu wählen; bei gleicher Tonhöhe würde der Einfluß dem Kugelradius umgekehrt proportional sein. Genau denselben Gesetzen folgt auch die Breite des Maximums; eine große Schärfe der Einstellung ist daher mit einer kleinen Korrektion wegen Wärmeleitung verbunden.

In dem allgemeineren Falle der Schallschwingungen in einer Kugel ist die Determinante der Gleichungen (48) zu untersuchen, also die Größe

$$\begin{aligned} & h_1 F_1^n \{2 \varkappa_3 n F_2^n F_3^{n+1} + 2 \varkappa_2 (n+1) F_2^{n+1} F_3^n \\ & \qquad + 4 \varkappa_2 \varkappa_3 R F_2^{n+1} F_3^{n+1}\} \\ - & h_2 F_2^n \{2 \varkappa_3 n F_1^n F_3^{n+1} + 2 \varkappa_1 (n+1) F_1^{n+1} F_3^n \\ & \qquad + 4 \varkappa_1 \varkappa_3 R F_1^{n+1} F_3^{n+1}\}, \end{aligned}$$

oder auch bei Einführung von erlaubten Vernachlässigungen und Fortlassung eines Faktors

$$n F_1^n \left\{1 - \frac{h_1}{h_2} \frac{2 \varkappa_2 R}{n} \frac{F_3^{n+1}}{F_3^n}\right\} + 2 \varkappa_1 R F_1^{n+1} \left\{1 + \frac{n+1}{2 \varkappa_2 R} \frac{F_3^n}{F_3^{n+1}}\right\}.$$

Wir können von dem Falle absehen, daß $n = 0$ ist, da dies dem bereits behandelten Falle entspricht. Andererseits möge auch der Fall ausgeschlossen werden, daß $n$ sehr groß ist, ohne daß gleichzeitig $R$ sehr groß ist, da man sonst zu sehr hohen Tönen kommen würde. Dann sind die zweiten Terme in den Parenthesen kleine Größen, und es genügt, sie genähert zu berechnen.

Ist, wie wir annehmen wollen, der reelle Teil von $\varkappa_2 R$ und $\varkappa_3 R$ genügend groß und positiv, so kann man

$$F_2^{n+1} = F_2^n \quad \text{und} \quad F_3^{n+1} = F_3^n$$

setzen. Wir benutzen ferner die Bezeichnungen (86) und setzen mit Rücksicht auf Gleichung (19)

$$\frac{1}{2 \varkappa_2 R} = (1 - i) \xi x, \quad \xi = \sqrt{\frac{\eta_1 a}{2 b^2}}. \tag{88}$$

Dann läßt sich der zu untersuchende Ausdruck schreiben

$$n F_1^n \left\{1 - \frac{1-i}{n} x \eta\right\} + 2 i x F_1^{n+1} \{1 + (1 - i)(n+1) \xi x\}.$$

In genügender Näherung sind die Faktoren der Parenthesen beide reell oder beide imaginär. Schreibt man daher jetzt

$F^n_{\left[\frac{ix}{2}\right]}$ an Stelle von $F^n_1$, wo die Funktion durch die Gleichungen (42) und (43) definiert wird, so ist die Bedingung für das Maximum gegeben durch

$$0 = (n - \eta x) F^n_{\left[\frac{ix}{2}\right]} + 2ix F^{n+1}_{\left[\frac{ix}{2}\right]} (1 + (n+1)\xi x).$$

Die Werte von $x$, welche diese Gleichung erfüllen, wenn $\xi$ und $\eta$ verschwinden, mögen wieder mit $x_0$ bezeichnet werden[1]); dann findet man durch Benutzung von (44) ganz analog wie für $n = 0$ an Stelle der speziellen Gleichung (87)

$$(89) \qquad \begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{\mathfrak{b}}{R}\left(x_0 - \dfrac{\eta + n(n+1)\xi}{1 - \dfrac{n(n+1)}{2x_0^2}}\right), \\ \alpha_1 = \dfrac{\mathfrak{b}}{R}\dfrac{\eta + n(n+1)\xi}{1 - \dfrac{n(n+1)}{2x_0^2}}. \end{cases}$$

Auch hier ist also die Korrektion für Reibung und Wärmeleitung gleich der halben Breite des Maximums. Zu erwähnen ist noch, daß der Nenner in den Gleichungen (89) stets positiv bleibt, die Korrektion also stets dasselbe Zeichen hat.

Für die verschiedenen Obertöne kann nach den Gleichungen (89) die Korrektion wegen Reibung und Wärmeleitung und die damit verbundene Schärfe der Einstellung sehr verschieden sein, ohne daß eine einfache Abhängigkeit von Tonhöhe und Kugelradius besteht. Beispielsweise sind die tiefsten Töne für $n = 0$ und $n = 3$ bis auf $^1/_2$ v. H. gleich hoch, während $n = 1$ und $n = 2$ noch tiefere Töne ergeben. Das Korrektionsglied ist aber für $n = 0$ gleich $\eta$, für $n = 3$ gleich $1{,}42(\eta + 12\xi)$, also, da für Luft $\xi$ mindestens so groß sein dürfte als $\eta$, etwa 20 mal größer. Auf die beiden tiefsten Resonanztöne der Kugel müssen also zwei ganz nahe beieinander liegende folgen, von denen aber der dritte sehr scharf und sehr nahe an der berechneten Stelle, der vierte ziemlich verwaschen und dem dritten nahegerückt oder mit seinem Maximum selbst über ihn hinausgerückt sein wird.

12. *Weitere Behandlung des Zylinders.* Wir gehen jetzt zu dem Zylinder mit endlichem Radius über und entwickeln

1) Einige der Werte von $2\pi/x_0$ finden sich unter der Bezeichnung $\lambda$ bei Lord Rayleigh, Theory of Sound 2. p. 234, Übersetzung p. 306.

die früher abgeleiteten Formeln weiter unter Berücksichtigung der erlaubten Vernachlässigungen und unter der Annahme, daß $\zeta = 0$ sei.

Aus den Gleichungen (58) folgt unter Fortlassung des Index $n$, mit Ausnahme von $n = 0$

$$(90)\quad \begin{cases} V C_1 = -n^2 h_2 J_2 (K_1 + L_3) - \frac{4 b_3^2}{r^2} J_3 (h_1 K_1 + h_2 K_2 - 4 h_2 J_2 E), \\ V C_2 = n^2 J_1 (h_1 L_3 - h_2 K_2) + \frac{4 b_3^2}{r^2} J_3 (h_1 K_1 + h_2 K_2 - 4 h_1 J_1 E), \\ V C_3 = -h_2 (J_1 K_2 + J_2 K_1 - 4 J_1 J_2 E) + L_3 (h_1 J_1 - h_2 J_2), \\ V = n^2 h_2 J_1 J_2 - \frac{4 b_3^2}{r^2} J_3 (h_2 J_2 - h_1 J_1). \end{cases}$$

Für ungerade $n$ ist $E$ durch $-\left(E + (1/\pi) D\right)$ zu ersetzen.

Ebenso folgt unter Fortlassung des Index $\nu$ aus (64)

$$(91)\quad \begin{cases} P(D_1 + \pi E_1) = \frac{1}{2} G h_2 U_2 a_3^2 U_3 + \frac{4}{r^2 j_\nu} h_2 U_2 a_3^2 U_3 (D + \pi E) \\ \qquad + h_2 U_2 \frac{4 \pi \beta^2}{r^2} (M_1' + N_3') + \pi a_3^2 U_3 (h_1 M_1' + h_2 M_2'), \\ P(D_2 + \pi E_2) = -\frac{1}{2} G h_1 U_1 a_3^2 U_3 - \frac{4}{r^2 j_\nu} h_1 U_1 a_3^2 U_3 (D + \pi E) \\ \qquad + \frac{4 \pi \beta^2}{r^2} U_1 (h_2 M_2' - h_1 N_3') - \pi a_3^2 U_3 (h_1 M_1' + h_2 M_2'), \\ P(D_3 + \pi E_3) = -\frac{1}{2} G h_2 U_1 U_2 - \frac{4}{r^2 j_\nu} h_2 U_1 U_2 (D + \pi E) \\ \qquad - \pi h_2 (U_2 M_1' + U_1 M_2') + \pi N_3' (h_1 U_1 - h_2 U_2), \\ P = h_2 U_2 \left(a_3^2 U_3 - \frac{4 \beta^2}{r^2} U_1\right) - h_1 U_1 a_3^2 U_3. \end{cases}$$

$$(92)\quad \begin{cases} Q E_1 = -\frac{1}{2\pi} G h_2 R_2 a_3^2 R_3 + \frac{4}{r^2 j_\nu} h_2 R_2 a_3^2 R_3 E \\ \qquad + h_2 R_2 \frac{4 \beta^2}{r^2} (M_1 + N_3) + a_3^2 R_3 (h_1 M_1 + h_2 M_2), \\ Q E_2 = \frac{1}{2\pi} G h_1 R_1 a_3^2 R_3 - \frac{4}{r^2 j_\nu} h_1 R_1 a_3^2 R_3 E \\ \qquad + \frac{4 \beta^2}{r^2} R_1 (h_2 M_2 - h_1 N_3) - a_3^2 R_3 (h_1 M_1 + h_2 M_2), \\ Q E_3 = \frac{1}{2\pi} G h_2 R_1 R_2 - \frac{4}{r^2 j_\nu} h_2 R_1 R_3 E \\ \qquad - h_2 (R_2 M_1 + R_1 M_2) + N_3 (h_1 R_1 - h_2 R_2), \\ Q = h_2 R_2 \left(a_3^2 R_3 - \frac{4 \beta^2}{r^2} R_1\right) - h_1 R_1 a_3^2 R_3. \end{cases}$$

Die Eigentümlichkeit dieses Problems im Gegensatz zu den bisher behandelten besteht darin, daß beim Fortfall der Reibungsglieder die Bedingungen an der Oberfläche durch die praktisch wichtigste Schwingungsform nicht mehr erfüllt werden können, daß vielmehr auch verschwindende Werte dieser Glieder die Bewegung an der Oberfläche in endlicher Weise beeinflussen.

Wir wollen nicht versuchen, die weitere Behandlung allgemeiner durchzuführen, sondern machen von vornherein eine bestimmte den üblichen Versuchsbedingungen entsprechende Annahme über das Verhältnis zwischen dem Radius der Röhre und der Wellenlänge des betrachteten Resonanztones.

Im Grenzfalle bei verschwindender Reibung und Wärmeleitung ergeben sich die Resonanztöne, welche in dem Zylinder auftreten können, aus der Bedingung, daß $\sin[i a_{1,\nu}\pi]$ verschwindet; also für $i a_{1,\nu} = m$, falls $m$ eine ganze Zahl bezeichnet. Setzt man nun noch die halbe Wellenlänge ($= \pi \mathfrak{b}/\alpha$) vorübergehend gleich $\lambda$ und die meist mit $\pi$ bezeichnete Röhrenlänge gleich $l$, so geht die Gleichung (65) über in

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2}{l^2} + \frac{4\beta_\nu^2}{\pi^2 \mathfrak{r}^2}. \tag{93}$$

Hierdurch werden die möglichen Resonanztöne in einem Zylinder durch die einfache Theorie bestimmt.[1])

Wir wollen nun die beschränkende aber der Praxis entsprechende Annahme machen, daß $\mathfrak{r}$ merklich kleiner als $(2\beta_1/\pi)\lambda = 1{,}22\,\lambda$ sei. Dann kann die Gleichung nur für $\nu = 0$ erfüllt werden und ergibt einfach $l = m\lambda$. Dieselbe Beziehung wird nun genähert auch bei vorhandener Reibung und Wärmeleitung gelten, hier sei

$$2\varkappa_1 = i(m - \varepsilon), \tag{94}$$

wo höhere Potenzen von $\varepsilon$ zu vernachlässigen sind.

Die Annahme über die Größe des Radius im Verhältnis zur Wellenlänge gewährt den großen Vorteil, daß die Größen

$$4(b_n^2 + \beta_\nu^2) = \mathfrak{r}^2(a_\nu^2 + n^2),$$

welche als Nenner in den Gleichungen (61) und (67) auftreten, jetzt nur für $\varkappa^2 = \varkappa_1^2$, $n = m$, $\nu = 0$ einen sehr kleinen Wert,

1) Lord Rayleigh, Theory of Sound 2. p. 269.

nämlich den Wert $2\varepsilon m\mathfrak{r}^2$ annehmen können. Es ist daher erlaubt, in einem Teil dieser Gleichungen die Summen auf ein einziges Glied zu beschränken.

Wir machen nun sogleich noch von einem anderen Vorteil Gebrauch, indem wir bemerken, daß je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist, die Konstanten und ihre Bestimmungsgleichungen in zwei verschiedene Gruppen zerfallen. Wir nehmen zunächst an, daß $m$ gerade sei, dann sind die $D_\nu$ nicht zu berücksichtigen und auch $n$ ist durchweg als gerade anzusehen. Es bleiben also nur sechs unendliche Reihen von Konstanten mit ebensoviel Bedingungsgleichungen zu behandeln übrig.

Für gerade $m$ wird nun nach (61) und (67)

$$K_1^m = \frac{1}{\varepsilon m} E_{1,0}, \tag{95}$$

$$M_{1,0} = \frac{1}{\varepsilon m \mathfrak{r}^2} C_1^m, \tag{96}$$

und ferner, wie aus (60) und (66) folgt,

$$J_1^m = \frac{1}{b_{1,m}^2} = \frac{2}{\varepsilon m \mathfrak{r}^2}, \tag{97}$$

$$R_{1,0} = \frac{1}{m\varepsilon}. \tag{98}$$

Der Radius des Zylinders $\mathfrak{r}$ durfte nicht größer als die halbe Wellenlänge sein, wir nehmen aber andererseits an, daß er noch so groß ist, daß $\varkappa_2 \mathfrak{r}$ und $\varkappa_3 \mathfrak{r}$ von derselben Ordnung mit $1/\varepsilon$ sind. Dann haben die $b_2$ und $b_3$ einen großen, wie wir annehmen, positiven, reellen Teil. Aus der Definition der $J$ durch (60) folgt dann, daß

$$J_2^n = \frac{1}{b_{2,n}}, \quad J_3^n = \frac{1}{b_{3,n}}, \tag{99}$$

also klein von der Ordnung $\varepsilon$ werden. Der Nenner $V$ in (90 vereinfacht sich dann für nicht sehr große Werte von $n$ zu

$$V = -4\frac{h^2}{\mathfrak{r}^2}\frac{b_3}{b_2}, \text{ ausgenommen } n = m. \tag{100}$$

Die Größen $a_{2,\nu}$ und $a_{3,\nu}$ haben nach den schon gemachten Annahmen einen großen, wie vorausgesetzt werden soll, positiven, reellen Teil. Dann folgt aus den Definitionsgleichungen (66)

$$R_2 = \frac{\pi}{2a_2}, \quad R_3 = \frac{\pi}{2a_3} \tag{101}$$

und der Nenner $Q$ in den Gleichungen (92) wird einfacher

$$(102)\quad Q = h_2 R_2 a_2^2 R_3 = \frac{\pi^2}{4} h_2 \frac{a_2}{a_1}, \text{ ausgenommen } \nu = 0,$$

Die Gleichungen (90), (91) und (92) gelten nicht für $n=0$ und $\nu=0$. Für diese Werte erhält man aus den modifizierten Bedingungsgleichungen (58) und (64)

$$(103)\qquad C_1^0 + 2E = -C_2^0 = b_{2,0}\left(K_2^0 + \frac{h_1}{h_2} K_1^0\right)$$

und

$$(104)\quad \begin{cases} (h_2 R_{2,0} - h_1 R_{1,0}) E_{1,0} \\ \qquad = -\frac{G_0}{2\pi} h_2 R_{2,0} + \frac{4}{\mathfrak{r}^2} h_2 R_{2,0} E + h_1 M_{1,0} + h_2 M_{2,0} \\ (h_2 R_{2,0} - h_1 R_{1,0}) E_{2,0} \\ \qquad = \frac{G_0}{2\pi} h_1 R_{1,0} - \frac{4}{\mathfrak{r}^2} h_1 R_{1,0} E - h_1 M_{1,0} - h_2 M_{2,0}. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen können die sechs Gleichungssysteme auf drei solche reduziert werden. Man geht beispielsweise von der Gleichung (61) aus und führt darin für die $E$ ihre Werte aus (92) oder (104) ein, ersetzt dann mittels (67) die $M$ und $N$ durch die $C$ und diese wieder mittels (90) oder (103) durch die $K$. Ebenso kann man von anderen Größen ausgehen und die Substitutionen in der angegebenen Folge ausführen.

Wir führen die Substitutionen zunächst nur teilweise aus und finden

$$(105)\quad \begin{cases} K_1^n = \frac{\mathfrak{r}^2}{b_{1,n}^2} E_{1,0} + 4E\left(J_1^n - \frac{1}{b_{1,n}^2}\right) + \frac{8}{\pi} \sum_1^\infty \frac{j_\nu \beta_\nu^2 (M_{1,\nu} + N_{2,\nu})}{a_{2,\nu}(b_{1,n}^2 + \beta_\nu^2)} \\ \qquad + \frac{2\mathfrak{r}^2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{j_\nu a_{2,\nu}(h_1 M_{1,\nu} + h_2 M_{2,\nu})}{h_2 (b_{1,n}^2 + \beta_\nu^2)} + O_1^n, \\ K_2^n = \frac{\mathfrak{r}^2}{b_{2,n}^2} E_{2,0} - \frac{8 h_1}{\pi h_2} E \sum_1^\infty \frac{a_{2,\nu} R_{1,\nu}}{b_{2,n}^2 + \beta_\nu^2} \\ \qquad + \frac{16}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{j_\nu \beta_\nu^2 R_{1,\nu} a_{2,\nu}(h_2 M_{2,\nu} - h_1 N_{2,\nu})}{h_2 a_{2,\nu}(b_{2,n}^2 + \beta_\nu^2)} \\ \qquad - \frac{2\mathfrak{r}^2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{j_\nu a_{2,\nu}(h_1 M_{1,\nu} + h_2 M_{2,\nu})}{h_1 (b_{2,n}^2 + \beta_\nu^2)} + O_2^n, \end{cases}$$

$$(105)\quad \begin{cases} L_3^n = -\dfrac{32}{\pi} E \displaystyle\sum_1^\infty \dfrac{R_{1,\nu}\beta_\nu^2}{a_{3,\nu}(b_{3,n}^2+\beta_\nu^2)} \\ \qquad - \dfrac{8\mathfrak{r}^2}{\pi} \displaystyle\sum_1^\infty \dfrac{j_\nu \beta_\nu^2 (M_{1,\nu}+N_{3,\nu})}{a_{3,\nu}(b_{3,n}^2+\beta_\nu^2)} \\ \qquad - \dfrac{16\mathfrak{r}^2}{\pi^2} \displaystyle\sum_1^\infty \dfrac{j_\nu \beta_\nu^2 R_{1,\nu} a_{2,\nu}(h_2 M_{2,\nu} - h_1 N_{3,\nu})}{a_{3,\nu}(b_{3,n}^2+\beta_\nu^2)} + O_3^n. \end{cases}$$

Für $n = 0$ ist die rechte Seite zu halbieren.

$$(106)\quad \begin{cases} 2 j_\nu M_{1,\nu} = \dfrac{C_1^0}{b_{1,0}^2+\beta_\nu^2} + \dfrac{C_1^m}{b_{1,m}^2+\beta_\nu^2} + \dfrac{\mathfrak{r}^2}{4} \displaystyle\sum \dfrac{p^2 (K_1^p + L_3^p)}{b_{3,p}(b_{1,p}^2+\beta_\nu^2)} \\ \qquad + \dfrac{\mathfrak{r}^2}{4} \displaystyle\sum \dfrac{b_{2,p}(h_2 K_2^p + h_1 K_1^p)}{h_2 b_{3,p}(b_{1,p}^2+\beta_\nu^2)}, \\ 2 j_\nu M_{3,\nu} = \dfrac{C_3^0}{b_{2,0}^2+\beta_\nu^2} + \dfrac{C_2^m}{b_{2,m}^2+\beta_\nu^2} + \dfrac{\mathfrak{r}^2}{4} \displaystyle\sum \dfrac{p^2 J_1^p b_{2,p}(h_2 K_2^p - h_1 L_3^p)}{h_2 b_{3,p}(b_{2,p}^2+\beta_\nu^2)} \\ \qquad - \displaystyle\sum \dfrac{b_{2,p}(h_1 K_1^p + h_2 K_2^p)}{h_2 (b_{2,p}^2+\beta_\nu^2)}, \\ 2 j_\nu N_{3,\nu} = -\dfrac{m^2 C_3^m}{b_{3,m}^2+\beta_\nu^2} - \dfrac{\mathfrak{r}^2}{4} \displaystyle\sum \dfrac{p^2 (K_1^p + L_3^p)}{b_{3,p}(b_{3,p}^2+\beta_\nu^2)} \\ \qquad - \dfrac{\mathfrak{r}^2}{4} \displaystyle\sum \dfrac{p^2 J_1^p b_2^p (h_2 K_2^p - h_1 L_3^p)}{b_{3,p}(b_{3,p}^2+\beta_\nu^2)}. \end{cases}$$

Dabei sind in den Summen nach $p$ die Glieder $p = 0$ und $p = m$ fortgelassen; ferner ist gesetzt

$$(107)\quad \begin{cases} O_1^n = -\dfrac{\mathfrak{r}^2}{2\pi} \displaystyle\sum_1^\infty \dfrac{j_\nu G_\nu}{b_{1,n}^2+\beta_\nu^2}, \\ O_2^n = \dfrac{\mathfrak{r}^2}{\pi^2} \dfrac{h_1}{h_2} \displaystyle\sum_1^\infty \dfrac{R_{1,\nu} a_{2,\nu} j_\nu G_\nu}{b_{2,n}^2+\beta_\nu^2}, \\ O_3^n = \dfrac{4\mathfrak{r}^2}{\pi^2} \displaystyle\sum \dfrac{R_{1,\nu} j_\nu \beta_\nu^2 G_\nu}{a_{3,\nu}(b_{3,n}^2+\beta_\nu^2)}. \end{cases}$$

Die weitere Ausführung der Substitution ist für die unmittelbar vorliegende Aufgabe unnötig. Bemerkt sei nur, daß die Summen nach $\nu$ oder $p$, die sich dabei ergeben, ermittelt werden können, und zwar dadurch, daß man die Summen durch Integrale ersetzt, wenn nur die Indizes 2 und 3 auf-

treten, da dann die einzelnen Terme klein gegen die Summen sind, daß man aber, wenn auch der Index 1 auftritt, nur in bezug auf die mit diesem Index behafteten Größen summieren kann und für den anderen Faktor einen Mittelwert setzt.

Wir benutzen die Gleichungen (105) und (106) hier nur, um die Größenordnung der einzelnen Konstanten zu erkennen. Nimmt man die $C$ und $E$ zunächst sämtlich als endlich an, so findet man, daß die $K_2^n$ und $M_{2,\nu}$ von der Ordnung $\varepsilon^2$, die $L_2^n$ und $N_{2,\nu}$ endlich sein müssen. Die $K_1^n$ und $M_{1,\nu}$ sind im allgemeinen endlich bis auf $K_1^m$ und $M_{1,0}$, die, wie schon früher angegeben, von der Ordnung $1/\varepsilon$ sind. Von den $C$ und $E$ bleiben jetzt bloß die $C^m$ und $E_0$ sowie $C_1^n$ und $E$ endlich, während die anderen Konstanten dieser Art von der Ordnung $\varepsilon$ sind.

Zur Feststellung des Maximums genügt es, die Glieder höchster Ordnung zu betrachten. Wir lassen von hier an die Indizes $n = m$ und $\nu = 0$, die allein in Frage kommen, fort.

Die beiden Gleichungen (64), aus denen die Gleichungen (104) abgeleitet waren, lassen sich nun schreiben

$$\frac{4}{\mathfrak{r}^2} E - E_1 - E_2 = \frac{1}{2\pi} G, \tag{108}$$

$$h_1 R_1 E_1 + h_2 R_2 E_2 + h_1 M_1 = 0. \tag{109}$$

In der zweiten dieser Gleichungen drücken wir $M_1$ mittels (96) durch $C_1$, dieses mittels (90) durch $K_1$ und $E$ und endlich $K_1$ mittels (95) durch $E_1$ aus. Man erhält

$$M_1 + R_1 E_1 = \frac{4 b_2 h_1 J_2}{\varepsilon m \mathfrak{r}^2 V} \left( \frac{4}{\mathfrak{r}^2} E - E_1 \right).$$

Führt man diesen Wert in (109) ein, so kann man aus (108) und (109) die Größen $(4/\mathfrak{r}^2)E - E_1$ und $E_2$ bestimmen. Man erhält insbesondere

$$\left( \frac{4}{\mathfrak{r}^2} E - E_1 \right) \left( 1 + \frac{4 h_1 b_2 J_2}{\varepsilon m \mathfrak{r}^2 R_2 V} \right) = \frac{1}{2\pi} G. \tag{110}$$

Dieser Wert ist unter der Annahme abgeleitet, daß $m$ gerade ist. Ist $m$ ungerade, so fallen in den allgemeinen Formeln die Ausnahmefälle für $n=0$ fort. Im übrigen treten $P$, $U$, $-(E + (1/\pi)D)$, $-M'$, $-N'$ an Stelle von $Q$, $R$, $E$, $M$, $N$. Es ist daher leicht, auch für diesen Fall die Formeln hinzuschreiben.

13. *Schlußformel für den endlichen Zylinder.* Um die Lage des Maximums für den Zylinder zu finden, muß der reelle Teil des Koeffizienten der Konstanten $(4/\mathfrak{r}^2)E - E_1$ in Gleichung (110) gleich Null gesetzt werden. Führt man für $J_2$ und $R_2$ ihre Werte ein, so erhält dieser Koeffizient die Form

$$1 + \frac{16\, h_1\, \varkappa_2\, b_2}{\pi\, \varepsilon\, m\, \mathfrak{r}^2\, b_2\, V}.$$

Nun ist nach (90), (97), (99)

$$\frac{1}{h_2}\, \varepsilon\, m\, \mathfrak{r}^2\, b_2\, V = 2\, m^2 - 4\, \varepsilon\, m\, b_3 + 8\, \frac{h_1}{h_2}\, \frac{b_2\, b_3}{\mathfrak{r}^2}.$$

Um weiter zu gehen, müssen $b_2$ und $b_3$ in ihren reellen und imaginären Teil zerlegt werden. Es ist

$$b_3 = \frac{\mathfrak{r}}{2}\left\{\sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{m^2 + 2\,\frac{\alpha}{\eta_1} + m^2}\right\}} + i\,\sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{m^2 + \frac{2\,\alpha}{\eta_1}} - m^2\right\}}\right\},$$

während für $b_2$ an Stelle von $\eta_1$ der Ausdruck $\eta_3\,(\mathfrak{a}^2/\mathfrak{b}^2)$ zu setzen ist. Für die Anwendung wird aber die Annahme genügen und entspricht den bisherigen Vernachlässigungen, daß $m^2\,\eta_1/2\,\alpha$ zu vernachlässigen sei; dann ist $b_2 = \mathfrak{r}\,\varkappa_2$, $b_3 = \mathfrak{r}\,\varkappa_3$ zu setzen. Berücksichtigt man noch die genäherte Beziehung $\alpha = \mathfrak{b}\,m$ und setzt für $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $h_1/h_3$ ihre Werte nach (85), so wird der Ausdruck für den zu untersuchenden Koeffizienten

$$(111)\quad 1 + \frac{4\, m^2\, \dfrac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}\, \mathfrak{r}\,\sqrt{\dfrac{\eta_3}{\eta_1}}}{\pi\left\{2\, m^2 - 2\, \varepsilon\, m\,(1+i)\,\mathfrak{r}\,\sqrt{\dfrac{\alpha}{2\,\eta_1}} + 2\, m^2\, \dfrac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}\,\sqrt{\dfrac{\eta_3}{\eta_1}}\right\}}.$$

Bringt man den Ausdruck auf gleiche Benennung mit rationalem Nenner, so ergibt sich im Zähler die Korrektion $\varepsilon$ mit $1 - i$ multipliziert. Um der Grundbedingung zu genügen, müssen wir diesen Faktor durch Multiplikation mit $1 + i$ reell machen und dann den reellen Teil des Nenners gleich Null setzen. Führt man noch für die Länge der Röhre $\mathfrak{l}$ an Stelle von $\pi$ ein, so erhält man dann für die durch (94) definierte Korrektionsgröße $\varepsilon$ den Wert

$$(112)\qquad \frac{\varepsilon}{m} = \frac{1}{\mathfrak{r}}\,\sqrt{\frac{\eta_1}{2\,\alpha}} + \left(\frac{1}{\mathfrak{r}} + \frac{2}{\mathfrak{l}}\right)\frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}\,\sqrt{\frac{\eta_3}{2\,\alpha}}.$$

Die in $1/\mathfrak{r}$ multiplizierten Glieder sind gleich der von Helmholtz und Kirchhoff unter abweichenden Voraus-

setzungen gefundenen Korrektion wegen des Einflusses der Zylinderfläche. Der in 2/1 multiplizierte Term entspricht dem Einfluß der Endflächen. Es kann auffallen, daß dieser Einfluß nicht größer ist, und daß er in der hier abgeleiteten ersten Näherung genau dieselbe Form hat, wie der Einfluß der Zylinderfläche.

Auch in diesem Falle ist offenbar das mehrfach erwähnte Gesetz erfüllt, welches eine Beziehung zwischen der Breite und der Verschiebung des Maximums fortsetzt.

14. *Zusammenfassung.*

Die von Kirchhoff aufgestellten Differentialgleichungen für die Schallbewegung in einem reibenden, die Wärme leitenden Gase werden unter allgemeineren Voraussetzungen neu abgeleitet.

Unter Annahme bestimmter Bedingungen an der Oberfläche wird die Lösung der Gleichungen für den Fall der Kugel und des Kreiszylinders vorbereitet.

In erster Näherung wird die durch Reibung und Wärmeleitung bedingte Korrektion der Schwingungszahlen für die Kugel und unter gewissen Voraussetzungen über das Verhältnis des Radius zur Wellenlänge auch für den endlichen Kreiszylinder abgeleitet. Im letzteren Falle tritt zu der schon von Helmholtz und Kirchhoff unter anderen Voraussetzungen abgeleiteten Korrektion noch ein Term der vom Einfluß der Endflächen herrührt.

Es wird eine einfache, von den Koeffizienten der Reibung und Wärmeleitung sowie von der besonderen Form des Resonators unabhängige Beziehung aufgestellt zwischen der Änderung der Schallintensität des Resonators mit der Tonhöhe des Erregers und zwischen der Verschiebung des Maximums der Intensität durch Reibung und Wärmeleitung.

(Eingegangen 28. September 1907.)

## 2. *Zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau und akustische Analogien;* *von Mathias Cantor.*

(Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Kl. 116. Abt. II a. 1907. Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1907.)

§ 1. Sieht man von den astronomischen Messungen ab, so beruht die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit auf den Überlegungen, welche von Fizeau angestellt worden sind; denn dieselben Überlegungen liegen auch der Methode von Foucault zugrunde. Bei der fundamentalen Bedeutung, welche der Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit zukommt, erscheint eine exakte Begründung der Fizeauschen Methode von beträchtlicher Wichtigkeit. Der Mangel einer solchen zeigte sich aber auf das deutlichste bei der Diskussion jener Versuche, welche einen Einfluß der Farbe auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ergaben.

Young und Forbes[1]) hatten durch Messungen, welche im wesentlichen nach der Fizeauschen Methode angestellt worden waren, gefunden, daß das blaue Licht sich um 1,8 Proz. schneller fortpflanzt als das rote.

Lord Rayleigh[2]) führte dieses Ergebnis darauf zurück, daß bei der Fizeauschen Methode nicht die „Lichtgeschwindigkeit", sondern eine „Gruppengeschwindigkeit" bestimmt werde.

Die Gruppe entsteht durch Übereinanderlagerung zweier Wellenzüge von gleicher Richtung und gleicher Amplitude, deren Perioden sich ein wenig voneinander unterscheiden. Lord Rayleigh[3]) hatte früher solche Wellengruppen untersucht

1) Young u. G. Forbes, Nature. 24. p. 303. 1881.

2) Lord Rayleigh, Nature 24. p. 382. 1881.

3) J. W. Strutt, Baron Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen, Braunschweig 1880. 1. Bd. p. 327 und 2. Bd. p. 385.

und gezeigt, daß deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der eines einfachen Wellenzuges verschieden ist, und er nimmt an, daß bei der Fizeauschen Methode die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer solchen Gruppe gemessen wird.

W. H. Macaulay[1]) hat auf die Schwierigkeit hingewiesen, welche der Erklärung von Lord Rayleigh anhaftet, und denselben zu einer weiteren Darstellung[2]) veranlaßt. Indes geht auch aus diesen Betrachtungen in keiner Weise hervor, wie durch das Fizeausche Experiment veranlaßt wird, daß Wellen von verschiedener Periode auftreten, in welcher Beziehung die Perioden der einzelnen Wellen, welche die Gruppe bilden sollen, zu der Periode des Lichtes stehen, mit dem der Fizeausche Versuch angestellt wird, und warum endlich gerade die Geschwindigkeit der Gruppe bei diesem Versuch bestimmt wird.

Spätere Auseinandersetzungen[3]) beziehen sich auf die Methode von Foucault und brauchen deshalb hier nicht näher besprochen zu werden. Es geht aber aus ihnen hervor, daß sowohl über die Grundlage der physikalischen Methoden zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit als auch über die Bedeutung der mit diesen Methoden ausgeführten Messungen eine ziemliche Unsicherheit besteht und der Zusammenhang zwischen der nicht direkt meßbaren Lichtgeschwindigkeit und den Beobachtungen, durch welche ihre Größe bestimmt wird, nicht streng hergestellt ist. Unter diesen Umständen schien es angemessen, zunächst festzustellen, *was bei dem Fizeauschen Experiment eigentlich beobachtet wird.*

§ 2. Die Fizeausche Anordnung läßt sich im Schema durch die Fig. 1 darstellen.

Ein Bündel paralleler Strahlen durchsetzt das rotierende Zahnrad $R$, wird vom Spiegel $S$ reflektiert und nach nochmaligem Durchgange durch das Zahnrad durch das Auge bei $A$ wahrgenommen.

Die Beobachtung ergibt, daß die Intensität der wahrgenommenen Lichter sich mit wachsender Rotationsgeschwindig-

1) W. H. Macaulay, Nature. 24. p. 556. 1881.

2) Lord Rayleigh, Nature. 25. p. 52. 1881/82.

3) Vgl. F. Auerbach im Handbuch der Physik. Herausgegeben von A. Winkelmann, 2. Aufl. Bd. VI. p. 480. 1906.

keit periodisch ändert. Eine exakte Theorie der Erscheinung wird die Frage zu beantworten haben: *Wie hängt die beobachtete Lichtintensität von den Abmessungen der Apparate und der Geschwindigkeit des Rades ab?*

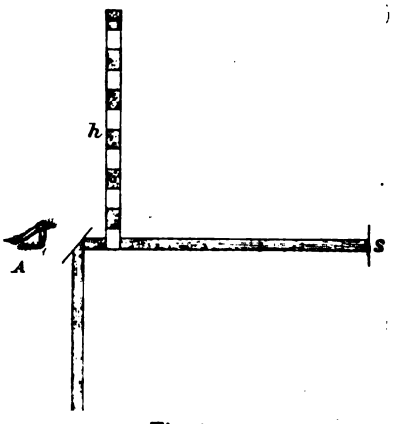


Fig. 1.

§ 3. Um zu einer Lösung dieser Frage zu gelangen, kann zunächst der Spiegel in der Fizeauschen Anordnung ersetzt werden durch ein zweites Zahnrad, welches dem ersten ganz gleich ist, sich am Orte des Spiegelbildes des ersten befindet und mit demselben vollkommen synchron bewegt wird.

Dies vorausgesetzt, soll der Durchgang eines Bündels paralleler Strahlen durch die beiden rotierenden Räder untersucht werden. Das Bündel sei normal zu den Rädern — diese Richtung wird zur $x$-Achse gewählt — und sei so schmal, daß es an allen Stellen als von gleicher Intensität betrachtet werden kann.

Der Lichteindruck, den das aus dem zweiten Zahnrad austretende Licht in einem dort befindlichen Auge bewirkt, wird dann durch den zeitlichen Mittelwert der Amplitudenquadrate bestimmt. Der Raum zwischen den Zahnrädern sei erfüllt von einem homogenen Medium, in welchem die Maxwellschen Gleichungen gelten, so daß für den Lichtvektor $E$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{1}$$

besteht, wo $\omega$ die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium bezeichnet. Zur Bestimmung von $E$ ist dann weiter der Anfangszustand und das Verhalten an der Stelle $x = 0$, wo sich das erste Zahnrad befindet, gegeben.

Durch das Zahnrad wird der hinter ihm befindliche Raum abwechselnd beleuchtet und vollständig verdunkelt. Ist $N$ die

Schwingungszahl des einfallenden Lichtes und $\nu$ die Zahl der Verdunkelungen in der Sekunde, so hat man für $x = 0$

$$E = S \sin 2\pi N t, \tag{2}$$

wo

$$S = A\left[1 + \frac{4}{\pi}\left(\cos 2\pi\nu t - \frac{1}{3}\cos 6\pi\nu t + \ldots\right)\right].$$

Dabei bezeichnet $2A$ die Amplitude des einfallenden Lichtes.

Bis zur Zeit $t = 0$ soll das Zahnrad sich in einer Stellung befinden, in welcher das Licht ungestört durchgeht, so daß bis $t = 0$

$$E = 2A \sin 2\pi\left(N(t - \frac{x}{\omega})\right). \tag{3}$$

Die Differentialgleichung (1) kann nun entsprechend den Nebenbedingungen (2) und (3) nach der von Riemann[1]) angegebenen Methode, welche schon bei einer früheren Gelegenheit[2]) benützt worden ist, integriert werden. Die dort angewendete Bezeichnung und Darstellung wird auch hier gebraucht.

Die Rechnung wird sehr vereinfacht, wenn die Verdunkelungen nicht *sprungweise*, sondern *stetig* erfolgen. Dies wird erreicht, wenn man statt der Zahnräder Schirme benützt, welche den Zähnen entsprechende Sektoren tragen, durch die das Licht stetig bis zur vollständigen Abblendung geschwächt wird. Auch mit einem rotierenden Spiegel oder Nicholschen Prisma ließe sich eine stetige Abschwächung des Lichtes ausführen. Im folgenden soll eine solche vorausgesetzt werden und dann kann $S$ in (2) ersetzt werden durch

$$S' = 2A\cos^2\pi\nu t.$$

Setzt man noch $y = \omega t$ und stellt $E$ in der $xy$-Ebene dar (Fig. 2), so hat man für $E$ im Punkte $(xy)$: b

$$2E = E_a + E_b + \int_a^b \frac{\partial E}{\partial y}dx + \frac{\partial E}{\partial x}dy. \tag{I}$$

1) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen. Braunschweig 1901. 2. Bd. p. 224.

2) M. Cantor, Ann. d. Phys. 20. p. 333. 1906.

Aus (3) folgt dann für $y = 0$

$$(3a)\qquad \begin{cases} E = -2A\sin\beta x \\ \dfrac{\partial E}{\partial x} = -2A\beta\cos\beta x \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = +2A\beta\cos\beta x, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist $\beta = 2\pi N/\omega$.

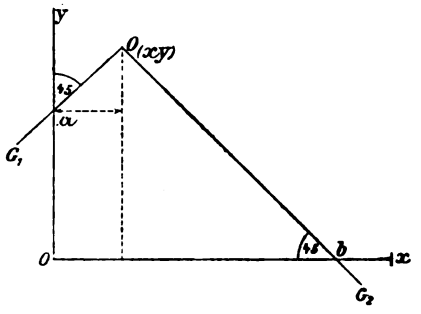



Fig. 2.

Es folgt hieraus, daß $(\partial E/\partial x + \partial E/\partial y)$ längs den zu $G_2$ parallelen Geraden verschwindet, und man erhält deshalb für $x = 0$

$$(2a)\qquad \begin{cases} E = & 2A\cos^2\alpha y\sin\beta y \\ \dfrac{\partial E}{\partial y} = & 2A\beta\cos^2\alpha y\cos\beta y - 2A\alpha\sin 2\alpha\sin\beta y \\ \dfrac{\partial E}{\partial x} = & -2A\beta\cos^2\alpha y\cos\beta y + 2A\alpha\sin 2\alpha\sin\beta y, \end{cases}$$

wo $\alpha = \pi\nu/\omega$.

Bei Ausführung der in (I) angedeuteten Integration ist zu berücksichtigen, daß

$$dx = 0 \text{ längs } \mathfrak{a}\,0$$
$$dy = 0 \text{ längs } 0\,\mathfrak{b}$$

und daß die Koordinaten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wie in Fig. 2 ersichtlich, durch $(y - x)$ bez. $(y + x)$ angegeben werden. Für $E$ im Punkte $(xy)$ folgt dann

$$2E = 2A\cos^2\alpha(y-x)\sin\beta(y-x) - 2A\beta\int_{y-x}^{0}\cos^2\alpha y\cos\beta y\,dy$$
$$+ 2A\alpha\int_{y-x}^{0}\sin 2\alpha\sin\beta y\,dy + 2A\beta\int_{0}^{y+x}\cos\beta x\,dx$$

und daraus nach einfacher Umformung

$$\text{(Ia)} \quad \begin{cases} 2E = 2A\sin\beta(y-x) + A\sin(\beta+2\alpha)(y-x) \\ \qquad\qquad + A\sin(\beta-2\alpha)(y-x) \end{cases}$$

oder, wenn $y$, $\alpha$, $\beta$ durch $t$, $\nu$ und $N$ ersetzt werden,

$$\text{(Ib)} \quad \begin{cases} 2E = 2A\sin 2\pi N\left(t-\frac{x}{\omega}\right) + A\sin 2\pi(N+\nu)\left(t-\frac{x}{\omega}\right) \\ \qquad\qquad + A\sin 2\pi(N-\nu)\left(t-\frac{x}{\omega}\right). \end{cases}$$

Hiernach erhält man drei fortschreitende Wellenzüge; einen mit der ursprünglichen Periode $N$ und zwei neue, deren Schwingungszahlen um die der Verdunkelung vermehrt, beziehungsweise vermindert sind.

Setzt man voraus, daß, wie es beim Fizeauschen Experiment der Fall ist, $\nu$ sehr klein gegen $N$ ist, so kann das Auge die neu auftretenden Farben nicht als solche wahrnehmen, sondern erhält einen Lichteindruck, welcher der ursprünglichen Periode entspricht. Die Intensität dieses Lichteindruckes wird erhalten, wenn man die drei Wellenzüge zu einem mit der Periode $N$ und zeitlich veränderlicher Amplitude $B$ zusammenfaßt.

Aus (Ia) folgt nun

$$E = A[\cos\beta x + \cos\beta x\cos 2\alpha(y-x)]\sin\beta y \\ - A[\sin\beta x + \sin\beta x\cos 2\alpha(y-x)]\cos\beta y,$$

woraus man findet

$$\text{(II)} \qquad B = 2A\cos^2\alpha(y-x).$$

Dieses Licht wird nun durch den zweiten rotierenden Schirm beobachtet und durch diesen geschwächt im Verhältnis

$$\cos^2\alpha y.$$

Der im Auge entstehende Lichteindruck wird bestimmt durch den Mittelwert des Amplitudenquadrates während der Dauer einer Verdunkelungsperiode, also während der Zeit $T = 1/\nu$. Bezeichnet also $i$ die wahrgenommene Lichtstärke, so hat man

$$i = \frac{1}{T}\int_0^T B^2\cos^4\alpha y\, dt$$

oder, wenn statt $t$ und $T$ $y$ und $\alpha$ eingesetzt wird,

$$i = \frac{4\alpha A^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^4 \alpha(y - x) \cos^4 \alpha y \, dy .$$

Man erhält hieraus

$$i = \frac{3}{32} A^2 \left[1 + 8 \cos^2 \alpha x + \frac{8}{3} \cos^2 \alpha x\right].$$

Es ändert sich hiernach die wahrgenommene Lichtstärke periodisch mit wachsendem $\alpha$, d. i. mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit der Schirme und erhält immer gleiche Werte für

$$\alpha x = \alpha_0 x + k\pi ,$$

wenn $k$ eine ganze Zahl bedeutet.

Die Lichtstärke verschwindet nie völlig, aber sie hat ein sehr deutliches Minimum für

$$\alpha x = k \frac{\pi}{2} .$$

Die kleinste verhält sich zur größten Lichtstärke, welche ceteris paribus durch Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit entsteht, wie 3 : 35. Die kleinste Geschwindigkeit, welche ein Minimum von $i$, also die möglichst vollständige Verdunkelung des Gesichtsfeldes ergibt, ist bestimmt durch

(III) $$\alpha x = \frac{\pi}{2} .$$

Hierbei bedeutet $x$ den Abstand der beiden Schirme.

Bei dem Fizeauschen Versuch entspricht $x = 2l$, wenn mit $l$ der Abstand des Zahnrades vom Spiegel bezeichnet wird. Setzt man für $\alpha$ seinen Wert und bezeichnet mit $\nu_0$ die Zahl der Verdunkelungen pro Sekunde bei der kleinsten Geschwindigkeit, die ein Minimum von $i$ ergibt, so muß

$$4 l \nu_0 = \omega .$$

Beim Fizeauschen Zahnrade würde $\nu_0$ ausgedrückt durch

$$\nu_0 = z n ,$$

wenn $z$ die Anzahl der Zähne, $n$ die Tourenzahl des Rades angibt, bei welcher die erste Verdunkelung eintritt, und man erhält

$$\omega = 4 l z n ,$$

die bekannte Relation, nach welcher die Lichtgeschwindigkeit bestimmt wurde.

§ 4. In der Maxwellschen Gleichung (1) bedeutet $\omega$ eine durch die Natur des Mediums bestimmte Konstante. Die Anwendung dieser Gleichung setzt voraus, daß in dem Medium keine Dispersion stattfindet. Nimmt man aber an, daß diese Gleichung auch noch auf dispergierende Medien angewendet werden kann, wenn man $\omega$ für verschiedene Schwingungszahlen verschiedene Werte beilegt, so läßt sich der experimentell beobachtete Einfluß der Farbe auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zum Ausdruck bringen.

Wie (Ib) zeigt, treten neben der ursprünglichen Schwingung mit der Periode $N$ noch solche mit den Perioden $N+\nu$ und $N-\nu$ auf. Wenn nun in einem dispergierenden Medium $\omega$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet für Licht von der Schwingungszahl $N$, so müssen den beiden anderen Wellenzügen davon verschiedene Werte $\omega'$ und $\omega''$ beigelegt werden. Dies vorausgesetzt erhält man aus (Ib):

$$\text{(Ic)} \quad \begin{cases} 2E = 2A\sin 2\pi N\left(t-\frac{x}{\omega}\right) + A\sin 2\pi(N+\nu)\left(t-\frac{x}{\omega'}\right) \\ \qquad\qquad + A\sin 2\pi(N-\nu)\left(t-\frac{x}{\omega''}\right). \end{cases}$$

Nun ist $\nu$ sehr klein gegen $N$ — bei den Versuchen von Fizeau war $\nu/N$ etwa $10^{-9}$ — und man kann deshalb setzen

$$\omega' = \omega + \frac{\partial\omega}{\partial N}\nu = \omega(1+\varepsilon)$$
$$\omega'' = \omega - \frac{\partial\omega}{\partial N}\nu = \omega(1-\varepsilon),$$

wo

$$\varepsilon = \frac{\nu}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial N}$$

auch ein sehr kleiner Bruch ist.

Führt man dies in (Ic) ein und vernachlässigt die Glieder zweiter Ordnung, so erhält man

$$2E = 2A\sin 2\pi N\left(t-\frac{x}{\omega}\right) + A\sin 2\pi N\left(t-\frac{x}{\omega}+\frac{m}{\omega}\right) + A\sin 2\pi N\left(t-\frac{x}{\omega}-\frac{m}{\omega}\right),$$

wo

$$m = \varepsilon x + \frac{\omega t\nu}{N} - \frac{x\nu}{N}$$

gesetzt ist.

Drückt man $t$, $\nu$, $N$ wieder durch $y$, $\alpha$, $\beta$ aus, so wird

$$2E = 2A\sin\beta(y-x) + A\sin\beta(y-x+m) + A\sin\beta(y-x-m).$$

Für die Amplitude des resultierenden Wellenzuges erhält man

$$B = A(1+\cos\beta m)$$

oder, wenn man für $m$ seinen Wert setzt, nämlich

$$m = \left(\frac{x}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial N}N + y - x\right)\frac{\nu}{N},$$

wird

$$B = A\left[1+\cos 2\alpha\left(y-x+\frac{x}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial N}N\right)\right].$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\xi = x\left(1-\frac{N}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial N}\right),$$

so wird

(IIa) $$B = 2A\cos^2\alpha(y-\xi).$$

Man erhält also denselben Ausdruck wie in (II), wenn dort $x$ durch $\xi$ ersetzt wird.

Die Bedingung für die erste möglichst vollständige Verdunkelung des Gesichtsfeldes wird also wie in (III) gegeben sein durch

(IIIa) $$\alpha\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn wieder $\nu_0$ die dem ersten Minimum entsprechende Anzahl von Verdunkelungen pro Sekunde bedeutet und $x = 2l$ gesetzt wird, so erhält man

$$4\nu_0 l\left(\frac{\omega - N\frac{\partial\omega}{\partial N}}{\omega^2}\right) = 1$$

oder

(IV) $$\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{N}{\omega}\right) = \frac{1}{4\nu_0 l}.$$

Nicht wesentlich verschieden davon ist die Relation

$$4\nu_0 l = \frac{\partial}{\partial N}(N\omega).$$

$$U = \frac{\partial}{\partial N}(N\omega)$$

ist die von Lord Rayleigh als Gruppengeschwindigkeit bezeichnete Größe, welche durch die Beobachtung von $\nu_0$

bestimmt wird. Ist die Dispersion des Mediums bekannt, so kann hiernach $\omega$ berechnet werden.

§ 5. Im vorstehenden ist gezeigt, daß neben der ursprünglichen Welle mit der Schwingungszahl $N$ neue mit den Schwingungszahlen $N + \nu$ und $N - \nu$ auftreten. Es bedeutet das, daß bei der Beleuchtung durch den rotierenden Schirm eine Erscheinung auftritt, wie sie nach dem *Dopplerschen Prinzip* bei der Reflexion an einen oszillierenden Spiegel zu erwarten ist.

Würde mit monochromatischem Licht beleuchtet und das Licht nach Durchgang durch den ersten Schirm spektral zerlegt, so würde man drei äquidistante Linien erhalten. Die Intensität der mittleren wäre viermal so groß als die der beiden äußeren. Vielleicht steht das häufig beobachtete Vorkommen von *Triplets*[1]) hiermit im Zusammenhang.

Wenn das Licht nicht streng monochromatisch ist, so würde man eine *Verbreiterung* der entsprechenden Spektrallinie beobachten können. Wenn die Verdunkelung nicht stetig, wie hier vorausgesetzt wurde, sondern sprungweise durch ein Zahnrad erfolgt, so würden außer den erwähnten noch Wellen mit anderen von $N$ weiter entfernten Schwingungszahlen entstehen. Die Intensität, die diesen entspricht, nimmt aber rasch ab, so daß auch dann die Erscheinung nicht wesentlich geändert würde.

Indes scheint es mit mechanischen Mitteln nicht erreichbar, die Zahl der Unterbrechungen so weit zu steigern, um eine merkbare Verbreiterung zu erhalten.

Günstiger liegen die Verhältnisse bei *akustischen Beobachtungen*, für welche sich dieselben Folgerungen ergeben.

Es ist in der Tat *wiederholt* beobachtet worden, daß ein einfacher Ton beim Durchgang durch eine rotierende durchlochte Scheibe in einen *Dreiklang* aufgelöst wird.[2]) Es würde ferner die der Rechnung zugrunde gelegte Modifikation des Fizeauschen Versuches die Möglichkeit bieten, die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles* zu bestimmen.

---

1) Vgl. H. Kayser im Handbuch der Physik. Herausgegeben von A. Winkelmann, 2. Aufl. Bd. VI. p. 717. 1906.

2) Vgl. J. Stefan, Ber. d. Wiener Akad. II. 54. p. 598. 1866.

§ 6. Zum Schlusse möchte ich darauf hinweisen, daß mit Hilfe des Fizeauschen Versuches *die Messung der Zeit* auf die der Länge zurückgeführt werden kann.

Wird nämlich dieser Versuch im Vakuum ausgeführt und der Umlauf des Zahnrades auf das erste Minimum eingestellt, so beschreibt dieses Rad direkt eine *Uhrenbewegung*. Die Anzahl der Zähne, welche von einem als Nullpunkt der Zeitmessung gewählten Augenblick an durch eine bestimmte Stelle hindurchgehen, würde unmittelbar die *Maßzahl der Zeit* angeben.

Zur *Reproduzierbarkeit* dieser *physikalischen Zeitmaße* wäre bloß erforderlich, daß eine *Längenmessung* — die von $l$ — möglich sei und daß *Helligkeitsgrade* unterschieden, bez. daß solche als unverändert beurteilt werden können.

Statt des Vakuums könnte auch ein anderes Medium als *Normalmedium* benützt werden, wenn dasselbe und die Farbe des Lichtes eindeutig bestimmbar sind. Dies vorausgesetzt ist dann nach Michelson auch eine reproduzierbare Längeneinheit festgelegt.

Würzburg, Phys. Institut.

(Eingegangen 2. August 1907.)

## 3. *Die Entzündungstemperaturen von Gasgemischen;* *von K. George Falk.*

### Einleitung.

Zu wiederholten Malen ist die Bestimmung der Entzündungstemperatur des Knallgases zum Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen gemacht worden.[1]) Im allgemeinen wurden zwei verschiedene Methoden befolgt. Das Gas wurde entweder in eine Kugel eingeschmolzen und dann einem Bade von bekannter Temperatur ausgesetzt, oder es wurde durch eine Röhre geleitet, welche von außen bis zu einer bestimmten Temperatur erhitzt wurde. Auf Grund der ersten Methode fand V. Meyer, zuerst im Verein mit Krause und später im Verein mit Askenasy, daß die Entzündungstemperatur (absolute) des reinen Knallgases zwischen 791 und 879° (oder 518 bis 606° C.) liege; Emich dagegen erreichte ein ziemlich konstantes Resultat von 862° (oder 589° C.). Für Gemische, die einen Überschuß von Sauerstoff bis zu 80,4 Proz. enthielten, fand Emich 844—881° (oder 571—608° C.), und bei einem Überschuß von Sauerstoff bis zu 67,7 Proz. 848—880° (oder 575—607° C.). Eine Anzahl Werte, die nach der zweiten Methode für das Gemisch $2H_2 + O_2$ gefunden wurden, sind die folgenden:

| | |
|---|---|
| Mallard u. Le Chatelier . . . | 823° (oder 550° C.) |
| Bodenstein . . . . . | 926—983° (oder 653—710° C.) |
| Mitscherlich . . . . . | 947° (oder 674° C.) |
| V. Meyer u. Freyer . . . . | ca. 973° (oder 700° C.) |
| Gautier u. Helier . . . . . | 1113° (oder 840° C.) |
| Helier . . . . . | 1118° (oder 845° C.). |

1) F. E. Mallard u. H. Le Chatelier, Compt. rend. **91.** p. 825; Bull. soc. chim. **39.** p. 2; H. Helier, Ann. de chim. et phys. (7) **10.** p. 521; A. Gautier u. H. Helier, Compt. rend. **122.** p. 566; V. Meyer u. A. Krause, Ann. **264.** p. 85; V. Meyer u. P. Askenasy, ibid. **269.** p. 49; V. Meyer u. F. Freyer, Ber. **25.** p. 622; V. Meyer u. W. Raum, ibid. **28.** p. 2804; A. Mitscherlich, ibid. **26.** p. 168; M. Bodenstein, Zeitschr. f. physik. Chem. **29.** p. 665; F. Emich, Monatsh. **21.** p. 1061; und andere mehr.

Obgleich eine beträchtliche Anzahl Untersuchungen über die Bestimmung der Entzündungstemperaturen von Gemischen aus Wasserstoff und Sauerstoff angestellt worden sind, so hat man sich bisher verhältnismäßig wenig mit Gemischen aus anderen Gasen beschäftigt. V. Meyer und Krause ermittelten, daß die Entzündungstemperatur des Gemisches $2\,CO + O_2$ zwischen 791 und 879° (absolut) liegt. Mallard und Le Chatelier fanden etwa 923° für ein Gemisch, das aus 70 Proz. Kohlenoxyd und 30 Proz. Sauerstoff bestand. Auch konstatierten sie, daß eine Verdünnung dieses Gemisches, sowohl als auch des Knallgasgemisches, mit einem der aktiven Gemengteile oder mit einem indifferenten Gase, die Entzündungstemperatur nur unbedeutend modifizierte.

Die nach diesen beiden Methoden erhaltenen Resultate variieren beträchtlich infolge des ungenauen Verfahrens bei der Erhitzung des Gases, infolge der katalytischen Wirkung der Gefäßwände, und infolge der Möglichkeit der ruhigen Vereinigung der Gase vor der Entzündung.

Prof. W. Nernst setzt die Entzündungstemperatur eines Gasgemisches gleich der Temperatur, bei welcher das längere Zeit sich selbst überlassene Gasgemisch sich von selbst entzündet (die katalytische Wirkung der Gefäßwände ist dabei eliminiert). Um nun den Einwänden gegen die bisher verwandten Methoden zu begegnen, schlug Nernst vor, die zur Entzündung des Gases benötigte Hitze durch die adiabatische Komprimierung des Gases selbst zu erzeugen. Der erste Teil dieser Untersuchung (Tabb. 1—8) wurde im Physikalisch-Chemischen Institut zu Berlin ausgeführt, der übrige Teil an der Columbia-Universität zu New York.

### Beschreibung der Apparate und der Versuchsanordnung.

Vier Apparate, die im allgemeinen nach demselben Prinzip, aber von verschiedener Größe konstruiert waren, wurden zu diesen Experimenten benutzt. Apparat III erscheint in der nachstehenden Fig. 1 und bedarf keiner weiteren Erklärung. Das Gas war in dem Zylinder eingeschlossen und wurde durch ein auf den Kolben herabfallendes Gewicht adiabatisch komprimiert. Die Dimensionen waren die folgenden:

| | Apparat | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | |
| Innere Länge des Zylinders . . | 20,82 | 23,06 | 25,460 | 24,142 | cm |
| Lichte Weite des Zylinders und Durchmesser des Kolbens . . . | 2,50 | 4,40 | 2,580 | 5,078 | „ |
| Wandstärke des oberen Teiles des Zylinders . . . . . | 0,51 | 0,73 | 1,325 | 1,278 | „ |
| Wandstärke des unteren Teiles des Zylinders . . . . . | 0,51 | 0,73 | 2,823 | 3,276 | „ |
| Entfernung vom unteren inneren Rande des Einlaßrohres zum Boden des Zylinders . . . . . | 14,22 | 18,67 | 19,500 | 18,640 | „ |
| Stärke des Zylinderbodens . . . | 1,22 | 1,02 | 3,513 | 5,163 | „ |
| Totallänge des Kolbens . . . . | 26,04 | 26,25 | 37,688 | 36,405 | „ |
| Das in jedem Experiment benutzte Gasvolumen, unter atmosphärischem Druck . . . . . | 69,8 | 283,9 | 101,7 | 377,5 | ccm |
| Größe des benutzten Gewichtes . | 25 | 38 | 22,7 | 31,8 | kg |

Um die Dichtigkeit des Apparates zu sichern, war der Kolben mit zwei Dichtungsnuten versehen, die Hanf- oder Lederringe enthielten. Lanolin wurde als Schmiermittel benutzt. Der Ring *A* (aus Messing in Apparat I und II, aus Asbestpappe mit Stellschraube in Apparat III und IV) war so an der Kolbenstange angebracht, daß er sich nur schwer auf- und abschieben ließ. Derselbe diente dazu, den niedrigsten Stand anzugeben, der bei jedem einzelnen Experiment erreicht wurde, indem er durch die Abwärtsbewegung des Kolbens in die Höhe geschoben wurde und dann beim Kolbenaufhub in derselben Höhe verblieb.

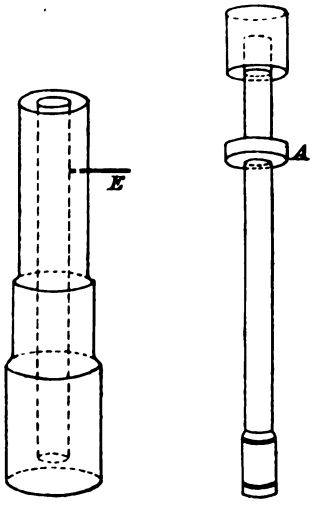


Fig. 1.

Der zur Verwendung kommende Wasserstoff und Sauerstoff wurde entweder auf elektrolytischem Wege aus Ätznatron dargestellt oder Bomben entnommen; das Kohlenoxyd wurde

wurde durch das Eintropfen von Ameisensäure in konzentrierte Schwefelsäure gewonnen. Wenn Stickstoff zur Verwendung kam, wurden die Gemische mit Luft an Stelle des Sauerstoffs hergestellt. Bei den in den Tabb. 1—8 angeführten Versuchen wurden die Gase erst kurz vor Eintritt in den Zylinder gemischt, bei den späteren wurden die Mischungen in einem mit einer Skala versehenen Glasgasometer vorgenommen. Die Gase waren jedesmal mit Wasserdampf bei der Temperatur des Arbeitsraumes gesättigt, um vergleichbare Bedingungen zu schaffen.

Die Versuchsanordnung war wie folgt:

Die Einführung des Gemisches in den Zylinder wurde vermittelst eines dünnen Gummischlauches bewerkstelligt, welcher durch das Einlaßrohr *E* hindurchführte und bis auf den Boden des Zylinders herabreichte. Der Kolben war so eingestellt, das die untere Fläche desselben sich gerade über der Öffnung des Einlaßrohres befand. Die verdrängte Luft entwich durch das Einlaßrohr an der Außenwandung des Gummischlauches hin. Sowie ein genügendes Volumen des Gemisches eingeführt worden war, um eine vollständige Verdrängung der Luft zu gewährleisten, wurde der Gummischlauch rasch zurückgezogen, und der Kolben über die Öffnung des Einlaßrohres hinweg herabgedrückt. Dann wurde die Entfernung des Kolbenendes vom Boden des Zylinders gemessen und daraus das Anfangsvolumen des Gemisches berechnet. Das Gewicht wurde hierauf auf den Kolben fallen gelassen, wobei die durch die Komprimierung entwickelte Wärme das Gemisch entzündete und die Abwärtsbewegung des Kolbens (durch die Gewalt der Explosion) inhibierte. Der Stand des verschiebbaren Ringes ergab die Endstellung des Kolbens (im Augenblick der Entzündung) und daraus das Endvolumen. Die Anfangstemperatur des Gemisches wurde der Zimmertemperatur gleichgerechnet. Der Anfangsdruck war jedesmal größer als eine Atmosphäre und wurde berechnet durch Division der Entfernung des unteren Randes des Einlaßrohres vom Boden des Zylinders durch $h_1$ der Anfangshöhe des eingeschlossenen Gemisches.

Die in den Tabb. 1 – 8 angegebenen Entfernungen wurden mit einem Stahlstab gemessen, dessen Vernier Ablesungen bis zu einem Zehntel Millimeter gestattete, bei den übrigen Ex-

perimenten wurde ein Stahlstab mit einem Vernier verwandt, der Ablesungen bis zu 0,01 mm ermöglichte. Eine solche Genauigkeit der Ablesungen ist vielleicht bei diesem Verfahren kaum von nöten, trotzdem schien es angezeigt, die eigentlichen experimentellen Messungen so genau wie möglich zu machen.

### Berechnung der Resultate.

Die in den Berechnungen benutzten Formeln sind:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{k-1} \quad \text{und} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{k},$$

bei denen

$T_1$ die Anfangstemperatur (absolute) des Gemisches darstellt.

$T_2$ die Entzündungstemperatur (absolute).

$h_1$ die Höhe des Anfangsvolumens des Gemisches in Zentimetern (Höhen können anstatt der Volumina verwandt werden, da der Durchmesser konstant ist).

$h_2$ die Endhöhe des Gemisches (bei der Entzündungstemperatur) in Zentimetern.

$p_1$ der Anfangsdruck des Gases in Atmosphären.

$p_2$ der Druck des Gases in Atmosphären bei der Entzündungstemperatur.

$l$ die Entfernung in Zentimetern, durch die das Gewicht herabfiel (nur bei Apparat I für das Gemisch $2H_2 + O_2$ verwendet, Tab. 2).

$k$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen der Gase bei konstantem Druck und konstantem Volumen. Bei den zur Verwendung kommenden Gasen ($H_2$, $O_2$, CO, $N_2$) ist $k = 1{,}4$ angenommen.[1]) Da diese Gase diatomisch sind, so hat $k$ bei allen den gleichen Wert. Hierbei kommt die Möglichkeit eines kleinen Fehlers in Frage. Die Gase sind mit Wasserdampf bei gewöhnlicher Temperatur gesättigt und werden dann adiabatisch komprimiert. Die Temperatursteigerung, die auf diese Weise herbeigeführt wird, ist dieselbe bei den diatomischen Gasen; da aber Wasserdampf triatomisch ist, so wird er nicht bis zu derselben Temperatur erhitzt und setzt folglich die Temperatur des Gemisches herunter. Da die Gase bei ge-

1) Die bei diesem Verfahren mögliche Fehlerquelle wird später besprochen.

wöhnlicher Temperatur (17—23° C.) gesättigt wurden, ist die Quantität des vorhandenen Wasserdampfes genau bestimmbar und gestattet die nötige Korrektur. Da $k = 1{,}29$ für Wasserdampf, kann die Zunahme in der Temperatur des Wasserdampfes als auch der anderen vorhandenen Gase berechnet werden, und da die spezifischen Wärmen derselben bekannt sind, so kann vermittelst der Mischungsmethode die Temperatur des Gemisches am Entzündungspunkt bestimmt werden. Diese Entzündungstemperatur ist niedriger als die unter der Annahme berechnete, daß der Wasserdampf keinen Einfluß auf die Erhitzung ausübt, aber der Unterschied ist gering. Die Korrektur zeigt sich, im einzelnen auf einen bestimmten Fall angewendet, wie folgt. Bei einer Anfangstemperatur von 293° (20° C.) sind die Temperaturen, die durch dieselbe Kompression in einem diatomischen ($k = 1{,}4$) und in einem triatomischen ($k = 1{,}29$) Gase hervorgerufen wurden:

| $k = 1{,}4$ | $k = 1{,}29$ |
|---|---|
| 736° | 571° |
| 842 | 680 |
| 931 | 678 |
| 1009 | 718 |

Für das Gemisch $4H_2 + O_2$, Tab. 1, war das Mittel der berechneten Entzündungstemperaturen 874°, wenn von der Korrektur für Wasserdampf abgesehen wurde. Der Punkt, bis zu welchem die Temperatur des Wasserdampfes unter denselben Druckverhältnissen zunimmt, ist 647°. 1 ccm des Gemisches enthält 0,072 mg $H_2$, 0,286 mg $O_2$ und 0,0173 mg $H_2O$. Die spezifische Wärme in Tausendsteln von Kalorien ist bei einem konstanten Volumen von Wasserstoff bei 874° gleich 2,75, von Sauerstoff bei 874° gleich 0,17 und von Wasserdampf bei 647° gleich 0,38.[1])

Nach der Mischungsmethode ist die korrigierte Entzündungstemperatur des Gemisches $4H_2 + O_2$:

$$\frac{0{,}0173 \times 0{,}38 \times 647 + 0{,}072 \times 2{,}75 \times 874 + 0{,}286 \times 0{,}17 \times 874}{0{,}0173 \times 0{,}38 + 0{,}072 \times 2{,}75 + 0{,}286 \times 0{,}17} = 868°.$$

Das Verfahren ist genau dasselbe bei den anderen Gemischen, aber nur die korrigierten endgültigen Durchschnittsresultate

1) F. E. Mallard u. H. Le Chatelier, Compt. rend. **96**. p. 1358.

werden angegeben werden. Die Korrekturen sind klein und in allen Fällen von derselben Größenordnung.

**Experimentelle Ergebnisse.**

Die vollständigen Resultate werden, nach Erörterung der möglichen Fehlerquellen, in Gruppen eingereiht und besprochen werden. Die korrigierten Werte von $T_2$ beziehen sich auf die eben erklärte auf Wasserdampf zurückzuführende Korrektur.[1])

Tabelle 1.

$4H_2 + O_2$. Apparat I.

| $h_1$ (cm) | $h_2$ (cm) | $p_1$ (Atm.) | $p_2$ (Atm.) | $T_1$ (abs.) | $T_2$ (abs.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 10,78 | 0,66 | 1,32 | 65,9 | 293 | 896 |
| 10,48 | 0,70 | 1,36 | 60,0 | 291 | 859 |
| 8,78 | 0,52 | 1,62 | 84,7 | 293 | 908 |
| 8,60 | 0,64 | 1,65 | 62,8 | 294 | 831 |
| | | | | Mittelwert | 874 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 868° |

Tabelle 2.

$2H_2 + O_2$. Apparat I.

| $h_1$ | $h_2$ | $l$ (cm) | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8,86 | 0,74 | 48,1 | 1,61 | 51,9 | 292 | 788 |
| 8.55 | 0,59 | — | 1,66 | 70,2 | 293 | 854 |
| 8,51 | 0,59 | 63,2 | 1,67 | 70,1 | 293 | 852 |
| 8,17 | 0,62 | 63,2 | 1,74 | 64,3 | 293 | 822 |
| 8,05 | 0,59 | — | 1,77 | 68,6 | 293 | 833 |
| 7,74 | 0,57 | 67,2 | 1,84 | 70,8 | 290 | 823 |
| 7,60 | 0,59 | 52,7 | 1,87 | 68,6 | 292 | 809 |
| 7,24 | 0,63 | 63,2 | 1,96 | 59,9 | 293 | 778 |
| 7,12 | 0,58 | — | 2,00 | 66,8 | 293 | 799 |
| 6,88 | 0,54 | 67,8 | 2,07 | 72,9 | 293 | 811 |
| 6,57 | 0,56 | 86,0 | 2,16 | 68,0 | 293 | 785 |
| 6,53 | 0,46 | 67,8 | 2,18 | 89,3 | 292 | 844 |
| 6,30 | 0,55 | 74,7 | 2,26 | 68,5 | 290 | 769 |
| 6,16 | 0,56 | 52,7 | 2,31 | 66,3 | 295 | 770 |
| 5,91 | 0,44 | 63,2 | 2,38 | 91,7 | 293 | 828 |
| 4,78 | 0,38 | 63,2 | 2,98 | 103,0 | 293 | 807 |
| | | | | | Mittelwert | 811 |
| | | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 806° |

1) Die abkühlende Einwirkung des Wasserdampfes auf die Gase geht fortwährend von Beginn der Kompression an vor sich, aber das Endresultat ist wesentlich dasselbe, wenn, wie bei den angeführten Berechnungen, angenommen wird, daß die Totalwirkung erst bei dem Endvolumen erfolgt.

## Tabelle 3.

$H_2 + O_2$. Apparat I.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10,47 | 0,86 | 1,36 | 44,9 | 290 | 788 |
| 9,98 | 0,79 | 1,43 | 49,6 | 290 | 800 |
| 6,54 | 0,61 | 2,18 | 60,2 | 290 | 749 |
| 6,29 | 0,49 | 2,26 | 80,6 | 290 | 805 |
| | | | | Mittelwert | 786 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 781° |

## Tabelle 4.

$4H_2 + O_2$. Apparat II.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,91 | 0,97 | 1,25 | 57,4 | 293 | 874 |
| 14,82 | 1,00 | 1,26 | 54,9 | 297 | 873 |
| 14,81 | 0,96 | 1,26 | 58,2 | 294 | 878 |
| 13,45 | 0,80 | 1,39 | 72,2 | 296 | 915 |
| 12,58 | 0,75 | 1,48 | 76,8 | 296 | 913 |
| 10,71 | 0,66 | 1,74 | 86,2 | 296 | 902 |
| | | | | Mittelwert | 893 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 887° |

## Tabelle 5.

$2H_2 + O_2$. Apparat II.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 15,07 | 1,24 | 1,24 | 40,9 | 293 | 796 |
| 15,06 | 1,17 | 1,24 | 44,3 | 292 | 811 |
| 15,04 | 1,06 | 1,24 | 50,9 | 293 | 847 |
| 15,03 | 1,08 | 1,24 | 49,6 | 293 | 840 |
| 14,71 | 1,16 | 1,27 | 44,5 | 293 | 809 |
| 14,67 | 1,11 | 1,27 | 47,2 | 293 | 823 |
| 14,22 | 1,02 | 1,31 | 52,5 | 293 | 841 |
| 13,83 | 1,10 | 1,35 | 46,7 | 293 | 807 |
| 13,74 | 1,06 | 1,36 | 49,1 | 293 | 817 |
| 12,65 | 1,01 | 1,47 | 50,8 | 293 | 805 |
| 12,30 | 0,91 | 1,51 | 58,1 | 291 | 825 |
| 12,18 | 0,92 | 1,53 | 57,0 | 293 | 823 |
| 11,57 | 0,89 | 1,61 | 58,5 | 291 | 812 |
| 9,31 | 0,70 | 2,01 | 75,1 | 292 | 822 |
| | | | | Mittelwert | 819 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 814° |

Tabelle 6.

$H_2 + O_2$. Apparat II.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,98 | 1,24 | 1,25 | 40,8 | 295 | 799 |
| 14,95 | 1,28 | 1,25 | 39,0 | 296 | 791 |
| 14,88 | 1,24 | 1,30 | 40,1 | 296 | 789 |
| 13,91 | 1,17 | 1,34 | 43,0 | 296 | 797 |
| 13,66 | 1,21 | 1,37 | 40,7 | 298 | 786 |
| 13,41 | 0,12 | 1,39 | 45,0 | 296 | 799 |
| 11,95 | 0,97 | 1,56 | 52,6 | 296 | 808 |
| | | | | Mittelwert | 796 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 791° |

Tabelle 7.

$H_2 + 2O_2$. Apparat II.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,32 | 1,16 | 1,30 | 44,0 | 296 | 809 |
| 14,16 | 1,15 | 1,32 | 44,3 | 299 | 816 |
| 13,84 | 1,19 | 1,35 | 41,9 | 299 | 798 |
| 13,17 | 1,06 | 1,42 | 48,3 | 294 | 806 |
| 13,09 | 1,05 | 1,42 | 48,8 | 296 | 812 |
| 12,69 | 1,05 | 1,47 | 48,2 | 296 | 802 |
| 12,11 | 1,00 | 1,54 | 50,6 | 296 | 803 |
| 11,81 | 0,93 | 1,58 | 55,2 | 296 | 818 |
| | | | | Mittelwert | 808 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 803° |

Tabelle 8.

$H_2 + 4O_2$. Apparat II.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 15,05 | 1,09 | 1,24 | 49,0 | 296 | 846 |
| 13,83 | 1,00 | 1,35 | 53,4 | 296 | 848 |
| 13,63 | 0,98 | 1,37 | 54,6 | 296 | 848 |
| 12,79 | 0,93 | 1,46 | 57,3 | 296 | 845 |
| 12,43 | 0,87 | 1,50 | 60,8 | 296 | 858 |
| | | | | Mittelwert | 849 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 844° |

Tabelle 9.

$2H_2 + O_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,78 | 1,076 | 1,32 | 51,7 | 290 | 827 |
| 13,48 | 1,004 | 1,45 | 55,0 | 291 | 822 |
| 13,31 | 0,994 | 1,47 | 55,6 | 290 | 819 |
| 13,29 | 0,979 | 1,47 | 56,6 | 291 | 826 |
| | | | | Mittelwert | 823 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 818° |

## Tabelle 10.

$H_2 + O_2$. Apparat IV.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,50 | 1,185 | 1,29 | 43,0 | 291 | 798 |

$T_2$ (korrigiert) = 788°

## Tabelle 11.

$4H_2 + O_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,12 | 0,852 | 1,38 | 70,4 | 293 | 901 |
| 13,92 | 0,906 | 1,40 | 64,2 | 294 | 877 |
| 13,75 | 0,908 | 1,42 | 64,2 | 294 | 874 |
| | | | | Mittelwert | 884 |

$T_2$ (korrigiert) = 878°

## Tabelle 12.

$6CO + O_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,88 | 0,669 | 1,31 | 100,8 | 289 | 1000 |
| 14,48 | 0,651 | 1,35 | 103,8 | 291 | 1006 |
| 14,31 | 0,669 | 1,36 | 99,1 | 291 | 991 |
| 13,86 | 0,575 | 1,41 | 121,4 | 290 | 1036 |
| 13,33 | 0,537 | 1,46 | 103,1 | 290 | 979 |
| | | | | Mittelwert | 1002 |

$T_2$ (korrigiert) = 994°

## Tabelle 13.

$4CO + O_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 15,70 | 0,900 | 1,24 | 67,9 | 290 | 910 |
| 14,86 | 0,833 | 1,31 | 74,0 | 289 | 915 |
| 14,83 | 0,837 | 1,31 | 73,3 | 290 | 916 |
| 14,09 | 0,869 | 1,38 | 68,1 | 292 | 890 |
| 12,73 | 0,740 | 1,52 | 81,6 | 289 | 902 |
| | | | | Mittelwert | 907 |

$T_2$ (korrigiert) = 901°

Tabelle 14.

$2CO + O_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 15,18 | 0,975 | 1,29 | 59,9 | 290 | 869 |
| 14,71 | 0,891 | 1,33 | 67,4 | 292 | 896 |
| 14,63 | 0,960 | 1,33 | 60,3 | 290 | 862 |
| 14,40 | 0,878 | 1,36 | 68,3 | 290 | 888 |
| 13,99 | 0,908 | 1,39 | 67,0 | 291 | 869 |
| 13,80 | 0,851 | 1,41 | 69,8 | 293 | 893 |
| 13,55 | 0,807 | 1,44 | 74,7 | 292 | 903 |
| 13,47 | 0,887 | 1,45 | 65,4 | 292 | 867 |
| 12,37 | 0,785 | 1,58 | 75,0 | 291 | 877 |
| | | | | Mittelwert | 880 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 874° |

Tabelle 15.

$CO + O_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 15,89 | 0,860 | 1,27 | 72,1 | 288 | 918 |
| 15,35 | 0,938 | 1,27 | 63,6 | 292 | 898 |
| 14,68 | 0,857 | 1,33 | 71,0 | 289 | 901 |
| 14,49 | 0,861 | 1,35 | 70,3 | 290 | 897 |
| 13,87 | 0,825 | 1,41 | 73,3 | 290 | 897 |
| 13,85 | 0,782 | 1,41 | 78,8 | 290 | 916 |
| | | | | Mittelwert | 903 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 897° |

Tabelle 16.

$CO + O_2$. Apparat IV.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,88 | 0,811 | 1,25 | 73,4 | 289 | 925 |
| 14,25 | 0,827 | 1,31 | 70,5 | 292 | 912 |
| | | | | Mittelwert | 918 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 912° |

Tabelle 17.

$H_2 + O_2 + N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 13,90 | 1,083 | 1,40 | 50,0 | 294 | 816 |
| 13,89 | 1,046 | 1,40 | 52,5 | 293 | 824 |
| 13,78 | 1,041 | 1,42 | 52,6 | 294 | 826 |
| 13,64 | 1,003 | 1,43 | 55,2 | 293 | 832 |
| | | | | Mittelwert | 825 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 820° |

## Tabelle 18.

$H_2 + O_2 + 2N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,60 | 0,982 | 1,34 | 58,5 | 292 | 860 |
| 14,16 | 0,913 | 1,38 | 63,9 | 293 | 877 |
| 14,14 | 1,007 | 1,38 | 55,7 | 294 | 846 |
| 13,80 | 0,971 | 1,41 | 58,1 | 293 | 847 |
| 13,75 | 0,962 | 1,42 | 58,7 | 293 | 849 |
| | | | | Mittelwert | 856 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 851° |

## Tabelle 19.

$H_2 + O_2 + 4N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,18 | 0,863 | 1,38 | 69,2 | 294 | 901 |
| 14,15 | 0,808 | 1,38 | 75,8 | 294 | 924 |
| 13,92 | 0,802 | 1,40 | 76,1 | 294 | 921 |
| 13,85 | 0,786 | 1,41 | 78,2 | 294 | 926 |
| 13,67 | 0,815 | 1,43 | 73,9 | 294 | 908 |
| | | | | Mittelwert | 916 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 910° |

## Tabelle 20.

$2H_2 + O_2 + N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,65 | 1,061 | 1,33 | 52,5 | 294 | 840 |
| 14,22 | 1,035 | 1,37 | 53,7 | 294 | 839 |
| 14,00 | 0,957 | 1,39 | 59,6 | 294 | 860 |
| 13,84 | 0,895 | 1,41 | 65,2 | 292 | 873 |
| 13,58 | 0,953 | 1,44 | 59,2 | 294 | 849 |
| | | | | Mittelwert | 852 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 846° |

## Tabelle 21.

$2H_2 + O_2 + 4N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,27 | 0,797 | 1,37 | 77,5 | 294 | 930 |
| 14,16 | 0,829 | 1,38 | 73,2 | 294 | 915 |
| 14,10 | 0,813 | 1,38 | 75,1 | 294 | 921 |
| 13,95 | 0,793 | 1,40 | 77,4 | 294 | 926 |
| 13,90 | 0,736 | 1,44 | 87,8 | 294 | 952 |
| | | | | Mittelwert | 929 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 922° |

## Tabelle 22.

$H_2 + 2O_2 + N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,10 | 1,009 | 1,38 | 55,5 | 294 | 844 |
| 14,08 | 0,974 | 1,38 | 58,8 | 294 | 856 |
| 14,06 | 1,051 | 1,39 | 52,4 | 294 | 830 |
| 14,04 | 1,025 | 1,39 | 54,8 | 294 | 838 |
| | | | | Mittelwert | 842 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 887° |

## Tabelle 23.

$H_2 + 2O_2 + 4N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,26 | 0,833 | 1,37 | 72,9 | 292 | 918 |
| 14,18 | 0,849 | 1,38 | 70,8 | 294 | 904 |
| 13,90 | 0,753 | 1,40 | 83,1 | 294 | 944 |
| 13,85 | 0,824 | 1,41 | 73,2 | 293 | 909 |
| 13,20 | 0,784 | 1,48 | 84,4 | 293 | 931 |
| | | | | Mittelwert | 920 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 914° |

## Tabelle 24.

$2CO + O_2 + N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,03 | 0,806 | 1,39 | 75,9 | 293 | 919 |
| 13,90 | 0,819 | 1,40 | 73,9 | 293 | 910 |
| 13,78 | 0,786 | 1,42 | 78,0 | 293 | 921 |
| 13,28 | 0,719 | 1,47 | 87,1 | 293 | 941 |
| | | | | Mittelwert | 923 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 917° |

## Tabelle 25.

$2CO + O_2 + 2N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,05 | 0,708 | 1,39 | 91,0 | 293 | 968 |
| 13,72 | 0,691 | 1,42 | 93,3 | 293 | 968 |
| 13,22 | 0,712 | 1,48 | 88,1 | 293 | 943 |
| 12,95 | 0,631 | 1,51 | 103,4 | 293 | 981 |
| | | | | Mittelwert | 965 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 958° |

## Tabelle 26.

$CO + O_2 + N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,12 | 0,691 | 1,38 | 94,3 | 293 | 980 |
| 13,96 | 0,689 | 1,40 | 94,3 | 293 | 976 |
| 13,63 | 0,621 | 1,43 | 108,0 | 293 | 1008 |
| 13,37 | 0,656 | 1,46 | 99,3 | 293 | 979 |
| | | | | Mittelwert | 986 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 979° |

## Tabelle 27.

$CO + O_2 + 2N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,96 | 0,544 | 1,30 | 134,9 | 293 | 1103 |
| 14,38 | 0,496 | 1,36 | 151,2 | 291 | 1119 |
| 13,98 | 0,581 | 1,39 | 119,8 | 292 | 1042 |
| 12,48 | 0,441 | 1,56 | 168,4 | 292 | 1112 |
| | | | | Mittelwert | 1094 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 1085° |

## Tabelle 28.

$4CO + O_2 + N$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,53 | 0,773 | 1,34 | 81,6 | 292 | 944 |
| 13,96 | 0,771 | 1,40 | 80,6 | 292 | 930 |
| 13,94 | 0,789 | 1,40 | 78,0 | 292 | 921 |
| 13,34 | 0,735 | 1,46 | 84,6 | 292 | 931 |
| | | | | Mittelwert | 932 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 925° |

## Tabelle 29.

$4CO + O_2 + 2N_2$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 15,22 | 0,819 | 1,28 | 76,6 | 292 | 940 |
| 14,58 | 0,787 | 1,34 | 79,6 | 292 | 939 |
| 13,90 | 0,733 | 1,40 | 86,1 | 292 | 947 |
| 13,63 | 0,692 | 1,43 | 92,8 | 292 | 962 |
| | | | | Mittelwert | 947 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 940° |

## Tabelle 30.

$H_2 + O_2 + CO$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,30 | 1,081 | 1,36 | 50,7 | 294 | 826 |
| 14,13 | 1,075 | 1,38 | 50,8 | 294 | 824 |
| 14,02 | 1,104 | 1,39 | 48,8 | 294 | 813 |
| 13,98 | 1,093 | 1,39 | 49,5 | 294 | 815 |
| 13,76 | 1,075 | 1,42 | 50,3 | 294 | 815 |
| 13,74 | 1,101 | 1,42 | 48,6 | 294 | 807 |
| | | | | Mittelwert | 817 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 812° |

## Tabelle 31.

$H_2 + O_2 + 2CO$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,19 | 0,974 | 1,37 | 58,5 | 294 | 858 |
| 14,16 | 1,019 | 1,38 | 54,8 | 294 | 842 |
| 14,08 | 0,965 | 1,39 | 58,9 | 294 | 858 |
| 13,94 | 0,923 | 1,40 | 62,6 | 294 | 871 |
| 13,63 | 0,955 | 1,43 | 59,1 | 294 | 851 |
| | | | | Mittelwert | 856 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 851° |

## Tabelle 32.

$H_2 + O_2 + 4CO$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,24 | 0,891 | 1,37 | 66,3 | 294 | 891 |
| 13,93 | 0,831 | 1,40 | 72,5 | 294 | 908 |
| 13,90 | 0,822 | 1,40 | 73,5 | 294 | 911 |
| 13,84 | 0,815 | 1,41 | 74,3 | 294 | 913 |
| 13,78 | 0,852 | 1,42 | 69,7 | 294 | 895 |
| | | | | Mittelwert | 904 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 898° |

## Tabelle 33.

$2H_2 + O_2 + 2CO$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,63 | 0,888 | 1,33 | 67,9 | 294 | 904 |
| 14,18 | 0,921 | 1,38 | 63,2 | 293 | 875 |
| 13,91 | 0,862 | 1,40 | 68,8 | 293 | 891 |
| 13,86 | 0,901 | 1,41 | 64,6 | 293 | 874 |
| 13,54 | 0,893 | 1,44 | 64,8 | 294 | 872 |
| | | | | Mittelwert | 883 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 877° |

## Tabelle 34.

$2H_2 + O_2 + 4CO$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,19 | 0,749 | 1,37 | 84,5 | 294 | 954 |
| 14,09 | 0,756 | 1,38 | 83,1 | 293 | 944 |
| 13,78 | 0,771 | 1,42 | 80,1 | 294 | 932 |
| 13,76 | 0,716 | 1,42 | 88,8 | 294 | 959 |
| 13,66 | 0,750 | 1,48 | 83,0 | 293 | 936 |
| | | | | Mittelwert | 945 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 938° |

## Tabelle 35.

$H_2 + 2O_2 + 2CO$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,02 | 0,942 | 1,39 | 61,0 | 293 | 868 |
| 13,98 | 0,857 | 1,39 | 69,6 | 293 | 895 |
| 13,87 | 0,947 | 1,41 | 60,2 | 293 | 857 |
| 13,86 | 0,919 | 1,41 | 62,8 | 293 | 867 |
| 13,85 | 0,855 | 1,41 | 69,5 | 293 | 893 |
| | | | | Mittelwert | 875 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 869° |

## Tabelle 36.

$H_2 + 2O_2 + 4CO$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,42 | 0,845 | 1,35 | 71,8 | 292 | 908 |
| 13,98 | 0,895 | 1,39 | 65,4 | 292 | 877 |
| 13,91 | 0,844 | 1,40 | 70,9 | 292 | 896 |
| | | | | Mittelwert | 894 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 888° |

## Tabelle 37.

$2H_2 + 3O_2 + 2CO$. Apparat III.

| $h_1$ | $h_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 14,59 | 1,051 | 1,34 | 53,1 | 291 | 834 |
| 13,75 | 1,039 | 1,42 | 52,7 | 291 | 818 |
| 13,17 | 0,947 | 1,48 | 59,0 | 290 | 831 |
| 12,61 | 0,887 | 1,55 | 63,6 | 289 | 836 |
| | | | | Mittelwert | 830 |
| | | | | $T_2$ (korrigiert) = | 825° |

Von Interesse ist der Einfluß der Anfangstemperatur auf die Entflammung. Wenn die Anfangstemperatur höher als die des Arbeitsraumes war, waren direkte Versuchsdaten für die Entzündungstemperaturen der verschiedenen Gemische nicht zu erlangen, da das zur Dichtmachung als auch als Schmiermittel verwandte Lanolin schmolz und dadurch Undichtheiten in dem Zylinder eintraten. Ein anderes Schmiermittel aber, das bei diesen höheren Temperaturen zweckdienlich gewesen wäre, konnte nicht gefunden werden. Nähere Betrachtung zeigt jedoch, daß der Einfluß einer Veränderung der Anfangstemperatur in den Daten mit eingeschlossen ist. Nehmen wir die Sachlage in einem Experiment in dem Augenblick, wo der Kolben bei der Abwärtsbewegung einen Punkt erreicht, der halbwegs zwischen dem Ausgangspunkt und dem Boden des Zylinders liegt. In dem Moment ist $h_2 = \frac{1}{2} h_1$ und

$$\begin{aligned} \log T_2 &= \log T_1 + 0{,}4 (\log h_1 - \log \tfrac{1}{2} h_1) \\ &= \log T_1 + 0{,}12041. \end{aligned}$$

Ist $T_1 = 290^0$, so ist $T_2 = 383^0$.

Betrachten wir nun diesen Wert von $T_2$ als die Anfangstemperatur des Gemisches, welches bei weiterer adiabatischer Kompression explodiert, sowie die Entzündungstemperatur erreicht ist. Die letztere ist offenbar dieselbe Entzündungstemperatur, welche ermittelt wurde, wenn wir annahmen, daß der Versuch von der Temperatur des Arbeitsraumes ausging. Diese Methode, das Problem zu behandeln, ist statthaft, da der einzige während der Dauer eines Experimentes veränderliche Faktor der Druck ist, welcher aber die Entzündungstemperatur nicht beeinflußt. Auf ähnliche Weise kann man durch Einteilung eines einzelnen Experimentes in eine unendliche Reihe besonderer Versuche, in denen $T_1$ (die Anfangstemperatur) der Reihe nach um einen geringen Bruchteil gesteigert wird, annehmen, daß die Anfangstemperaturen aller der Gasgemische von der gewöhnlichen bis zur Entzündungstemperatur variieren. Der Einfluß des Gasdruckes in irgend einem Gemisch auf die Entzündungstemperatur dieses Gemisches ist so gering, wenn er überhaupt existiert, daß er empirisch nicht zu ermitteln ist. (Dies bezieht sich natürlich nur direkt auf die hohen Druckverhältnisse, unter denen die

Entzündungstemperaturen bestimmt wurden. Die theoretische Seite wird jedoch später zur Besprechung gelangen.)

### Mögliche Fehlerquellen.

Die Besprechung der möglichen Fehlerquellen wendet zunächst unsere Aufmerksamkeit der Berechnungsmethode zu, ob es nämlich zulässig ist, für den $k$-Wert zwischen der gewöhnlichen Temperatur und der Entzündungstemperatur 1,4 anzunehmen. Die früher über diesen Gegenstand angestellten Versuche zeigten eine bedeutende Verkleinerung des $k$-Wertes bei steigender Temperatur. Neuere Arbeiten hingegen, besonders die von Kalähne[1]), weisen ein anderes Resultat auf. Kalähne fand, indem er das Verhalten der Luft vermittelst der Resonanzmethode untersuchte, daß bei 723° (450° C.) keine Verminderung von $k$ beobachtet werden konnte und daß bei 1173° (900° C.) $k = 1{,}39$ war. Die Abnahme war so gering, daß nur die genauesten Messungen dieselbe nachwiesen. In neuerer Zeit sind keine Untersuchungen über Wasserstoff und Kohlenoxyd bei hohen Temperaturen gemacht worden, aber die für Luft erlangten Resultate können zweifelsohne auch auf jene angewendet werden. Es scheint also, daß $k$ für die hier benutzten Temperaturen zwischen einem Werte von etwas mehr als 1,40 und einem von 1,395 schwankt. Vermehrung des Druckes erhöht jedoch den Wert von $k$ ein wenig, so daß 1,4 weniger als 0,1 Proz. von dem wahren in dieser Untersuchung verwandten Wert von $k$ abweicht. Die für Wasserdampf benötigte Korrektur ist schon besprochen und in der Bestimmung der Endresultate in Betracht gezogen worden. Die Entzündungstemperaturen werden alle in demselben Maße dadurch modifiziert.

Bei den in diesen Versuchen verwandten Kompressionen ist immer eine Möglichkeit vorhanden, daß bei der Abwärtsbewegung des Kolbens Kompressions- und Reflexionswellen gebildet werden.[2]) Diese Wellen würden eine höhere Temperatur des Gemisches ergeben, als die nach der gewöhnlichen

1) A. Kalähne, Ann. d. Phys. 11. p. 225. 1903.

2) Auf die Möglichkeit dieses sowie auch des folgenden Fehlers wurde Schreiber dieses auch von Prof. E. Jouguet aufmerksam gemacht.

adiabatischen Formel berechnete. Es gibt keine Gleichung, welche diese Wellen berücksichtigte, die, falls sie beträchtlich wären, die Resultate ungültig machen würden. Die experimentellen Resultate zeigen jedoch, daß letzteres nicht der Fall ist. Die Anfangshöhe $h_1$ variierte bei den verschiedenen Gemischen und sogar bei demselben Gemisch. Eine beträchtliche, durch diese Wellen hervorgerufene Wirkung würde bei den verschiedenen Höhen bedeutende Differenzen aufweisen. Die angestellten Versuche zeigen jedoch, daß keine regelmäßigen Differenzen bei den verschiedenen Werten von $h_1$ beobachtet werden können, so daß diese Wirkung sehr klein sein muß. Wie groß oder klein nun auch der dadurch veranlaßte Fehler sein mag, so bewirkt er jedenfalls eine zu niedrige Ansetzung der berechneten Temperaturen.

Beim Herabfallen des Gewichtes ist die Möglichkeit vorhanden, daß die Explosion nicht genügend Kraft entwickelt, die Abwärtsbewegung des Kolbens sofort zu inhibieren. Es wurde aber gefunden (ausführliche Angabe in Tab. 2), daß das Herabfallen des Gewichtes aus verschiedenen Höhen keinen nennenswerten Unterschied in den Entzündungstemperaturen machte. Es bleibt aber noch die Möglichkeit eines kleinen konstanten Fehlers. Dieser würde dahin führen, die berechnete Temperatur etwas höher als die tatsächlichen Entzündungstemperaturen zu machen, d. h., dieser Fehler würde dem früheren gerade entgegengesetzt sein und ihn so neutralisieren. Diese beiden Fehlerquellen, wenn sie überhaupt bestehen, müssen gering sein und in entgegengesetzten Richtungen ihre Wirkung ausüben, so daß man den Einfluß auf die berechneten Entzündungstemperaturen völlig außer Betracht lassen kann.

Daß keine Wärmestrahlung oder sonstiger Wärmeverlust während der Komprimierung eintritt, ist auch erwiesen, denn die ihrer Größe nach so verschiedenen Apparate ergeben wesentlich dieselben Resultate.

### Betrachtung der Resultate.

Wenn in der folgenden Betrachtung der Resultate die Entzündungstemperatur eines Gemisches in mehr als einem Apparat bestimmt wurde, wurde das in den verschiedenen Apparaten erhaltene Durchschnittsresultat gewählt. Es ist

nicht möglich, mit Bestimmtheit anzugeben, daß ein Apparat genauere Resultate ergab als ein anderer, und in jedem Falle wiesen die Resultate so geringe Schwankungen auf, daß irgend eine andere Durchschnittsberechnung keinen erkennbaren Unterschied zeigen würde. Die in Klammern eingeschlossenen Zahlen beziehen sich auf die Tabellen, die eine ausführliche Darstellung der Experimente enthalten.

Tabelle A.

**Wasserstoff und Sauerstoff.**

| | $T_2$ |
|---|---|
| $4H_2 + O_2$ (1, 4, 11) | 878 |
| $2H_2 + O_2$ (2, 5, 9) | 813 |
| $H_2 + O_2$ (3, 6, 10) | 787 |
| $H_2 + 2O_2$ (7) | 808 |
| $H_2 + 4O_2$ (8) | 844 |

Die unten abgebildete Kurve (Fig. 2) zeigt die Entzündungstemperaturen der verschiedenen Wasserstoff- und Sauerstoffgemische.

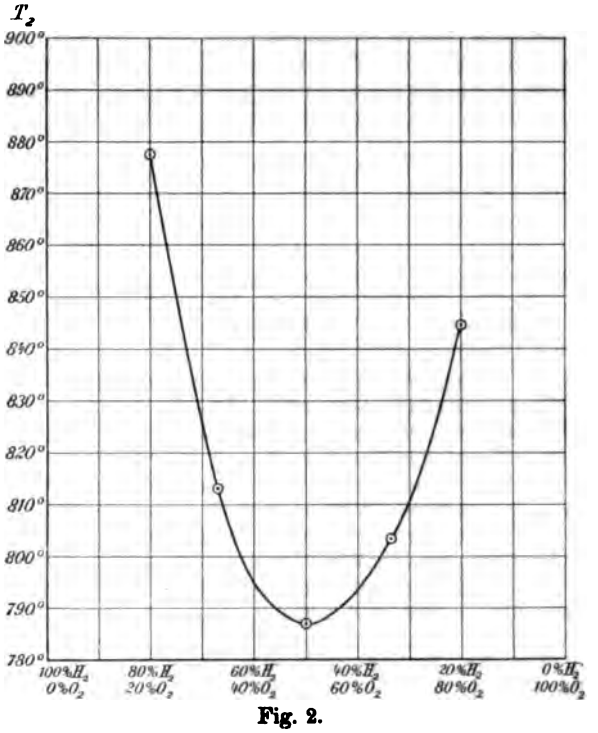



Fig. 2.

Die Entzündungstemperatur des Gemisches $H_2 + O_2$ liegt niedriger als die der anderen Gemische. Dieses Minimum der Temperatur entspricht einem Maximum der Affinität, wie es sich klar aus der Kurve ergibt, in welcher die relativen Wasserstoff- und Sauerstoffvolumina in den verschiedenen Gemischen als Abszissen und die Entzündungstemperaturen als Ordinaten eingetragen sind. Die einfachste Erklärung dafür ist, daß das erste bei der Vereinigung von Wasserstoff und Sauerstoff sich entwickelnde Produkt Wasserstoffsuperoxyd ist, das dann permanent bleibt oder sich zersetzt, wobei die Vollständigkeit dieser zweiten Reaktion von den Verhältnissen abhängt. Diese Theorie ist keine neue, aber bisher fehlte ihr der experimentelle Nachweis. Sie wurde zuerst von Mendelejeff aufgestellt[1]): ... „Ebenso kann angenommen werden, daß Wasserstoff mit Sauerstoff sich zunächst (in gleichen Volumen: $H_2$ und $O_2$) zu Wasserstoffhyperoxyd verbindet, welches durch die freiwerdende Wärme in Wasser und Sauerstoff zerfällt, um so mehr, als durch diese Annahme die Bildung der Spuren von Wasserstoffhyperoxyd bei fast allen Verbrennungs- und Oxydationsprozessen wasserstoffhaltiger Körper, in Anbetracht der leichten Zersetzbarkeit des Wasserstoffhyperoxyds, sich auf das einfachste erklären läßt, während die Bildung des Hyperoxyds aus Wasser, wenn dieses direkt entstehen würde, eine Reaktion wäre, die bis jetzt nicht beobachtet werden konnte." Die experimentellen Arbeiten Traubes[2]), und in neuerer Zeit diejenigen Englers[3]), haben viel zur Geltendmachung dieser Ansicht beigetragen.

---

1) Dieser Auszug ist aus der deutschen Übersetzung der Grundlagen der Chemie von Mendelejeff p. 337. In der Anmerkung unter dem Text heißt es: „Daß ursprünglich Wasserstoffhyperoxyd entsteht und erst durch Zersetzung desselben Wasser, ist die Ansicht, welche ich stets vertreten habe (schon in den ersten Auflagen dieses Buches), und welche, besonders seit den Arbeiten von Traube, sich zu verbreiten beginnt. ... Vielleicht wird auch die Theorie der Explosion des Knallgases und des Brennens von Wasserstoff an Klarheit gewinnen und sich mehr dem wahren Sachverhalt nähern, wenn die ursprüngliche Bildung von Wasserstoffhyperoxyd und seine nachfolgende Zersetzung berücksichtigt wird."

2) M. Traube, Berichte 15. p. 659; 16. p. 1201; 18. p. 1881; 22. p. 1496; 26. p. 1471.

3) C. Engler u. J. Weissberg, „Vorgänge der Autoxydation".

## Tabelle B.

**Kohlenoxyd und Sauerstoff.**

| | $T_2$ |
|---|---|
| $6CO + O_2$ (12) | 994 |
| $4CO + O_2$ (13) | 901 |
| $2CO + O_2$ (14) | 874 |
| $CO + O_2$ (15, 16) | 904 |

Vermittelst der Kurve (Fig. 3) und durch Extrapolation, wie es in dem punktierten Teile angedeutet ist, können die Entzündungstemperaturen der verschiedenen Gemische von Kohlenoxyd und Sauerstoff bestimmt werden.

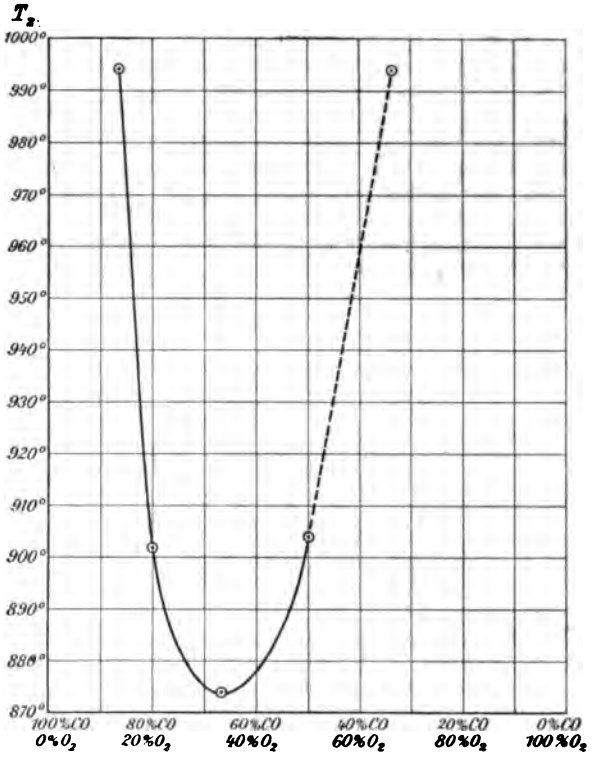



Fig. 3.

Maximalaffinität zeigt das Gemisch $2CO + O_2$. Die Verdoppelung des Volumens des Kohlenoxyds oder des Sauerstoffs

verursacht dieselbe Steigerung in den Entzündungstemperaturen der resultierenden Gemische.

Tabelle C.

Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff.

| | $T_c$ (beob.) | $T$ (ber.) |
|---|---|---|
| $H_2 + O_2 + N_2$ (17) | 820 | 817 |
| $H_2 + O_2 + 2N_2$ (18) | 851 | 847 |
| $H_2 + O_2 + 4N_2$ (19) | 910 | 907 |
| $2H_2 + O_2 + N_2$ (20) | 846 | 843 |
| $2H_2 + O_2 + 4N_2$ (21) | 922 | 933 |
| $H_2 + 2O_2 + N_2$ (22) | 837 | 833 |
| $H_2 + 2O_2 + 4N_2$ (23) | 914 | 923 |

Die Werte von $T$ (berechnet) werden mit Hilfe der empirischen Gleichung

(a) $$T = T_c + 30\,n$$

erlangt, worin $T$ die berechneten Entzündungstemperaturen bezeichnet, $T_c$ die aus der Kurve (Fig. 2) erhaltenen Entzündungstemperaturen der unverdünnten Wasserstoff–Sauerstoffgemische, und $n$ das Volumen des indifferenten Gases dividiert durch Volumen des geringeren der beiden aktiven Bestandteile.

$$\left(n = \frac{\text{Volumen des indifferenten Gases}}{\text{Volumen von } H_2 \text{ oder } O_2 \text{ (dem jeweilig in kleineren Mengen vorhandenen Gase)}}\right).$$

Da Stickstoff nur als ein indifferentes Gas wirkt, so kann man mit Hilfe der oben angeführten Gleichung (a) in Verbindung mit der Kurve (Fig. 2) auf sehr einfache Weise die Entzündungstemperatur irgend eines aus Wasserstoff und Sauerstoff bestehenden Gemisches (unverdünnt oder auch in Gegenwart eines indifferenten Gases) berechnen. Diese Gleichung läßt die Grenze der Entzündungsfähigkeit unberücksichtigt, aber solch eine Grenze muß ohne Zweifel für die Gemische existieren, welche einen Überschuß eines der Gemengteile enthalten.

Tabelle D.

Kohlenoxyd, Sauerstoff und Stickstoff.

| | $T_c$ (beob.) | $T$ (ber.) |
|---|---|---|
| $2CO + O_2 + N_2$ (24) | 917 | 914 |
| $2CO + O_2 + 2N_2$ (25) | 958 | 954 |
| $CO + O_2 + N_2$ (26) | 979 | 984 |
| $CO + O_2 + 2N_2$ (27) | 1085 | 1064 |
| $4CO + O_2 + N_2$ (28) | 925 | 921 |
| $4CO + O_2 + 2N_2$ (29) | 940 | 941 |

Die Werte von $T$ (berechnet) werden mit Hilfe der empirischen Gleichung

(b) $$T = T_c + 80\,n'$$

erhalten, in welcher $T$ die berechneten Entzündungstemperaturen bezeichnet, $T_c$ die aus der Kurve (Fig. 3) sich ergebenden Entzündungstemperaturen der Gemische ohne das indifferente Gas, und $n' = \frac{\text{Volumen des indifferenten Gases}}{\text{Volumen des Kohlenoxyds}}$. Mit Zuhilfenahme der Kurve (Fig. 3) und Gleichung (b) kann man die Entzündungstemperaturen irgend eines aus Kohlenoxyd und Sauerstoff bestehenden Gemisches (entweder unverdünnt oder mit Zusatz eines indifferenten Gases) berechnen, bis zu einem Punkte, wo die Entzündungsfähigkeit aufhört.

Tabelle E.

Wasserstoff, Kohlenoxyd und Sauerstoff.

| | $T$ (beob.) | $T_a$ (ber.) | $T_b$ (ber.) |
|---|---|---|---|
| $H_2 + O_2 + CO$ (30) | 812 | 817 | 984 |
| $H_2 + O_2 + 2CO$ (31) | 851 | 847 | 914 |
| $H_2 + O_2 + 4CO$ (32) | 898 | 907 | 921 |
| $2H_2 + O_2 + 2CO$ (33) | 877 | 878 | 954 |
| $2H_2 + O_2 + 4CO$ (34) | 938 | 933 | 941 |
| $H_2 + 2O_2 + 2CO$ (35) | 869 | 863 | 944 |
| $H_2 + 2O_2 + 4CO$ (36) | 888 | 923 | 894 |
| $2H_2 + 3O_2 + 2CO$ (37) | 825 | 822 | 1030 |

Die unter $T_a$ (ber.) angegebenen Werte wurden aus Gleichung (a) und der Kurve (Fig. 2) gewonnen, unter der Annahme, daß Kohlenoxyd als neutrales Gas wirkt, die unter $T_b$ (ber.) angeführten Werte wurden aus Gleichung (b) und der Kurve (Fig. 3) berechnet und Wasserstoff als neutrales Gas betrachtet. Wie aus der Tabelle ersichtlich, stimmt der experimentell nachgewiesene Wert in jedem Falle mit den niederen der berechneten Werte überein, woraus hervorgeht, daß die Entzündungstemperatur durch zwei der Bestandteile bestimmt wird, während der dritte nur als indifferentes Gas wirkt. Dies gilt offenbar auch bei Beimischung von Stickstoff, Kohlensäure oder irgend einem anderen indifferenten Gase, so daß man zur Berechnung der Entzündungstemperatur irgend eines Gemisches aus Wasserstoff, Kohlenoxyd, Sauerstoff und einem indifferenten Gase, nur zuerst die Entzündungstemperatur des

Wasserstoffs und Sauerstoffs zu berechnen braucht, unter der Annahme, daß der übrige Teil des Gemisches indifferent ist (Fig. 2, Gleichung (a)), und dann dasselbe Verfahren bei Kohlenoxyd und Sauerstoff anzuwenden, unter der Annahme, daß die anderen Bestandteile indifferent sind (Fig. 3, Gleichung (b)). Die niedrigere von diesen beiden Temperaturen ist die gewünschte Entzündungstemperatur des Gemisches.

Eine Anzahl Versuche wurden mit Wasserstoff- und Stickstoff-, Stickstoff- und Sauerstoff-, und Kohlenoxyd- und Wasserstoff-Gemischen angestellt, aber in keinem Fall konnte auch nur die leiseste Spur einer unter den beschriebenen Bedingungen stattfindenden Reaktion nachgewiesen werden.

„Producer gas", welches in Gasmaschinen zur Verwendung kommt, besteht im wesentlichen aus Wasserstoff, Kohlenoxyd, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure. Die in dieser Untersuchung angeführten Resultate zeigen, wie die Entzündungstemperatur irgend eines solchen Gemisches berechnet werden kann. Eine allgemeine Besprechung dieses Teiles der Untersuchung würde, ohne eine große Anzahl von Gasanalysen und einer vollständigen Angabe des Betriebes der Maschine, von geringem Werte sein.

Einige Klarheit dürfte sich durch die hier angeführten Resultate über die Ursachen von Grubenexplosionen verbreiten lassen.

### Theoretische Betrachtungen.

Betrachten wir eine bimolekulare Reaktion, welche in einem homogenen gasförmigen Systeme vor sich geht. Es sei $r$ ein bestimmtes Volumen des Gemisches bei der Entzündungstemperatur, $x$ der Volumteil eines der Bestandteile, $y$ der Volumteil des anderen ($x + y = r$). Wenn dann $v$ die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Entzündungstemperatur bezeichnet, und $k$ die entsprechende Geschwindigkeitskonstante, so ergibt sich:

$$v = kxy = kx(r - x),$$

$$\frac{dv}{dx} = -kx + k(r - x) = 0, \quad x = \frac{r}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{r}{2};$$

oder, damit die Geschwindigkeit bei der Entzündungstemperatur ein Maximum sei, müssen die beiden Bestandteile in gleichen Volumen oder Volumteilen vorhanden sein. Die Maximal-

reaktionsgeschwindigkeit stimmt offenbar mit der größten Affinität überein, oder mit der niedrigsten Entzündungstemperatur eines Gemisches, das aus diesen beiden Gemengteilen besteht. Umgekehrt, wenn ein Gemisch zweier Gase die niedrigste Entzündungstemperatur bei gleichen Volumen aufweist, so muß die Reaktion zwischen denselben bimolekular sein. Die niedrigste Entzündungstemperatur bei Sauerstoff–Wasserstoffgemischen wurde für das Gemisch festgestellt, welches gleiche Volumina der zwei Gase enthielt. Die Reaktion zwischen denselben ist daher eine der zweiten Ordnung. Bodenstein[1]) maß direkt die Reaktionsgeschwindigkeit zwischen Wasserstoff und Sauerstoff und kam zu dem Schlusse, daß sie trimolekular sei. Rowe[2]) dagegen fand bei Nachrechnung von Bodensteins Resultaten, daß die Konstante ebensowohl für eine bimolekulare als für eine trimolekulare stimmt. Er nimmt jedoch an, da Wasserstoffsuperoxyd sich mit großer Schnelligkeit bei höheren Temperaturen zersetzt[3]), daß es überhaupt nicht gebildet werden kann, und daß die Reaktion daher trimolekular ist. Die aus der Bestimmung der Entzündungstemperaturen der verschiedenen Wasserstoff–Sauerstoffgemische sich ergebenden Resultate beweisen, daß die Reaktion bimolekular sein muß, und daß Wasserstoffsuperoxyd das zuerst gebildete Produkt ist, wenn es sich auch sofort wieder zersetzt.

Die Entzündungstemperatur entspricht einer gewissen Reaktionsgeschwindigkeit. Wenn ein indifferentes Gas hinzukommt, so ist die Reaktionsgeschwindigkeit zwischen den beiden Gasen bei der ursprünglichen Entzündungstemperatur geringer, und eine höhere Temperatur ist erforderlich, die nötige Geschwindigkeit zu erreichen und die Entzündung herbeizuführen.

Bei der eben betrachteten bimolekularen Reaktion ergibt sich:

$$v = k\,x\,(r - x),$$

oder bei gleichen Volumen der Gase

$$x = \frac{r}{2} \quad \text{und} \quad v = \frac{k\,r^2}{4}.$$

1) M. Bodenstein, Zeitschr. f. physik. Chem. **29.** p. 665.
2) A. W. Rowe, Zeitschr. f. physik. Chem. **59.** p. 41.
3) W. Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. **46.** p. 720.

Nehmen wir das Vorhandensein eines indifferenten Gases an, das ein Drittel des Volumens $r$ einnimmt, so folgt:

$$x_1 + y_1 = \frac{2r}{3},$$

und für die Maximalgeschwindigkeit $v_1$

$$x_1 = y_1 = \frac{r}{3},$$

und folglich

$$v_1 = k_1 x_1 y_1 = k_1 x_1 \left(\frac{2r}{3} - x_1\right).$$

Bei der Entzündungstemperatur eines Gemisches, das kein indifferentes Gas enthält, ist

$$k_1 = k \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{kr^2}{9},$$

oder die Reaktionsgeschwindigkeit des mit einem indifferenten Gase verdünnten Gemisches ist ein $\frac{4}{9}^{\text{tel}}$, da

$$\left(\frac{v_1}{v} = \frac{\frac{kr^2}{9}}{\frac{kr^2}{4}} = \frac{4}{9}\right)$$

der Reaktionsgeschwindigkeit des unverdünnten Gemisches bei der Entzündungstemperatur des letzteren. Um die Geschwindigkeit des ersteren zu erhöhen, bis die Geschwindigkeit des letzteren (oder Entzündung) erreicht ist, erfordert eine Steigerung der Temperatur. Experimentell wurde nachgewiesen, daß diese 30° beträgt (Gleichung (a)). Ein Steigen der Temperatur dieses Gemisches von 10° vergrößert die Reaktionsgeschwindigkeit um $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$, oder der Geschwindigkeitskoeffizient ist gleich 1,31 zwischen den Grenzpunkten 787 und 820° (den Entzündungstemperaturen der Gemische $H_2 + O_2$ und $H_2 + O_2 + N_2$).

Ferner sind noch die Druckverhältnisse zu besprechen. Wenn man die von Hrn. Nernst entwickelten theoretischen Ansichten[1]) beibehält, so würde man erwarten, daß die Entzündungstemperaturen unabhängig vom Drucke wären. Die Werte $p_2$ in den Tabellen geben aber nur die obere Grenze der Drucke wieder, da eine Undichtigkeit im Zylinder $p_1$ und

1) Journ. Amer. Chem. Soc. 28. p. 1519.

folglich auch $p_2$ erniedrigen. Die Entzündungstemperatur irgend eines Gemisches ist den Tabellen nach unabhängig vom Druck. Beim Vergleich der Reaktionsgeschwindigkeiten verschiedener Gemische wurde der Druckeinfluß außer acht gelassen, da die Drucke im großen einander ungefähr glichen, und nur in wenigen Gemischen große Abweichungen zeigten. Es muß aber betont werden, daß der Einfluß des Druckes, wenn man ihn berücksichtigt, sich darin zeigen würde, daß der Temperaturkoeffizient pro 10° Steigerung etwas kleiner ausfallen würde als angegeben ist.

Kommen wir wieder auf den Temperaturkoeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit zurück, so ersehen wir aus den folgenden Tabellen einige der berechneten Werte, zusammen mit den Entzündungstemperaturen der Gemische, welche andeuten, innerhalb welcher Temperaturgrenzen diese Werte Geltung behalten:

| | | | Temperaturkoeffizient pro 10° Steigerung | Zwischen den Temperaturgrenzen |
|---|---|---|---|---|
| $(H_2+O_2$ | und | $H_2+O_2+N_2)$ | 1,31 | 787—820 |
| $(H_2+O_2+N_2$ | „ | $H_2+O_2+2N_2)$ | 1,21 | 820—851 |
| $(H_2+O_2+2N_2$ | „ | $H_2+O_2+3N_2)$ | 1,16 | 851—880 (ca.) |
| $(H_2+O_2+3N_2$ | „ | $H_2+O_2+4N_2)$ | 1,13 | 880—910 |

Der Temperaturkoeffizient verringert sich von 1,31 bei ca. 800° bis zu 1,13 bei ca. 900°. Eine Tabelle der Geschwindigkeitsverhältnisse für eine Reihe von Reaktionen in Abständen von 10° wird von van't Hoff gegeben.[1]) Diese Verhältnisse variieren nicht besonders bei verschiedenen Reaktionen und liegen beinahe alle zwischen 2. und 3. bei Temperaturen, die nicht weit von der gewöhnlichen Temperatur entfernt sind. Bei zwei Reaktionen sind jedoch die Verhältnisse auch für höhere Temperaturen angegeben; für die Zersetzung des Phosphins zwischen den Temperaturen 583 und 785° ist das Verhältnis pro 10° Steigerung 1,2, und für die Zersetzung von Arsin zwischen 529 und 640° pro 10° Steigerung 1,23. Diese Temperaturkoeffizienten (oder Verhältnisse)

1) J. H. van't Hoff, Vorlesungen über Theoretische und Physikalische Chemie 1. p. 225.

sind beinahe genau dieselben wie die bei der Reaktion zwischen Wasserstoff und Sauerstoff gefundenen.

Der Einfluß, welchen die Beimischung eines Überschusses eines der aktiven Bestandteile ausübt, ist nun zu erörtern. Wenn einer dieser Bestandteile ($x$) in doppelt so großer Quantität als der andere ($y$) vorkommt, dann ist $x+y=r$; aber $x=2r/3$ und $y=r/3$ und $v_2=k_2xy=(2k_2r^2)/9$ (da die Reaktion bimolekular ist). Auf die Wasserstoff–Sauerstoffgemische angewandt bei gleichem Volumen der beiden Gase, ergibt sich $v=kr^2/4$, und daher bei derselben Temperatur ($k_2=k$), $v_2/v=\frac{8}{9}$. Für die Gemische $H_2+O_2$ und $H_2+O_2+N_2$ ist

$$\frac{v_1}{v}=\frac{\frac{kr^2}{9}}{\frac{kr^2}{4}}=\frac{4}{9},$$

wie schon vorhin erwiesen wurde, so daß eine Steigerung von 30° genügt, um die Geschwindigkeit von $v_1$ zu erhöhen und es $v$ gleich zu machen. Das Verhältnis von $v_2/v$ ist halb so groß als das Verhältnis $v_1/v$, so daß die halbe Steigerung in der Temperatur genügen sollte, oder 15°, die Geschwindigkeiten auszugleichen. Bei dem Gemisch $4H_2+O_2$ oder $H_2+4O_2$ ist gleicherweise

$$v_3=k_3\times\frac{4r}{5}\times\frac{r}{5}=\frac{4k_3r^2}{25},$$

und wenn $k_3=k$, so ist $v_3/v=\frac{16}{25}$. Da 15° einer Erhöhung der Reaktionsgeschwindigkeit von $\frac{1}{9}$ entspricht, so ist, um einer Erhöhung von $\frac{9}{25}$ zu entsprechen, $15\times\frac{9}{25}/\frac{1}{9}=49°$ benötigt. Die berechneten und die experimentell nachgewiesenen Temperaturen sind wie folgt:

| | Experimentell nachgewiesen | Berechnet |
|---|---|---|
| $H_2+O_2$ | 787 | |
| $H_2+2O_2$ | 803 | 802 |
| $2H_2+O_2$ | 813 | |
| $H_2+4O_2$ | 844 | 836 |
| $4H_2+O_2$ | 878 | |

Die Entzündungstemperaturen der Gemische, die einen Überschuß an Sauerstoff enthalten, stimmen ziemlich genau mit den berechneten Entzündungstemperaturen überein; diejenigen jedoch von Gemischen, in denen Wasserstoff im Über-

schuß vorkommt, zeigen gar keine Übereinstimmung. In der Tat stimmen die einen Überschuß an Wasserstoff enthaltenden Gemische besser überein, wenn man den überschüssigen nicht zur Reaktion mit dem Sauerstoff erforderlichen Wasserstoff als indifferent ansieht, indem dann das Gemisch $H_2 + O_2 + 3H_2$ dem Gemisch $H_2 + O_2 + 3N_2$ usw. entspricht. Man hat gegenwärtig vom theoretischen Standpunkte aus keine Erklärung für dieses abnorme Verhalten des Wasserstoffs.[1]) Das einzig Gewisse scheint, daß ein Überschuß von Wasserstoff oder Sauerstoff die Entzündungstemperatur des Gemisches $H_2 + O_2$ gleichmäßig beeinflussen sollte, daß das aber nicht der Fall ist. Aus den experimentellen Versuchen zu schließen, ist diese Regellosigkeit auf den Wasserstoff als Ursache zurückzuführen. Man muß jedoch berücksichtigen, daß das auf rein experimentelle Versuche basierte Verfahren die Entzündungstemperaturen verschiedener Gemische (Fig. 2, Gleichung (a)) zu berechnen, seine Geltung hat, auch wenn die Theorie gegenwärtig nicht genügend entwickelt ist, um die aus den Versuchen sich ergebenden Schlüsse zu bestätigen.

Dasselbe Verfahren kann auch bei einer trimolekularen Reaktion angewandt werden. Da für die Reaktion zwischen Kohlenoxyd und Sauerstoff die experimentellen Daten erhältlich sind, wollen wir nur eine Reaktion betrachten, in welcher zwei Moleküle des einen Bestandteiles mit einem eines anderen reagieren, obgleich das Raisonnement natürlich auch bei anderen Fällen gilt. Es sei $x$ die vorhandene Menge der ersteren Substanz und $y$ die der letzteren, indem beide als Bruchteile eines bestimmten Volumens $r$ gemessen werden, dann ist die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Entzündungstemperatur ($k$ ist bei dieser Temperatur konstant):

$$v = k x^2 y = k x^2 (r - x),$$

$$\frac{dv}{dx} = 2kx(r - x) - kx^2 = 0 \quad \text{und} \quad x = 0 \text{ oder } \tfrac{2}{3} r.$$

Die Gleichung $x = 0$ hat keine physikalische Bedeutung, aber bei der Gleichung $x = \frac{2}{3} r$ ist $v$ ein Maximum.

1) Die Ursache hiervon kann nicht auf größere Wärmeausstrahlung aus dem ein großes Volumen Wasserstoff enthaltenden Gemisch zurückgeführt werden, da unter anderen das Gemisch $2H_2 + O_2 + 4N_2$ dasselbe relative Verhalten zeigt.

Eine Substanz muß daher in zweimal so großem Volumen als die andere vorhanden sein, damit die Reaktion mit Maximalgeschwindigkeit in einer trimolekularen Reaktion vor sich gehe, und umgekehrt eine Reaktion, welche bei einer gegebenen Temperatur mit der Maximalgeschwindigkeit vor sich geht, wenn zwei Volumen einer Substanz mit einem einer anderen reagieren, muß eine der dritten Ordnung sein. Die Reaktion zwischen Kohlenoxyd und Sauerstoff, bei der sich die Maximalgeschwindigkeit (oder niedrigste Entzündungstemperatur) aus dem Gemisch $2CO + O_2$ ergibt, ist trimolekular, und die Reaktion zwischen Wasserstoff und Sauerstoff, bei der die Maximalgeschwindigkeit nicht aus dem Gemisch $2H_2 + O_2$, sondern aus dem Gemisch $H_2 + O_2$ erhellt, kann nicht trimolekular sein.

Der Wert von $v$ für das Gemisch $2CO + O_2$ ist bei der Entzündungstemperatur:

$$v = k \times \left(\frac{2r}{3}\right)^2 \times \frac{r}{3} = \frac{4kr^3}{27}.$$

Wenn ein indifferentes Gas beigemischt wird, das ein Viertel des Gesamtvolumens einnimmt, ist die Geschwindigkeit:

$$v_1 = k_1 \times \left(\frac{r}{2}\right)^2 \times \frac{r}{4} = \frac{k_1 r^3}{16},$$

oder bei der Entzündungstemperatur des ersten Gemisches

$$k_1 = k \quad \text{und} \quad \frac{v_1}{v} = \frac{27}{64}.$$

Bei derselben Temperatur ist die Reaktionsgeschwindigkeit des Gemisches $2CO + O_2 + N_2$ $\frac{2}{6}\frac{7}{4}^{\text{tel}}$ so groß als die des Gemisches $2CO + O_2$. Experimentell (Gleichung (b)) wurde nachgewiesen, daß eine Erhöhung der Temperatur von 40° dieselbe Geschwindigkeit bei dem ersten Gemisch hervorrief als bei dem zweiten, wodurch dann die Entzündung in beiden Fällen erfolgte. Für eine Steigerung von 10° ist daher der Temperaturkoeffizient innerhalb der Grenzwerte der Entzündungstemperaturen dieser Gemische gleich $\sqrt[4]{\frac{64}{27}} = 1{,}24$. Für andere Gemische wurden die folgenden Werte erhalten:

| | Temperaturkoeffizient pro 10° Steigerung | Zwischen den Temperaturgrenzen |
|---|---|---|
| $(2CO + O_2$ und $2CO + O_2 + N_2)$ | 1,24 | 874— 917 |
| $(2CO + O_2 + N_2$ „ $2CO + O_2 + 2N_2)$ | 1,18 | 917— 958 |
| $(2CO + O_2 + N_2$ „ $2CO + O_2 + 3N_2)$ | 1,14 | 958—1000 (ca.) |

Der Temperaturkoeffizient schwankt zwischen 1,24 bei ca. 900° und 1,14 bei ca. 1000°, Werte, die denen bei der Reaktion zwischen Wasserstoff und Sauerstoff sich ergebenden ziemlich nahe kommen.

Es wird hier nicht versucht werden, diese Grundsätze auch auf Kohlenoxyd- und Sauerstoffgemische anzuwenden, die einen Überschuß eines der aktiven Bestandteile enthalten, da sich einige offenbar sich widersprechende und unerklärbare Eigentümlichkeiten in den Entzündungstemperaturen dieser Gemische zeigen. Die Entzündungstemperatur des Gemisches $6CO + O_2$ z. B. ist 994°, wenn aber ein Teil des Kohlenoxyds durch Stickstoff ersetzt wird, so nimmt die Entzündungstemperatur ab, so daß für das Gemisch $4CO + O_2 + 2N_2$ der Wert 940° gefunden wurde. Ein Überschuß von Kohlenoxyd, der ein bestimmtes Volumen übersteigt, übt eine negative, katalysierende Wirkung aus. Bodenstein und Ohlmer[1]) fanden dieselbe Wirkung, wenn sie die Reaktionsgeschwindigkeit an Quarzflächen zwischen Kohlenoxyd und Sauerstoff maßen, wobei ein Überschuß von Kohlenoxyd die Reaktion retardierte. Wie oben gezeigt wurde, scheint Wasserstoff bei der Reaktion zwischen Wasserstoff und Sauerstoff eine ähnliche negative katalysierende Wirkung auszuüben, die aber nicht so stark ausgeprägt ist.

**Zusammenfassung.**

Die Entzündungstemperaturen von Gemischen aus

Wasserstoff und Sauerstoff,
Kohlenoxyd und Sauerstoff,
Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff,
Kohlenoxyd, Sauerstoff und Stickstoff, und
Wasserstoff, Kohlenoxyd und Sauerstoff

wurden vermittelst der „adiabatischen Kompressionsmethode" bestimmt, und die möglichen Fehlerquellen von allen Gesichtspunkten aus besprochen.

Es wurde gezeigt, wie die Entzündungstemperatur irgend eines Gasgemisches, das Wasserstoff, Kohlenoxyd, Sauerstoff und ein indifferentes Gas enthält, berechnet werden kann.

1) M. Bodenstein u. F. Ohlmer, Zeitschr. f. physik. Chem. 53. p. 166.

Es wurde nachgewiesen, daß die Reaktion zwischen Wasserstoff und Sauerstoff bimolekular ist, und zwischen Kohlenoxyd und Sauerstoff trimolekular.

Der Geschwindigkeitskoeffizient für eine Temperatursteigerung von 10° wurde berechnet. Derselbe ist gleich 1,31 bei ca. 800° und 1,13 bei ca. 900° für die Reaktion zwischen Wasserstoff und Sauerstoff, und 1,24 bei ca. 900° und 1,14 bei ca. 1000° für die Reaktion zwischen Kohlenoxyd und Sauerstoff.

Die Reaktion zwischen Wasserstoff und Sauerstoff in Gegenwart eines Wasserstoffüberschusses und zwischen Kohlenoxyd und Sauerstoff in Gegenwart eines Kohlenoxydüberschusses ist nicht den gewöhnlichen Gesetzen der chemischen Kinetik unterworfen.

New York, Columbia-University, im Juli 1907.

(Eingegangen 25. September 1907.)

## 4. *„Eine neue Art von Influenzmaschinen mit allseits in festes Isolationsmaterial eingebetteten Sektoren“;* *von H. Wommelsdorf.*

Zweite Mitteilung.

Bis zu der vor kurzem erfolgten Veröffentlichung der neuen „Influenzmaschinen mit eingebetteten Sektoren“[1]) sind von der ausführenden Firma im Einklang mit mir die für den Handel bestimmten Typen nunmehr endgültig festgelegt worden. Einige bemerkenswerte Änderungen bzw. Verbesserungen in der äußeren Anordnung derselben veranlassen mich, diese ebenfalls hier zur Kenntnis zu bringen, und zugleich eine weitere Ergänzung bzw. Berichtigung meiner Angaben über die Stromleistung hinzuzufügen:

### 1. Schaltung der Influenzmaschinen („Erregerschalter“).

Die Selbsterregung der neuen Influenzmaschinen mit eingebetteten Sektoren ist derartig groß, daß dazu — überraschenderweise — unter normalen Verhältnissen die in Fig. 4 der Hauptarbeit dargestellte Metallspitze (nicht etwa eine solche aus einem Halbleiter, wie sie von Holtz angegeben und bisher ausschließlich verwandt wurde) in Verbindung mit dem Stanniolbeleg *d* (vgl. p. 617 der Hauptarbeit) bereits vollständig ausreicht.

Um jedoch auch für außergewöhnlich ungünstige Verhältnisse (z. B. für das Arbeiten in sehr feuchter Luft) eine schnelle Erregung der Maschine unbedingt sicherzustellen, kam ich zu der in Fig. 1 dargestellten, bereits in der Hauptarbeit beschriebenen Schaltung. Sie ist ausgezeichnet durch *„Erreger-*

1) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. **23**. p. 609. 1907.

*schalter*" *S* (wie ich sie kurz benennen will), durch welche die offenen Konduktoren der Maschine jederzeit mit dem Stanniolbeleg *d* (Fig. 4 der Hauptarbeit) unter Vermittelung eines mit demselben leitend verbundenen wohlabgerundeten Metallknopfes in Verbindung gebracht werden können. Während des Bestehens dieser Verbindung, im besonderen wenn außerdem der Polarisator die Kollektorkugeln der rotierenden Scheibe direkt berührt ($W = 0$), erfolgt die Selbsterregung der Maschine am schnellsten bzw. sichersten. Nach erfolgter Erregung wird alsdann *zur Erzielung der größten Stromleistung* die leitende Verbindung zwischen Erregerfeldern und Konduktoren durch Umlegen der Schalter *S* wieder aufgehoben.

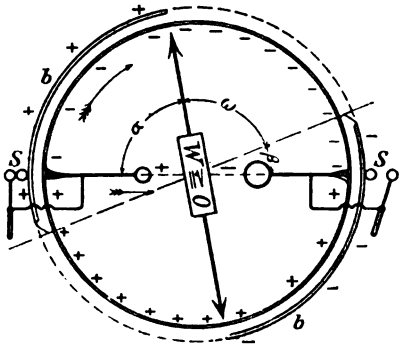



Fig. 1.

Die Schaltung nach Fig. 1 vereinigt somit in ein und derselben Maschine die Vorteile der Felderregung mittels *Spitze* (W. Holtz: Minimum an Verlusten, höchste Gesamtleistung, Verringerung der Bürstenzahl und -abnutzung) mit den Vorzügen der Felderregung mittels *Metallbürsten* (M. Toepler: Maximum der Selbsterregung).

Durch die Schaltung nach Fig. 1 sowie durch die Anwendung eines getrennten Dielektrikums von hoher Dielektrizitätskonstante, im besonderen von Zelluloid, ist das System mit festem Feld derartig verbessert worden, daß es *auch mit luftisolierten Sektoren* (rotierender Scheibe mit aufgeklebten Sektoren und dergl.) bereits Vorzügliches leistet und unter Umständen für technische Zwecke verwandt werden kann.

### 2. Verfahren und Einrichtung zum Umpolen der Influenzmaschinen.

Für ein bequemes Arbeiten mit Influenzmaschinen, im besonderen in der Röntgentechnik, erscheint es wünschenswert, zu beliebiger Zeit, auch während des Betriebes (z. B. bei falschem Anschluß der Röntgenröhre), einen Polwechsel der Maschine schnell herbeiführen zu können.

Nachdem ich zu diesem Zwecke an einer Maschine den Polarisator derartig hatte anbringen lassen, daß er leicht in

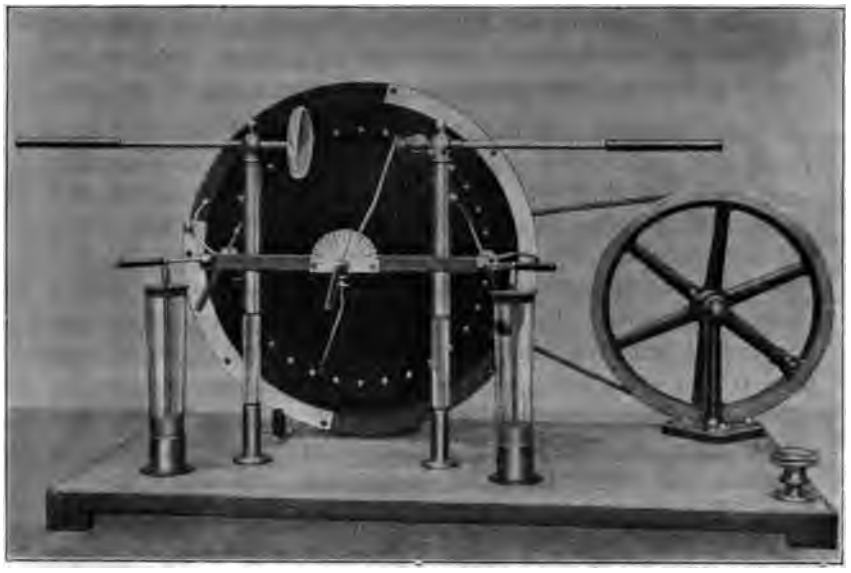


Fig. 2.

alle Stellungen, auch über 90° hinaus, bis auf $\alpha = 180°$ (Fig. 1) gedreht werden konnte, fand ich, daß ein Polwechsel in der Weise leicht und sicher erreicht werden kann, daß während des Betriebes bei eingeschalteten Leidener Flaschen (genügende Kapazität der Elektroden!) der Polarisator ein Stück über die Stellung der Metallspitze $S$ hinaus hin- und zurückgedreht wird, oder mit anderen Worten, daß der Polarisatorwinkel[1]) $\omega$ vorübergehend auf einen negativen Wert

1) Es empfiehlt sich, das Diagramm der Influenzmaschinen mit festem Feld, wie in Fig. 1 angegeben, in Winkel einzuteilen und den

gebracht wird. Damit die Maschine dabei nicht aus der Erregung fällt, ist es erforderlich, die Stellung gegenüber der Metallspitze schnell zu passieren.

In ähnlicher Weise kann bei Maschinen mit Doppeldrehung ein Polwechsel dadurch herbeigeführt werden, daß der eine Polarisator während des Betriebes über die Stellung des anderen hinaus hin- und zurückgeschwenkt wird, oder mit anderen Worten, daß auch hier der Polarisatorenwinkel, nämlich der Winkel, den die beiden Polarisatoren untereinander bilden, vorübergehend auf einen negativen Wert gebracht wird.

Um die Drehung des Polarisators bequem und ohne Gefahr vor elektrischen Schlägen ausführen zu können, ist derselbe, wie Fig. 2 zeigt, mit einem langen Hartgummigriff versehen.

### 3. Anordnung der Konduktoren und Polarisatoren.

Wie Fig. 2 weiter zeigt und bereits früher [1]) von mir empfohlen wurde, ist der Polarisator außerdem mit einem Zeiger versehen, der sich mit demselben über einer Winkelskala dreht, wodurch das Auffinden der günstigsten Stellung erleichtert wird. Da bei gleichbleibender Tourenzahl die Spannung mit dem Konduktorenwinkel $\alpha$ (Fig. 1) (im Bereich von $0^0$ bis etwa $90^0$), die höchste Stromleistung dagegen mit dem Polarisatorwinkel $\omega$ zunimmt, ist es erforderlich, den Polarisator zur Erreichung der jeweiligen höchsten Leistung bequem und sicher einstellen zu können.

Wird der Polarisator zunächst unter einem Konduktorenwinkel $\alpha$ von etwa $30^0$ eingestellt und sodann allmählich in die in Fig. 1 erkennbare bevorzugte Stellung zurückgedreht, so nimmt die Stromleistung — einen Schließungskreis von genügend geringem Widerstand (etwa $10^4$ Ohm) vorausgesetzt — langsam um etwa 12 Proz. ab; dagegen hat die erreichbare Entladespannung (Funkenlänge) erheblich zugenommen. Bei noch weiterer Verkleinerung des Polarisatorwinkels $\omega$ geht die Stromleistung schnell bis auf Null zurück, bis endlich in

Winkel $\omega$ mit Polarisatorwinkel, den Winkel $\alpha$ mit Konduktorenwinkel und den Winkel $\beta$ mit Erregerwinkel zu bezeichnen, analog meiner früher für das System mit Doppeldrehung vorgeschlagenen Winkelbenennung, Ann. d. Phys. 15. p. 843 und 847. 1904.

1) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. 15. p. 845. 1904.

einer Stellung des Polarisators gegenüber der Metallspitze $S$ ($\measuredangle \omega = 0°$) die Maschine nahezu oder gänzlich unerregt bleibt, so daß der Polarisator in dieser Stellung (bzw. auch bei schwacher Erregung in unmittelbarer Nähe derselben) zugleich als Ausschalter benutzt werden kann.

Wie ferner aus Fig. 2 ersichtlich ist, werden die Maschinen mit wagerecht verschiebbaren Elektroden ausgerüstet. Zur Erleichterung des praktischen Arbeitens mit ihnen sind die Konduktoren außerdem mit je einer Vorschaltefunkenstrecke sowie mit einem oder zwei Paar leicht ausschaltbarer Leidener Flaschen versehen.

#### 4. Einfluß des Scheibenabstandes.

Zur Erzielung einer möglichst großen Leistung sind die Influenzmaschinen mit verhältnismäßig sehr dicken Scheiben[1]) ausgerüstet. Infolgedessen ist der Einfluß des Scheibenabstandes, der — wie ich bereits mitgeteilt[1]) habe — mit zunehmender Scheibendicke geringer wird und überhaupt bei dem System mit festem Feld nicht von jener Bedeutung ist, wie bei dem mit Doppeldrehung, nur gering, im besonderen da außerdem die Metallspitze zwischen den Scheiben den Einfluß des Abstandes noch weiter verschleiert. Immerhin ist die Erregerscheibe so angeordnet, daß ihr Abstand von der rotierenden Scheibe leicht verändert bzw. genau eingestellt werden kann.

Um den Einfluß des Scheibenabstandes genauer zu studieren, ist es natürlich erforderlich, den Einfluß der Metallspitzen ganz zu eliminieren (z. B. in bekannter Weise durch Ersatz derselben durch an Bügeln befestigte, auf den Kollektorknöpfen schleifende Bürsten).

#### 5. Vergleichende Messungen der Stromleistung.

a) *Praktischer Vergleich mit anderen technischen Influenzmaschinen.* Um den *praktischen Wert* der neuen Maschinen voll zu würdigen, ist es erforderlich, bei Vergleichen hinsichtlich der Stromleistung sich nur auf solche Arten von Influenz-

1) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. **23**. p. 601. 1907; vgl. Resultat 1, 2, 3 und 5 a.

maschinen zu beschränken, die wie jene ebenfalls *praktisch anwendbar* sind, d. h. die als *technische* Influenzmaschinen angesprochen werden können.

Als solche kamen *bisher* lediglich die Influenzmaschinen mit Doppeldrehung (Holtz zweiter Art, Musaeus, Wimshurst[1]) *mit genügend starker Sektorenarmierung* in Betracht. *Keinesfalls* konnten *seither* die Influenzmaschinen mit festem Feld (Holtz erster Art, Toepler[2]) als technisch brauchbare — gar für die Röntgentechnik, Funkentelegraphie usw. anwendbare — Influenzmaschinen angesehen werden, im besonderen *da sie nur unter bestimmten Voraussetzungen, nämlich bei trockenem Wetter, in Gang zu bringen sind, ferner gegen Polwechsel, vorübergehendes plötzliches Versagen usw. nicht sicher sind.*

Durch die allseitige Einbettung der Sektoren, die Schaltung nach Fig. 1 sowie durch die Einführung des Zelluloiddielektrikums ist nun das konstruktiv einfachere *System mit festem Feld* derartig verbessert worden, daß es hinsichtlich der technischen Anwendbarkeit das *System mit Doppeldrehung und luftisolierten Sektoren* noch übertrifft.

Bei einem praktischen Vergleich der Stromleistung dieser beiden Systeme — unter Annahme der höchsten in jedem Falle technisch zulässigen Tourenzahl — zeigt sich nun, daß die neuen Maschinen bei gleichem Scheibendurchmesser und Spannung reichlich die *doppelte* Stromleistung gegenüber *einfachen*, bzw. pro Scheibe die *acht- bis zehnfache* Stromstärke gegenüber *mehrplattigen* Konstruktionen der alten Maschinen mit Doppeldrehung liefern, ferner daß sie einen *ganz erheblich besseren Wirkungsgrad besitzen.*

Der Grund für diese enorme Mehrleistung im letzteren Falle, nämlich gegenüber den *technischen* Mehrfachmaschinen, liegt selbstverständlich nur zum geringsten Teil an den Scheiben selbst; diese Maschinen können vielmehr infolge der ungünstigen Lagerung (auf unzulässig langer Achse), ferner wegen

1) W. Holtz, Pogg. Ann. **130.** p. 128 u. 168. 1867; W. Musaeus, Pogg. Ann. **143.** p. 285. 1871; zur Zeit fast allgemein, jedoch mit Unrecht, nach Wimshurst benannt; vgl. darüber W. Holtz, Zentralblatt für Elektrotechnik p. 683. 1883!

2) W. Holtz, Pogg. Ann. **126.** p. 157. 1865 u. **136.** p. 171. 1869; M. Toepler, Pogg. Ann. **125.** p. 469. 1865 u. **130.** p. 518. 1867.

des Einzelantriebes jeder einzelnen Scheibe in entgegengesetzter Richtung usw. nur mit sehr geringer Tourenzahl laufen, da anderenfalls die Maschine gefährdet würde.

So kommt es denn auch, daß für *jene technischen* Mehrfachmaschinen (mit Doppeldrehung) eine Stromstärke von ca. 150 Mikroampere praktisch die Grenze alles Erreichbaren (16 Scheiben von 55 cm Durchmesser) darstellt. Dagegen liefert eine der neuen Doppelmaschinen von nur drei Scheiben derselben Größe bereits 350 Mikroampere, mithin rein praktisch pro Scheibe etwa das Zehnfache.

Aus diesen Gesichtspunkten heraus resultiert vornehmlich die Überlegenheit sowie auch die praktische Anwendbarkeit der neuen Influenzmaschinen für Gebiete, die — wie die Röntgentechnik — bisher ganz oder fast ausschließlich den Influenzmaschinen verschlossen waren.

An die Doppelinfluenzmaschinen dieser Art schließen sich weiterhin für noch größere Stromleistungen die Kondensatormaschinen[1]) an, mit denen bei Verwendung der neuen Scheiben mit eingebetteten Sektoren und Zwischenschicht nicht annähernd bisher erreichte Leistungen von 5000 Mikroampere und mehr erzielt werden können.

b) *Allgemeine vergleichende Strommessungen.* Weniger leicht ist es, für genauere wissenschaftliche Zwecke auf gleicher Basis in Maschinen gleichen Systems die Scheiben mit eingebetteten Sektoren allgemein mit solchen nach Holtz-Toepler (Wimshurst) mit luftisolierten Sektoren hinsichtlich der Stromleistung einwandfrei zu vergleichen.

Hierzu ist zu beachten, daß *bei Scheiben mit luftisolierten Sektoren die Stromleistung innerhalb weiter Grenzen von der Größe und Zahl der Sektoren abhängig ist*, so daß also eine derartig kurze Angabe, wie ich sie in der Hauptarbeit hinsichtlich der Mehrleistung gegeben habe, nur als ein ungefährer vorläufiger Anhalt angesehen werden kann. Ferner ist für einen einwandfreien Vergleich erforderlich, daß das Scheibenmaterial hinsichtlich der Dielektrizitätskonstante, der Dicke, der Isolierfähigkeit und Oberflächenbeschaffenheit auf gleiche Grundlage gebracht wird. Ich behalte mir vor, sobald es mir gelungen

1) H. Wommelsdorf, Ann. d. Phys. **9**. p. 651. 1902.

ist, hierin übereinstimmende Scheiben zu erlangen, genauere Vergleiche anzustellen. Vorläufig mag es als Anhalt dienen, daß in einer Maschine mit Doppeldrehung und einer Sektorenbeklebung, wie sie zurzeit im Handel vorherrscht, die Mehrleistung der Scheiben mit eingebetteten Sektoren bei kleinen Entladespannungen ca. 75—100 Proz., bei den größten etwa 50 Proz. betrug, ferner daß die Mehrleistung bei Verwendung von nur einer Scheibe (System mit festem Feld) mit eingebetteten Sektoren erheblich geringer (etwa 25 Proz.) ist.

Aus ähnlichen Gründen, nämlich wegen der Verschiedenheit in der Armierung bei luftisolierten Sektoren und der daraus resultierenden großen Verschiedenheit des Funktionierens und der Stromlieferung, kann ich den Schlußsatz von Resultat 5 der Hauptarbeit, daß die Mehrleistung der neuen Maschinen um so größer ist, je kleiner die jeweilige Entladespannung ist, in dieser allgemeinen Form nicht aufrecht erhalten. Dieses gilt vielmehr nur für Maschinen mit bestimmter Sektorenarmierung, wie sie z. B. bei der oben genannten Maschine mit Doppeldrehung ausgeführt war und zurzeit im Handel vorherrscht.

Durch dieses Kapitel (5a und 5b) wird meine vorläufige kurze Mitteilung in der Hauptarbeit p. 623 und 624 über die Mehrleistung der neuen Scheiben bzw. Maschinen mit eingebetteten Sektoren gegenüber solchen mit luftisolierten Sektoren aufgehoben und durch ausführlichere Angaben ergänzt bzw. richtig gestellt.

### 6. Absolute Messungen.

Zum Schlusse dieser Arbeit lasse ich noch einige Angaben über die absoluten Werte von Strom und Spannung der neuen Influenzmaschinen in technischen Maßeinheiten folgen. Ich bemerke dazu, daß die maximale Entladespannung nach einer von M. Toepler[1]) angegebenen Methode, dagegen die maximale Stromstärke auf elektromagnetischem Wege in einem Schließungskreise von etwa $10^4$ Ohm bei einem großen Polarisatorwinkel (vgl. Kapitel 3!) und der vorgeschriebenen, technisch noch zulässigen Tourenzahl bestimmt wurde. Von der aus-

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 10. p. 730. 1903.

führenden Firma waren mir zu diesem Zwecke eine größere Anzahl für den Handel bestimmter Maschinen mit eingebetteten Sektoren zur Verfügung gestellt worden.

a) *Einfachmaschinen* (eine feste und eine rotierende Scheibe).

| Durchmesser der rotierenden Scheibe in cm | Maximale Stromstärke in Mikroampere etwa | Maximale Spannung in Volt |
|---|---|---|
| 25 | 60 | 75 000 bis 85 000 |
| 35 | 100 | 95 000 „ 105 000 |
| 45 | 140 | 115 000 „ 132 000 |
| 55 | 175 | 135 000 „ 150 000 |

b) *Doppelmaschinen* (eine feste und zwei rotierende Scheiben).

| | | |
|---|---|---|
| 45 | 280 | 12 000 bis 135 000 |
| 55 | 350 | 140 000 „ 155 000 |

(Eingegangen 26. September 1907.)

## 5. *Bestimmung absoluter Werte von Magnetisierungszahlen, insbesondere für Kristalle;*

*von W. Voigt und S. Kinoshita.*

(Aus den Nachr. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-physik. Kl. 1907.)

*Einleitung.* Die Bestimmung absoluter Werte von Magnetisierungszahlen für Kristalle ist nur in wenigen Fällen überhaupt in Angriff genommen worden und die hier erhaltenen Resultate ermangeln der Sicherheit. Am zuverlässigsten erscheinen noch die Werte für Kalkspat, die sich aus den Messungen Tyndalls[1]) über das *Verhältnis* und denjenigen der Herren Stenger[2]) und König[3]) über die *Differenz* der Hauptmagnetisierungszahlen dieses Minerales berechnen; aber die Tyndallschen Beobachtungen sind wohl mehr orientierend, als definitiv festlegend, und die sehr sorgfältigen Untersuchungen von Stenger und König weichen in ihren Endresultaten auffällig voneinander ab. So kann man auch für dies eine Mineral nur *ungefähre* absolute Werte angeben.

Bezeichnet man die Magnetisierungszahlen (Suszeptibilitäten) für die Richtungen normal und parallel zur kristallographischen Hauptachse mit $k_1$ und $k_3$ und bevorzugt die Königsche Zahl $k_3 - k_1 = -1{,}135 \cdot 10^{-7}$ vor der Stengerschen, so ergibt deren Kombination mit dem Resultat Tyndalls, das $k_1 : k_3 = 91 : 100$ liefert, die Endwerte

$$k_1 = -11{,}1 \cdot 10^{-7}, \quad k_3 = -12{,}2 \cdot 10^{-7}.$$

Aus dem Stengerschen Resultat $k_3 - k_1 = -0{,}85 \cdot 10^{-7}$ würde dagegen folgen

$$k_1 = -8{,}6 \cdot 10^{-7}, \quad k_3 = -9{,}4 \cdot 10^{-7}.$$

1) J. Tyndall, Phil. Mag. (4) **2.** p. 174. 1851; Pogg. Ann. **83.** p. 397. 1851.

2) Fr. Stenger, Wied. Ann. **20.** p. 304. 1883; **35.** p. 381. 1888.

3) W. König, Wied. Ann. **31.** p. 273. 1881.

Eine direkte Bestimmung der Größen $k_1$ und $k_2$ für Kalkspat und Wismut hat nach einer von Rowland ausgearbeiteten Methode Hr. Jacques versucht.[1]) Bei dieser Methode wurde das Feld zwischen den Polen eines Magneten als von rotatorischer Symmetrie dadurch nach seiner Gesetzmäßigkeit untersucht, daß die Feldstärke längs seiner Achse mit einer Induktionsspirale bestimmt und aus ihr nach den allgemeinen Gesetzen des Potentials die Feldstärke in einem größeren Bereich um die Achse berechnet wurde. In diesem nunmehr bekannten Felde brachte man dann Stäbchen aus den zu untersuchenden Kristallen zu Schwingungen um eine vertikale Achse und bestimmte deren Schwingungsdauern bei geeigneten Orientierungen.

Die Darstellung des Feldes erforderte die Bestimmung einer sehr erheblichen Zahl von Konstanten der Kugelfunktionenreihe und die Berechnung der auf die Kristallstäbchen ausgeübten Wirkung (bei der übrigens deren Querschnitt als unendlich klein behandelt ist) kann daher keine große Genauigkeit erreicht haben; aber diese Umstände erklären in keiner Weise die enormen Abweichungen, welche die von Jacques nach der Rowlandschen Methode für Kalkspat erhaltenen Zahlen

$$k_1 = -40 . 10^{-9}, \quad k_3 = -37 . 10^{-9}$$

von den oben angegebenen unterscheiden. In der Tat hat Rowland später[2]) die erhaltenen Resultate als durch einen Fehler entstellt preisgegeben. Hr. König[3]) hält für denkbar, daß der Fehler das Verhältnis beider Parameter nicht entstellt, muß aber dann, um die Zahlen benutzen zu können, noch die weitere Annahme machen, daß die Zahlwerte $k_1$ und $k_3$ vertauscht sind, um ein Resultat zu erhalten, das mit seinen und Tyndalls Zahlen einigermaßen vereinbar ist.

Dieser unbefriedigende Zustand unserer Kenntnisse über absolute Werte der Magnetisierungszahlen der Kristalle (wie auch anderer schwach para- oder diamagnetischer Körper)

1) H. A. Rowland, Amer. Journ. of Science (3) **18.** p. 360. 1879; Phys. Papers p. 184.

2) A. v. Ettinghausen, Wied. Ann. **17.** p. 274 Anm. 1882.

3) W. König, l. c. p. 300.

legte den Versuch nahe, die Lücke auszufüllen. Im nachstehenden ist über eine erste Beobachtungsreihe berichtet, die unter Benutzung einer der Tyndallschen einigermaßen verwandten Anordnung (die indessen die Ableitung nicht nur von relativen, sondern von absoluten Werten gestattete) von uns durchgeführt ist. Es wurden dabei außer einigen Jenenser Gläsern mehrere gerade verfügbare Kristalle verschiedener Systeme beobachtet. Die Messungen sind fast alle von Kinoshita ausgeführt. Da die von uns benutzte Methode außerordentlich wenig Material erfordert und sich dabei als recht genau erwiesen hat, so soll sie demnächst auf eine größere Reihe von Körpern angewendet werden. Ein vorläufiger Abschluß gebot sich dadurch, daß Kinoshita demnächst Göttingen verläßt.

Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften hier sind wir für die Unterstützung unserer Untersuchungen zu Dank verpflichtet.

*Theorie der Beobachtungsmethode.* Legen wir die Koordinatenrichtungen in die Hauptmagnetisierungsachsen des Kristalles und bezeichnen die Feldkomponenten mit $A$, $B$, $C$, die Magnetisierungszahl der Luft mit $k_0$, während wir $k_1$, $k_2$, $k_3$ für die Hauptmagnetisierungszahlen des Kristalles beibehalten, so ergibt sich für die Energie des Kristallpräparates im Magnetfelde bekanntlich der Ausdruck

$$(1) \quad \mathsf{E} = -\tfrac{1}{2}\int \left((k_1 - k_0)A^2 + (k_2 - k_0)B^2 + (k_3 - k_0)C^2\right) dv,$$

das Integral über das Volumen $v$ des Präparates erstreckt. Wird der Mittelwert von $A^2, \ldots$ innerhalb des Kristalles durch $\bar{A}^2, \ldots$ bezeichnet, so haben wir auch

$$(2) \quad \mathsf{E} = -\frac{v}{2}\left[(k_1 - k_0)\bar{A}^2 + (k_2 - k_0)\bar{B}^2 + (k_3 - k_0)\bar{C}^2\right].$$

Die Kraft $S$, die das Präparat sich selbst parallel in irgend einer Richtung $s$ zu verschieben sucht, ist durch

$$(3) \quad S = -\frac{d\mathsf{E}}{ds}$$

gegeben; ihr entgegengesetzt gleich ist die Kraft, welche erforderlich ist, um das Präparat an seiner Stelle zu halten.

Diese Kräfte bestimmen sich durch die lokalen Anderungen von $A^2$, $B^2$, $C^2$, und es wird offenbar auf die Genauigkeit der Resultate günstig einwirken, wenn man *die Methode der Feldbestimmung so einrichtet, daß sie direkt $A^2$, ... für diejenigen Räume liefert, die nachher von dem im Gleichgewicht gehaltenen Kristallpräparat eingenommen werden.*

Hierzu ist die von Rowland angewendete Induktionsspirale nicht geeignet, auch wenn man ihre Form vollständig mit derjenigen der Präparate in Übereinstimmung setzen wollte, denn sie ergibt $A$, $B$, $C$, d. h. die Mittelwerte der Feldkomponenten *selbst*, aus denen die gewünschten $A^2$, $B^2$, $C^2$ als Funktionen des Ortes nur umständlich und ungenau folgen. Dagegen leistet die Widerstandsänderung einer Wismutspirale vollständig das Gewünschte; denn diese Änderung ist nach den Symmetrieverhältnissen notwendig eine Funktion des Quadrates der Feldstärke, wenn auch die bekannten Eichungskurven der im Handel erhältlichen Wismutspiralen auf dem größten Teil ihres Verlaufes von Geraden nur wenig abweichen.

Diese Überlegungen leiten zu der folgenden Anordnung der Messungen, die sich auf das beste bewährt hat. Die Äquatorialebene $\overline{aa}$ des Feldes eines Elektromagneten wird von den Kraftlinien normal geschnitten. Das Gesetz, dem der Mittelwert des Quadrates der Feldstärke $R^2$ für eine kleine Kreisfläche der Äquatorialebene längs eines Radiusvektors $s$ der Äquatorialebene des Magnetfeldes folgt, läßt sich mit einer Wismutspirale bestimmen. Ist dies geschehen, so wird in irgend eine Position der Spirale eine kreisförmige Kristallplatte von mit der Spirale nahe übereinstimmender Größe gebracht; dieselbe erleidet im Felde eine translatorische Kraft parallel $\pm s$, und Gegenstand der Messung ist die Kraft, die erforderlich ist, um die Kristallplatte bei Erregung des Feldes in ihrer Position zu erhalten. In den drei Hauptfällen, daß die Platte normal zur ersten, zweiten, dritten Hauptmagnetisierungsachse des Kristalles geschliffen ist, ergeben sich für die nötigen Kräfte die Werte

$$S_h = \frac{v}{2}(k_h - k_0)\frac{d R^2}{d s}, \quad h = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Die eigentümliche Anordnung, die auf den Kristall ausgeübte Kraft *normal* zu den Kraftlinien des Feldes in Aktion

treten zu lassen, ist zum Teil durch die Eigenschaft der Wismutspirale bedingt, in der Position normal zu den Kraftlinien die kleinste magnetische Selbstinfluenz zu besitzen und demgemäß die sichersten Beobachtungen zu gestatten. Daß dabei die magnetischen Qualitäten in der Richtung der geäußerten Kraft, d. h. parallel zu $s$, gar nicht ins Spiel treten, wurde durch eine besondere Beobachtung gezeigt. Eine Platte Kalkspat, parallel der Hauptachse geschliffen, wurde einmal mit der Hauptachse, sodann mit dem dazu normalen Durchmesser in die Richtung von $s$ gebracht; sie erfuhr in diesen beiden Positionen seitens des Feldes genau die gleiche Kraft.

Die Messungen zerfallen nach dem Gesagten in zwei Teile: die Auswertung von $R^2$ längs eines Radius $s$ der Äquatorebene des Feldes und die Messung der von dem Felde auf die Kristallplatte ausgeübten Kraft.

*Die Bestimmung des Gesetzes von $R^2$.* Die benutzte Wismutspirale war von Hartmann & Braun in Frankfurt a. M. geliefert und hatte einen Durchmesser von 5 mm. Die ihr beigegebene Graduierungskurve gestattet bei kleinen Feldstärken überhaupt keine sehr genauen Ablesungen, und da zudem der Gesamtwiderstand der Spirale (vielleicht infolge einer zeitlichen Änderung des Materiales) merklich von dem von der Fabrik angegebenen Werte abwich, so war es nötig, die Spirale für kleine Feldstärken zu eichen.

Diese Eichung geschah durch Ausmessung verschiedener Magnetfelder mittels der Spiralen und Auswertung derselben Felder durch die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in einer hineingebrachten Quarzplatte. Das Quarzpräparat war in bekannter Weise aus einer rechts und einer links drehenden Platte, normal zur Hauptachse geschliffen, zusammengesetzt und maß rund 11,5 mm Dicke. Die beiden Platten waren durch eine nur etwa 0,01 mm dicke Schicht von Kanadabalsam verbunden, deren Wirkung auf die magnetische Drehung nicht besonders in Rechnung gesetzt zu werden brauchte. Der Einfluß der Reflexion an den beiden Endflächen auf die Drehung wurde in Rechnung gezogen.

Nach Ausführung der optischen Messungen wurde das Quarzpräparat beseitigt und die Widerstandsänderung der Wismutspirale an dem Orte der Mittelfläche und der beiden

Endflächen des Quarzes bestimmt. Die Beobachtungen wurden durch eine parabolische Kurve verbunden, woraus sich dann die mittlere Widerstandsänderung innerhalb des benutzten Feldteiles bestimmen ließ. Die Kombination dieses Resultates mit der Größe der mittleren Feldstärke, welche die optischen Beobachtungen lieferten, ergab die gesuchte Graduierung.

Allerdings dient hier ein in der Feldstärke *lineäres* Phänomen (die magnetische Drehung) zur Graduierung der Wismutspirale, und das würde die auf p. 495 hervorgehobenen Vorzüge der Beobachtungsmethode einigermaßen aufheben, wenn es sich bei der Graduierung wirklich um erhebliche Änderungen der Stärke des Feldes innerhalb der Spirale zwischen ihren verschiedenen Positionen handelte. Dies ist aber nicht der Fall. Da die Feldstärke in der Achse des Feldes ein Maximum oder Minimum hat, so sind ihre Variationen innerhalb des Bereiches der (senkrecht zur Achse gestellten) Spirale als von zweiter Ordnung zu betrachten, und auch längs der Achse variierte bei den für die Graduierung benutzten Umständen die Feldstärke nur um einige Prozente. Demgemäß darf innerhalb der (bei den Beobachtungen im Maximum zu erhoffenden) Genauigkeit von etwa 0,5 Proz. die Methode der Graduierung als unbedenklich betrachtet werden.

Das Resultat der Graduierung war, daß der Zusammenhang zwischen dem Widerstand $W_0$ *außerhalb*, $W_1$ *innerhalb* des Feldes (in Ohm) und der Feldstärke $R$ (in Gauß) innerhalb des Bereiches von 1500—3500 Gauß bis auf etwa $^1/_2$ Proz. durch die Formel

$$1000\,(W_1 - W_0) = a + b\,R^2 \tag{5}$$

dargestellt werden kann, wobei

$$a = 69{,}0\,, \quad b = 0{,}0000464\,.$$

$W_1 - W_0$ liegt bei den angegebenen Grenzen von $R$ zwischen 0,2 und 0,6.

Mit der so graduierten Wismutspirale wurde nun gemäß dem p. 495 Gesagten das Feld des benutzten Elektromagneten längs eines Radius $s$ der Äquatorebene abgesucht. Der Magnet, älteres Modell von Kaiser und Schmidt war uns für die Beobachtungen seitens des Hrn. Dr. Hauswaldt-Magdeburg, der auch in anderer Hinsicht die Arbeiten des Institutes freigebig

unterstützt, zur Verfügung gestellt worden. Die Form des Magneten ist die Plückersche mit hohen vertikalen Schenkeln auf kurzer Grundplatte; die Polschuhe tragen verschiebbare zylindrische Einsätze von ca. 3 cm Durchmesser die bei den Beobachtungen einander bis auf etwa 2 cm genähert waren. Das Feld hatte unter diesen Umständen natürlich nicht streng die Symmetrie eines Rotationskörpers um die Achse der Polschuhe; aber die Abweichung kommt bei der benutzten Beobachtungsmethode in keiner Weise störend zur Geltung. Da nur die in horizontaler radialer Richtung auf die Kristallpräparate ausgeübte Kraft gemessen werden sollte, war auch nichts anderes, als nur der Verlauf von $R^2$ in dieser Richtung zu bestimmen.

Hierzu war auf dem Tisch, über den die Polschuhe des Magneten emporragten, in der Höhe der Achse der Polschuhe

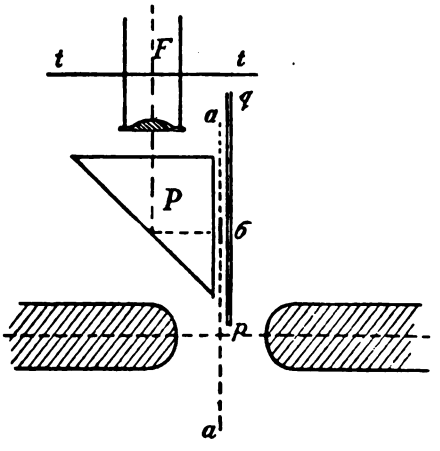



Fig. 1.

und etwa 2 mm von dem zu untersuchenden Radius $\overline{a\,a}$ entfernt, eine auf einem dünnen Milchglasstreifen aufgezeichnete Skala $p\,q$ (von einem Thermometer herrührend) angebracht, die Striche vertikal gestellt; die Ablesungen an der Skala wurden durch ein Prisma $P$ und durch ein in der Richtung $\overline{t\,t}$ parallel mit sich verschiebbares Fernröhrchen $F$ ermöglicht, deren von oben gesehene Anordnung aus der Fig. 1 zu erkennen ist.

Über diesem System war ein Paar horizontaler Schienen angebracht, längs deren sich der Halter der Wismutspirale derart verschieben ließ, daß die Spirale $\sigma$ längs des Radius $\bar{a}\,\bar{a}$ hinwanderte. Ihre Stellung wurde dann mit Hilfe des Fernrohres bestimmt und die Änderung ihres Widerstandes bei dem stets in derselben Weise auf 14,3—14,4 Amp. gehaltenen Strom gemessen. Nachdem dies für eine Reihe (von beiläufig 10) Punkten geschehen war, wurde die Spirale um 180° um die Vertikale gedreht und die Messung wiederholt. Das Mittel aus beiden Bestimmungsreihen, die übrigens nur wenig differierten, ist frei von der natürlichen Asymmetrie der Spirale. Aus dem Mittelwert folgt $\bar{R}^2$ nach Formel (5), und seine Abhängigkeit vom Radiusvektor wurde nun innerhalb eines Bereiches von ca. 5 mm durch eine Interpolationsformel

$$(6)\quad \bar{R}^2 = a + b(s - s_0) + c(s - s_0)^2 + d(s - s_0)^3 + e(s - s_0)^4$$

dargestellt, wobei $s - s_0$ den radial gemessenen Abstand von einem Punkt in der ungefähren Mitte des Beobachtungsbereiches bezeichnet und

$$(6)\quad \begin{cases} a = \phantom{+}7{,}53_4 \cdot 10^6, \\ b = -6{,}18_5 \cdot 10^6, \\ c = +1{,}59_4 \cdot 10^6, \\ d = +1{,}44_1 \cdot 10^6, \\ e = -4{,}36_9 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Die ausgezogene Kurve in Fig. 2 gibt eine Vorstellung von dem Verlauf von $\bar{R}^2$, wenn man die *nicht eingeklammerten* Ordinatenzahlen benutzt. Die Abszissen sind Zentimeter mit (willkürlichem) Anfangspunkt $s = s_0$ in der Mitte.

Bei allen diesen Messungen mit der Wismutspirale war es nötig, die Änderungen der Temperatur in Rechnung zu setzen, die den Widerstand bekanntlich stark beeinflußt; das Gesetz dieser Wirkung war durch eine eigene Beobachtungsreihe, bei der die Zimmertemperatur absichtlich stark geändert, der Strom im Elektromagneten aber konstant gehalten wurde, zuvor aufgeklärt.

Aus der gewonnenen Formel (6) ließ sich schließlich der

für die Wirkung auf den Kristall maßgebende Ausdruck $\partial \bar{R}^2/\partial s$ berechnen. Die punktierte Kurve in Fig. 2 gibt eine Anschauung von dem Verhalten dieser Größe, wobei die *eingeklammerten* Ordinatenzahlen maßgebend sind.

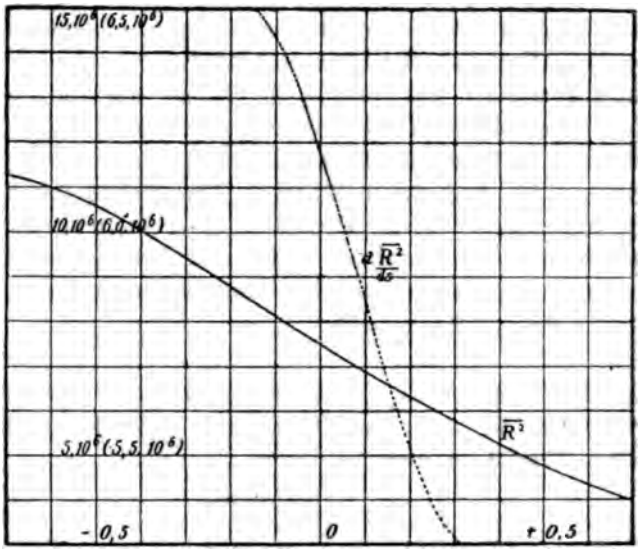



Fig. 2.

*Die Messung der auf die Präparate seitens des Magnetfeldes ausgeübten Kraft.* Die untersuchten Kristall- und Glasplatten besaßen 5,2—5,5 mm Durchmesser bei 1—1,5 mm Dicke. Sie sind von der Firma Voigt & Hochgesang hier angefertigt worden und es war der Arbeiter angewiesen, die Präparate mit Eisen nicht in Berührung zu bringen, sie auch nicht etwa (mit Pariser Rot!) zu polieren, sondern nur auf einem Quarzit- oder Smirgelschleifstein abzuschleifen.

Trotzdem wurde jedes gelieferte Präparat einer gründlichen Reinigung unterzogen; die in Wasser lösbaren wurden gewaschen, um die ganze Oberflächenschicht zu beseitigen; die anderen wurden mit verdünnter Salzsäure und dann mit destilliertem Wasser gekocht und abgespült. Die zwischen Filtrierpapier getrockneten Präparate wurden dann weiterhin nur mit einer Pinzette mit Elfenbeinspitzen berührt.

Um die Kraft zu messen, die die Präparate in dem Magnetfelde erfahren, wurden sie an einer kleinen Drehwage aufgehängt, deren oberer Befestigungspunkt in einem Torsionskopf lag; es waren Minuten ablesbar. Den an einem Quarzfaden aufgehängten *Balken* der Drehwage bildete ein Glasfaden von der in Fig. 3 angegebenen Gestalt; die Kristallplatte $\pi$ war mit einer Spur von Wachskitt an eine Schleife aus *dünnstem* Kokonfaden befestigt und konnte so leicht in die Häkchen des Balkens eingehängt werden. $\nu$ ist ein kleines gläsernes Gegengewicht, gleichfalls an einem Seidenfaden aufgehängt und auf dem Balken verschiebbar. Die Beobachtungen wurden in zwei um 180° um die Vertikale gegeneinander verdrehten Positionen der Platten $\pi$ gemacht.

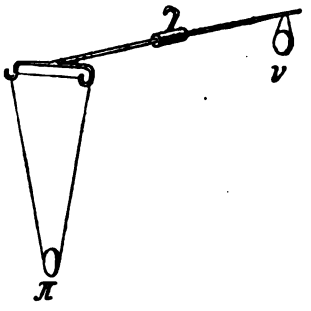


Fig. 3.

Kontrollbeobachtungen gaben die Gewähr, daß der Wachskitt keine Störungen ausübte, die 1—2′ überstiegen, und daß keine direkte Einwirkung des Magneten auf den Balken der Drehwage stattfand.

Das spezifische Drehungsmoment $D$ des Quarzfadens wurde nach dem Gaußschen Verfahren der Schwingungsdauern bestimmt, wobei zwei leichte Aluminiumgewichte $m$ sukzessive in zwei verschiedenen Abständen $l_1$ und $l_2$ von der Drehachse auf den Balken der Drehachse gehängt waren. Die Gewichte betrugen 0,3828 g, die Abstände 2,64 und 5,31 cm, die dabei beobachteten Perioden $\tau_1$ und $\tau_2$ waren 33,89 und 49,43 sec; hieraus findet sich gemäß der Formel

$$D = 8\,\pi^2\,m\,\frac{l_1^2 - l_2^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}$$

für $D$ der Wert

$$D = 0{,}495_6 \text{ cm g sec}.$$

Der Hebelarm $h$, an dem die Feldwirkung die Kristallplatte angriff, war wegen der etwas gerundeten Form der Aufhängungshäkchen (Fig. 3) nicht völlig konstant und wurde bei jeder Messung direkt bestimmt. Er betrug rund 6,1 cm.

Die Beobachtungen fanden in dem Glaskasten statt, der bei den Plückerschen Magneten die Polschuhe einschließt. Die erhebliche Größe dieses Raumes gab zu Luftströmungen Veranlassung, die anfänglich die Beobachtungen sehr störten, sich aber durch eine teilweise Ausfüllung des Raumes durch geeignete Papierschirme ziemlich unschädlich machen ließen.

Immerhin dürften die stattfindenden Abweichungen zwischen den Beobachtungen derselben Reihe in der Hauptsache noch auf der Wirkung dieser Störungen beruhen.

Der Glaskasten war oben durch eine nur aufgelegte Spiegelglasscheibe verschlossen, in der das Glasrohr befestigt war, welches den Torsionskopf trug; die ganze Drehwage war in dieser Weise horizontal verschiebbar und es gelang so ohne Schwierigkeit, in jedem einzelnen Falle die untersuchte Kristallplatte in die Äquatorialebene des Feldes und an eine bestimmte Stelle des Radiusvektor zu bringen. Wegen des Maximum- bzw. Minimumcharakters dieser Ebene und der benutzten Orientierungen der Kristallplatten haben übrigens kleine Fehler in der Lage der Platten, soweit nur der Radiusvektor $s$ genau den richtigen Wert hat, sehr geringen Einfluß; die Größe von $s$ ließ sich aber auf die p. 498 beschriebene Weise zuverlässig bestimmen, zumal durch Umkehren der Aufhängung nach p. 501 auch eine etwaige Umsymmetrie der Form oder Massenverteilung eliminiert wurde.

Da die Wirkung des Feldes auf den Kristall vom *Quadrat* der Feldstärke abhängt, so war das nach einfacher Unterbrechung des magnetisierenden Stromes zurückbleibende schwache Feld von kaum merklicher Wirkung. Immerhin wurde auch diese noch reduziert, indem die Entmagnetisierung durch wiederholtes Umkehren des Stromes bei allmählich abgeschwächter Intensität bewirkt wurde.

Die Ordnung der Beobachtungen war schließlich diese. Bei nicht erregtem Magneten wurde die Kristall- oder Glasplatte an eine bestimmte (von Fall zu Fall wesentlich konstante) Stelle der Äquatorebene des Feldes gebracht und die dieser Lage entsprechende Stellung des Torsionskopfes notiert; darauf wurde das Feld erregt und die Platte durch Drehung des Torsionskopfes an die alte Stelle zurückgeführt. Bei stark paramagnetischen Objekten gelang dies nur dadurch, daß das

Feld *allmählich* von Null auf die gewünschte Höhe gebracht und die Platte dabei andauernd in der Nähe der Ruhelage gehalten wurde. Es beruhte dies offenbar darauf, daß das Gleichgewicht dieser Körper an der betreffenden Stelle nur sehr geringe Stabilität hatte und die Platten bei merklichen Elongationen sich nach einer anderen Gleichgewichtslage zu bewegen suchten. War die Gleichgewichtslage ganz oder nahezu erreicht, so wurde durch wiederholtes Kommutieren des Magnetstromes festgestellt, daß eine Remanenzwirkung von merklicher Stärke im Kristall nicht auftrat.

Nach Ablesung des Torsionskopfes fand allmähliche Entmagnetisierung statt und daran anschließend erneute Einstellung des Präparates in der alten Position mit Ablesung am Torsionskopf. Diese Folge von Beobachtungen wurde bei jeder Substanz zwei- oder dreimal wiederholt, darauf die Platte um 180° um die Vertikale gedreht und wie zuvor verfahren.

Im folgenden ist bei jeder Substanz angegeben: die Masse $m$ des Präparates, seine Dichte[1]) $\delta$, sein Radius $r$, ferner die Abweichung $s - s_0$ des Mittelpunktes von der Stellung, auf die als Anfangspunkt sich die Interpolationsformel (6) bezog. Dann folgen unter $\alpha$ und $\beta$ die Drehungen am Torsionskopf bei Erregung und Aufhebung des Feldes je mit dem entsprechenden Hebelarm $h$ der Drehwage.

Für die Verwertung dieser Messungen ist Formel (4) heranzuziehen, in der $S_h$ durch $D\varphi_h/h$ zu ersetzen ist. Ferner kürzen wir die Magnetisierungszahlen $k_h - k_0$ relativ zur umgebenden Luft in $\varkappa_h$ ab und haben dann

$$D\varphi_h/h = \tfrac{1}{2} v \varkappa_h \frac{d R^2}{d s}, \quad \text{wobei } v\delta = m.$$

$\varkappa_h/\delta = \varkappa_h'$ stellt die auf die *Masse*neinheit, wie $\varkappa_h$ die auf die *Volumen*einheit bezogene Magnetisierungszahl dar; positive Werte bezeichnen Para-, negative Diamagnetismus.

1) Diese Dichten sind nicht extra beobachtet, sondern Tabellen zumeist den Landolt-Börnsteinschen) entnommen. Für die Anwendungen dürfte eine etwaige Ungenauigkeit von $\delta$ eine wesentliche Schwierigkeit nicht bieten.

**Einige Jenenser Gläser und Opal.**

Schweres Bariumsilikatkron O 211.

(Enthält neben rund 50 Proz. $SiO_2$ viel BaO, weniger ZnO und $K_2O$.)

$m = 0{,}0456_5$, $\delta = 3{,}21$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|---|
| | 37° 24′ | | 37° 12′ | |
| | 37 22 | | 37 17 | |
| $h = 6{,}12$ | 37 25 | $h = 6{,}13$ | 37 31 | |
| | 37 19 | | 37 36 | |
| | $\varphi_\alpha = 37°\,22'$ | | $\varphi_\beta = 37°\,24'$ | |

$x' = -3{,}74_1 \cdot 10^{-7}$, $x = -12{,}0 \cdot 10^{-7}$.

Kron mit hoher Dispersion O 381.

(Enthält neben rund 66 Proz. $SiO_2$ viel $Na_2O$ und BaO.)

$m = 0{,}0411_5$, $\delta = 2{,}70$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|---|
| | 35° 3′ | | 35° 32′ | |
| | 35 6 | | 34 45 | |
| $h = 6{,}12$ | 35 2 | $h = 6{,}12$ | 34 49 | |
| | 35 4 | | 35 16 | |
| | $\varphi_\alpha = 35°\,4'$ | | $\varphi_\beta = 35°\,5'$ | |

$x' = -3{,}86_4 \cdot 10^{-7}$, $x = -10{,}4 \cdot 10^{-7}$.

Baryt-Leichtflint O 543.

(Enthält bei rund 50 Proz. $SiO_2$ unter sich nahe gleiche Mengen von $K_2O$, ZnO, PbO, aber mehr BaO.)

$m = 0{,}0367_5$, $\delta = 3{,}11$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|---|
| | 32° 46′ | | 32° 35′ | |
| | 32 29 | | 32 17 | |
| $h = 6{,}13$ | 32 27 | $h = 6{,}13$ | 32 27 | |
| | 32 15 | | 32 24 | |
| | $\varphi_\alpha = 32°\,29'$ | | $\varphi_\beta = 32°\,26'$ | |

$x' = -4{,}02_3 \cdot 10^{-7}$, $x = -12{,}5 \cdot 10^{-7}$.

Schwerstes Barytkron O 2071.

(Der Gehalt an BaO überwiegt erheblich den an $SiO_2$, der rund 33 Proz. beträgt.)

$m = 0{,}0497_5$, $\delta = 3{,}54$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|---|
| | 39° 46′ | | 40° 2′ | |
| | 39 39 | | 39 5 | |
| $h = 6{,}15$ | 39 46 | $h = 6{,}15$ | 40 9 | |
| | 39 44 | | 39 39 | |
| | $\varphi_\alpha = 39°\,44'$ | | 40 8 | |
| | | | 39 20 | |
| | | | $\varphi_\beta = 39°\,44'$ | |

$x' = -3{,}65_1 \cdot 10^{-7}$, $x = -12{,}9 \cdot 10^{-7}$.

Schweres Flintglas O 198.

(Enthält nahezu dreimal soviel PbO als $SiO_2$.)

$m = 0{,}0600$, $\delta = 4{,}99$, $r = 0{,}274$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|---|
| | 30° 29′ | | 30° 37′ | |
| | 30 32 | | 30 27 | |
| $h = 6{,}12$ | 30 34 | $h = 6{,}12$ | 30 23 | |
| | 30 31 | | 30 31 | |
| | $\varphi_\alpha = 30°\,32'$ | | $\varphi_\beta = 30°\,30'$ | |

$x' = -2{,}32 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa = -11{,}6 \cdot 10^{-7}$.

Borsilikat-Kron O 144.

(Enthält neben rund 70 Proz. $SiO_2$ viel $K_2O$, weniger $B_2O_3$ und $Na_2O$.)

$m = 0{,}0684$, $\delta = 2{,}47$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|---|
| | 55° 50′ | | 55° 45′ | |
| | 55 42 | | 55 7 | |
| $h = 6{,}13$ | 55 42 | $h = 6{,}13$ | 55 39 | |
| | 55 30 | | 55 24 | |
| | $\varphi_\alpha = 55°\,41'$ | | $\varphi_\beta = 55°\,29'$ | |

$x' = -8{,}71 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa = -9{,}16 \cdot 10^{-7}$.

Obwohl nach Zusammensetzung sehr verschieden, haben die beobachteten Glassorten doch einander sehr naheliegende Magnetisierungszahlen $\varkappa$.

Opal.

$m = 0{,}0429$, $\delta = 2{,}1$, $r = 0{,}264$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|---|
| | 46° 10′ | | 45° 58′ | |
| | 46 15 | | 45 42 | |
| $h = 6{,}13$ | 46 15 | $h = 6{,}12$ | 45 51 | |
| | 45 22 | | 45 39 | |
| | $\varphi_\alpha = 46°\,16'$ | | $\varphi_\beta = 45°\,48'$ | |

$x' = -4{,}87 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa = -10{,}23 \cdot 10^{-7}$.

**Reguläre Kristalle.**

Steinsalz.

$m = 0{,}0626$, $\delta = 2{,}167$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|---|
| | 51° 52′ | | 51° 30′ | |
| $h = 6{,}13$ | 51 51 | $h = 6{,}13$ | 51 38 | |
| | 51 49 | | $\varphi_\beta = 51°\,34'$ | |
| | 51 39 | | | |
| | $\varphi_\alpha = 51°\,48'$ | | | |

$x' = -3{,}76 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa = -8{,}16 \cdot 10^{-7}$.

### Alaun.

$m = 0{,}0871$, $\delta = 1{,}75$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) |
|---|---|---|---|
| | 47° 23′ | | 47° 32′ |
| | 47 18 | | 47 0 |
| $h = 6{,}14$ | 47 13 | $h = 6{,}14$ | 47 20 |
| | 47 0 | | 47 10 |
| | $\varphi_\alpha = 47°\,14'$ | | $\varphi_\beta = 47°\,16'$ |

$x' = -5{,}79 \cdot 10^{-7}$, $x = -10{,}1_4 \cdot 10^{-7}$.

### Bleinitrat.

$m = 0{,}1055$, $\delta = 4{,}4$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) |
|---|---|---|---|
| | 57° 32′ | | 59° 0′ |
| | 57 35 | | 56 30 |
| $h = 6{,}12$ | 57 38 | $h = 6{,}12$ | 57 15 |
| | 57 31 | | 57 4 |
| | $\varphi_\alpha = 57°\,34'$ | | 56 59 |
| | | | 56 55 |
| | | | $\varphi_\beta = 56°\,57'$ |

$x' = -2{,}48 \cdot 10^{-7}$, $x = -10{,}9_3 \cdot 10^{-7}$.

### Flußspat (farblos, vom Brienzer See).

$m = 0{,}0453$, $\delta = 3{,}18$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) |
|---|---|---|---|
| | 62° 11′ | | 62° 9′ |
| | 62 21 | | 61 58 |
| $h = 6{,}11$ | 62 3 | $h = 6{,}10$ | 61 59 |
| | 62 6 | | 61 44 |
| | $\varphi_\alpha = 62°\,10'$ | | 62 10 |
| | | | 61 55 |
| | | | $\varphi_\beta = 61°\,59'$ |

$x' = -6{,}27 \cdot 10^{-7}$, $x = -20{,}0 \cdot 10^{-7}$.

### Bleiglanz.

$m = 0{,}1963$, $\delta = 7{,}50$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | $\alpha$) | | $\beta$) |
|---|---|---|---|
| | 150° 43′ | | 150° 40′ |
| $h = 6{,}12$ | 150 31 | $h = 6{,}11$ | 150 28 |
| | 150 23 | | $\varphi_\beta = 150°\,34'$ |
| | 150 23 | | |
| | $\varphi_\alpha = 150°\,30'$ | | |

$x' = -3{,}50 \cdot 10^{-7}$, $x = -26{,}3 \cdot 10^{-7}$.

Pyrit (aus Cornwallis).

$m = 0{,}1078$, $\delta = 5{,}05$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha$) | 159° 0′ | | $\beta$) | 156° 17′ |
| | | 159 2 | | | 156 17 |
| $h = 6{,}13$ | | 158 27 | $h = 6{,}13$ | | 156 17 |
| | | 158 25 | | | 156 33 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 158° 44′ | | $\varphi_\beta =$ | 156° 21′ |

$\varkappa' = +\ 6{,}66 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa = 33{,}6_5 \cdot 10^{-7}$.

Zinkblende (von Santander, ganz hellgelb gefärbt).

$m = 0{,}0735$, $\delta = 4{,}0$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha$) | 42° 22′ | | $\beta$) | 42° 24′ |
| | | 41 53 | | | 41 46 |
| $h = 6{,}13$ | | 42 33 | $h = 6{,}13$ | | 42 9 |
| | | 42 8 | | | 41 52 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 42° 14′ | | $\varphi_\beta =$ | 42° 8′ |

$\varkappa' = -\ 2{,}61 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa = -\ 10{,}4_5 \cdot 10^{-7}$.

**Magnetisch-einachsige Kristalle.**

**Die Hauptachse ist durch den Index 3 charakterisiert.**

Kalkspat.

$R \parallel$ der Achse.

$m = 0{,}0623_5$, $\delta = 2{,}714$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha$) | 55° 30′ | | $\beta$) | 55° 29′ |
| | | 55 25 | | | 55 27 |
| $h = 6{,}13$ | | 55 24 | $h = 6{,}13$ | | 55 27 |
| | | 55 31 | | | 55 28 |
| | | 55 35 | | | 55 28 |
| | | 55 22 | | | 55 32 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 55° 28′ | | $\varphi_\beta =$ | 55° 28,5′ |

$\varkappa_3' = -\ 4{,}05_5 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_3 = -\ 11{,}01 \cdot 10^{-7}$.

$R \perp$ der Achse.

$m = 0{,}0677_4$, $\delta = 2{,}714$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha$) | 54° 6′ | | $\beta$) | 54° 0′ |
| | | 53 41 | | | 53 54 |
| $h = 6{,}12$ | | 53 58 | $h = 6{,}12$ | | 54 3 |
| | | 53 46 | | | 54 2 |
| | | 54 0 | | | 53 55 |
| | | 53 52 | | | 54 0 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 53° 54′ | | $\varphi_\beta =$ | 53° 59′ |

$\varkappa_1' = -\ 3{,}63_7 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_1 = -\ 9{,}87 \cdot 10^{-7}$.

Hieraus

$$\varkappa_2 - \varkappa_1 = -\ 1{,}1_4 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 : \varkappa_2 = 0{,}89_7,$$

erstere Zahl (zufällig) in vollständiger Übereinstimmung mit dem Resultate Königs, letztere ziemlich nahe demjenigen Tyndalls.

Dolomit (farblos, von Traversella).

$R \parallel$ der Achse.

$m = 0{,}0550, \quad \delta = 2{,}90, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -\ 0{,}003$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 145° 30′ | | $\beta)$ | 144° 18′ |
| | | 145 30 | | | 144 23 |
| $h = 6{,}11$ | | 145 20 | $h = 6{,}11$ | | 144 32 |
| | | 145 50 | | | 144 45 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 145° 32,5′ | | $\varphi_\beta =$ | 144° 28,5′ |

$\varkappa_2' = +\ 12{,}0_5 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_2 = +\ 34{,}9_7 \cdot 10^{-7}.$

$R \perp$ der Achse.

$m = 0{,}0583, \quad \delta = 2{,}90, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -\ 0{,}003$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 100° 2′ | | $\beta)$ | 98° 50′ |
| | | 100 10 | | | 98 0 |
| $h = 6{,}11$ | | 99 46 | $h = 6{,}11$ | | 99 0 |
| | | 99 30 | | | 98 5 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 99° 52′ | | | 98 42 |
| | | | | | 98 27 |
| | | | | $\varphi_\beta =$ | 98° 31′ |

$\varkappa_1' = +\ 7{,}87_7 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 = +\ 22{,}5_6 \cdot 10^{-7}.$

Hieraus

$$\varkappa_2 - \varkappa_1 = +\ 12{,}3_9 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 : \varkappa_2 = 0{,}64_5.$$

Der starke Paramagnetismus des Dolomit steht in einem auffallenden Gegensatz zu dem Diamagnetismus des Kalkspat und kann vielleicht als bequemes Unterscheidungsmerkmal dienen.

Quarz.

$R \parallel$ der Achse.

$m = 0{,}0746, \quad \delta = 2{,}65, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -\ 0{,}003$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 76° 37′ | | $\beta)$ | 76° 34′ |
| | | 76 28 | | | 76 21 |
| $h = 6{,}15$ | | 76 28 | $h = 6{,}15$ | | 76 20 |
| | | 76 29 | | | 76 24 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 76° 30,5′ | | $\varphi_\beta =$ | 76° 25′ |

$\varkappa_2' = -\ 4{,}66 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_2 = -\ 12{,}3_5 \cdot 10^{-7}.$

$R \perp$ der Achse.

$m = 0{,}0717$, $\delta = 2{,}65$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}003$

| $\alpha$) | | $\beta$) | |
|---|---|---|---|
| | 72° 27′ | | 72° 34′ |
| | 72 35 | | 72 20 |
| $h = 6{,}13$ | 72 33 | $h = 6{,}12$ | 72 26 |
| | 72 36 | | 72 16 |
| $\varphi_\alpha$ | = 72° 33′ | $\varphi_\beta$ | = 72° 24′ |

$$\varkappa_1' = -4{,}61_4 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 = -12{,}2_3 \cdot 10^{-7}.$$

Hieraus

$$\varkappa_3 - \varkappa_1 = -0{,}12 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1/\varkappa_3 = 0{,}990.$$

Der gefundene Unterschied zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_3$ ist so klein, daß er durch die benutzte Methode nur unsicher bestimmbar ist.

Beryll (hellgrün vom Ural) [1]).

$R \parallel$ der Achse.

$m = 0{,}0653$, $\delta = 2{,}7$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

| $\alpha$) | | $\beta$) | | $\alpha$) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 56° 0′ | | 55° 5′ | | 54° 28′ |
| | 56 47 | | 55 32 | | 54 30 |
| $h = 6{,}14$ | 55 59 | $h = 6{,}13$ | 55 0 | $h = 6{,}18$ | 54 45 |
| | 56 52 | | 55 23 | | 54 18 |
| $\varphi_\alpha$ | = 56° 24,5′ | $\varphi_\beta$ | = 55° 15′ | | 53 48 |
| | | | | | 54 0 |
| | | | | $\varphi_\alpha$ | = 54° 18′ |

$$\varkappa_3' = +3{,}86 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_3 = +10{,}4_3 \cdot 10^{-7}.$$

$R \perp$ der Achse.

$m = 0{,}0642$, $\delta = 2{,}7$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

| $\alpha$) | | $\beta$) | | $\alpha$) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 116° 55′ | | 116° 19′ | | 115° 25′ |
| $h = 6{,}13$ | 117 5 | $h = 6{,}13$ | 116 45 | $h = 6{,}13$ | 115 55 |
| | 116 15 | | 116 15 | $\varphi_\alpha$ | = 115° 40′ |
| | 116 25 | | 116 40 | | |
| $\varphi_\alpha$ | = 116° 40′ | $\varphi_\beta$ | = 116° 30′ | | |

$$\varkappa_1' = +8{,}26_5 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 = +22{,}3 \cdot 10^{-7}.$$

Hieraus

$$\varkappa_1 - \varkappa_3 = 11{,}8_9 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_3/\varkappa_1 = 0{,}468.$$

Der große Unterschied zwischen den magnetischen Erregbarkeiten parallel und normal zur Achse ist sehr bemerkenswert.

---

1) Derselbe, der zu den Elastizitätsbeobachtungen von Voigt gedient hatte; vgl. Wied. Ann. 31. p. 485. 1887.

Rutil.

$R \parallel$ der Achse.

$m = 0{,}1014$, $\delta = 4{,}24$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}003$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 466° 17′ | | $\beta)$ | 464° 20′ |
| | | 466 25 | | | 465 10 |
| $h = 6{,}13$ | | 464 25 | $h = 6{,}12$ | | 463 10 |
| | | 464 30 | | | 463 30 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 465° 30′ | | $\varphi_\beta =$ | 464° 25′ |

$\varkappa_s' = +\,20{,}9 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_s = +\,88{,}9 \cdot 10^{-7}$.

$R \perp$ der Achse.

$m = 0{,}1020$, $\delta = 4{,}25$, $r = 0{,}275$, $s = s_0 = -0{,}003$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 439° 10′ | | $\beta)$ | 437° 25′ |
| | | 438 50 | | | 437 50 |
| $h = 6{,}13$ | | 439 40 | $h = 6{,}12$ | | 437 5 |
| | | 439 25 | | | 437 9 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 439° 16′ | | $\varphi_\beta =$ | 437° 22′ |

$\varkappa_1' = +\,19{,}6 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_1 = +\,83{,}3 \cdot 10^{-7}$.

Hieraus

$\varkappa_s - \varkappa_1 = +\,5{,}6 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_1 / \varkappa_s = 0{,}937$.

Die absoluten Werte der Magnetisierungszahlen sind bei diesem Material außerordentlich groß.

Turmalin (ganz leicht grünlich gefärbt, aus Brasilien).

$R \parallel$ der Achse.

$m = 0{,}0809$, $\delta = 3{,}10$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 132° 58′ | | $\beta)$ | 132° 30′ |
| $h = 6{,}13$ | | 132 30 | $h = 6.13$ | | 132 18 |
| | | 132 50 | | | $\varphi_\beta =$ 132° 24′ |
| | | 133 3 | | | |
| | $\varphi_\alpha =$ | 132° 50′ | | | |

$\varkappa_s' = +\,7{,}48 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_s = +\,23{,}2 \cdot 10^{-7}$.

$R \perp$ der Achse.

$m = 0{,}0793$, $\delta = 3{,}10$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 193° 23′ | | $\beta)$ | 193° 55′ |
| | | 194 50 | | | 193 55 |
| $h = 6{,}12$ | | 194 47 | $h = 6{,}12$ | | 193 8 |
| | | 195 45 | | | 193 8 |
| | | 194 35 | | | $\varphi_\beta =$ 193° 34′ |
| | | 194 15 | | | |
| | $\varphi_\alpha =$ | 194° 34′ | | | |

$\varkappa_1' = +\,11{,}18 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_1 = +\,34{,}7 \cdot 10^{-7}$.

Hieraus

$$\varkappa_1 - \varkappa_3 = 11{,}5 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_3/\varkappa_1 = 0{,}92_3.$$

Die Präparate ∥ und ⊥ zur Achse zeigten, obwohl demselben Kristall entnommen, einen etwas verschiedenen Farbenton; ersteres war mehr rötlich, letzteres mehr bläulich gefärbt.

Apatit (farblos, aus Tirol).

*R* ∥ der Achse.

$m = 0{,}0656, \quad \delta = 3{,}20, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -0{,}002$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\alpha$) 38° 7′ | | $\beta$) 38° 4′ |
| | 37 50 | | 37 57 |
| $h = 6{,}13$ | 37 51 | $h = 6{,}18$ | 38 1 |
| | 37 49 | | 38 7 |
| | $\varphi_\alpha = 37°\,54'$ | | $\varphi_\beta = 38°\,22'$ |

$\varkappa_3' = -2{,}64 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 = -8{,}45 \cdot 10^{-7}.$

*R* ⊥ der Achse.

$m = 0{,}0748, \quad \delta = 3{,}20, \quad r = 0{,}275, \quad s - s_0 = -0{,}002$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\alpha$) 43° 36′ | | $\beta$) 43° 13′ |
| | 43 16 | | 43 10 |
| $h = 6{,}13$ | 43 28 | $h = 6{,}13$ | 43 20 |
| | 43 22 | | 43 15 |
| | $\varphi_\alpha = 43°\,26'$ | | $\varphi_\beta = 43°\,15'$ |

$\varkappa_1' = -2{,}64 \cdot 10^{-7}, \quad \varkappa_1 = -8{,}45 \cdot 10^{-7}.$

Eine magnetische Verschiedenheit der Richtungen parallel und normal zur Hauptachse ist also bei Apatit innerhalb der erreichbaren Genauigkeit der Methode nicht nachweisbar.

Zirkon.

(Der braunrot gefärbte Kristall zeigte zahlreiche Sprünge, innerhalb deren vielleicht fremde Substanz eingeschlossen war; wenigstens entwickelten sich beim Kochen der Präparate mit Salzsäure aus den Spalten zahlreiche Gasblasen. Die benutzten Präparate, besonders das zweite, zeigten unter mehreren angefertigten diese Erscheinung noch am wenigsten und sind deshalb vielleicht am reinsten, immerhin sind die Resultate verdächtig. Die unreineren Präparate verhielten sich kräftig paramagnetisch. Die Zahlen sind wenig sicher).

$R \parallel$ der Achse.

$m = 0{,}1095$, $\delta = 4{,}6$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | $\alpha$) | $\beta$) |
|---|---|---|
| | 176° 10′ | 175° 3′ |
| | 176 20 | 175 30 |
| $h = 6{,}13$ | 176 20 | $h = 6{,}13$ 175 5 |
| | 176 39 | 176 6 |
| | $\varphi_\alpha = 176°\,22'$ | $\varphi_\beta = 175°\,26'$ |

$x_2' = +\,7{,}32 \cdot 10^{-7}$, $x_2 = +\,33{,}7 \cdot 10^{-7}$.

$R \perp$ der Achse.

$m = 0{,}1179$, $\delta = 4{,}6$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | $\alpha$) |
|---|---|
| | 44° 7′ |
| | 43 46 |
| $h = 6{,}12$ | 44 1 |
| | 44 0 |
| | $\varphi_\alpha = 43°\,59'$ |

$x_1' = -\,1{,}70 \cdot 10^{-7}$, $x_1 = -\,7{,}84 \cdot 10^{-7}$.

**Kristalle mit drei magnetischen Achsen.**

**Topas (farblos, aus Japan).**

$R \parallel$ der $a$-Achse.

$m = 0{,}0952$, $\delta = 3{,}5$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | $\alpha$) | $\beta$) | $\alpha$) |
|---|---|---|---|
| | 85° 45′ | 85° 30′ | 85° 40′ |
| | 85 26 | 85 7 | 85 12 |
| $h = 6{,}10$ | 85 58 | $h = 6{,}11$ 85 16 | $h = 6{,}11$ 85 34 |
| | 85 40 | 84 49 | 85 20 |
| | 85 34 | 85 16 | $\varphi_\alpha = 85°\,26'$ |
| | 85 31 | 85 12 | |
| | 85 32 | $\varphi_\beta = 85°\,12'$ | |
| | 85 25 | | |
| | $\varphi_\alpha = 85°\,38'$ | | |

$x_1' = -\,4{,}10 \cdot 10^{-7}$, $x_2 = -\,14{,}3_6 \cdot 10^{-7}$.

$R \parallel$ der $b$-Achse.

$m = 0{,}0905$, $\delta = 8{,}5$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | $\alpha$) | $\beta$) | $\alpha$) | $\beta$) |
|---|---|---|---|---|
| | 83°16′ | 83° 0′ | 83°33′ | 82°59′ |
| | 83 4 | 82 48 | 83 26 | 83 1 |
| $h = 6{,}10$ | 82 46 | $h = 6{,}11$ 82 45 | $h = 6{,}11$ 83 25 | $h = 6{,}11$ 82 43 |
| | 82 49 | 82 44 | 83 22 | 82 35 |
| | $\varphi_\alpha = 82°\,59'$ | 82 45 | $\varphi_\alpha = 83°\,27'$ | 82 53 |
| | | 82 45 | | 82 48 |
| | | $\varphi_\beta = 82°\,48'$ | | $\varphi_\beta = 82°\,50'$ |

$x_2' = -\,4{,}20 \cdot 10^{-7}$, $x_2 = -\,14{,}7_1 \cdot 10^{-7}$.

$R \parallel$ der $c$-Achse.

$m = 0{,}0871$, $\delta = 3{,}5$, $r = 0{,}275$ $s - s_0 = -0{,}002$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 80° 20′ | | $\beta)$ | 80° 40′ | | $\alpha)$ | 79° 42′ |
| | | 80 4 | | | 80 7 | | | 79 43 |
| $h = 6{,}10$ | | 80 5 | $h = 6{,}11$ | | 80 28 | $h = 6{,}11$ | | 79 50 |
| | | 80 3 | | | 80 8 | | | 79 3 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 80° 8′ | | $\varphi_\beta =$ | 80° 21′ | | $\varphi_\alpha =$ | 79° 44′ |

$\varkappa_2' = -4{,}20 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_3 = -14{,}7_0 \cdot 10^{-7}$.

Die Unterschiede der drei $\varkappa_h$ sind kaum merklich.

Coelestin (fast farblos).

$R \parallel$ der $a$-Achse.

$m = 0{,}0991$, $\delta = 3{,}96$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -3{,}002$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 74° 10′ | | $\beta)$ | 74° 40′ |
| | | 74 17 | | | 74 25 |
| $h = 6{,}14$ | | 74 15 | $h = 6{,}14$ | | 74 23 |
| | | 74 18 | | | 74 22 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 74° 15′ | | $\varphi_\beta =$ | 74° 30′ |

$\varkappa_2' = -3{,}42 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_3 = -13{,}5_3 \cdot 10^{-7}$.

$R \parallel$ der $b$-Achse.

$m = 0{,}0997$, $\delta = 3{,}96$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 68° 46′ | | $\beta)$ | 68° 59′ |
| | | 68 43 | | | 69 2 |
| $h = 6{,}15$ | | 68 45 | $h = 6{,}15$ | | 68 54 |
| | | 69 2 | | | 69 11 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 68° 49′ | | $\varphi_\beta =$ | 69° 1′ |

$\varkappa_2' = -3{,}14 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_2 = -12{,}4_5 \cdot 10^{-7}$.

$R \parallel$ der $c$-Achse.

$m = 0{,}1035$, $\delta = 3{,}96$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}002$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | 81° 5′ | | $\beta)$ | 81° 21′ |
| | | 81 9 | | | 81 21 |
| $h = 6{,}13$ | | 81 9 | $h = 6{,}13$ | | 81 28 |
| | | 81 21 | | | 81 27 |
| | $\varphi_\alpha =$ | 81° 11′ | | $\varphi_\beta =$ | 81° 24′ |

$\varkappa_3' = -3{,}59 \cdot 10^{-7}$, $\varkappa_3 = -14{,}2_1 \cdot 10^{-7}$.

Auch hier sind die Unterschiede zwischen den drei Hauptmagnetisierungszahlen ziemlich klein.

Aragonit (aus Böhmen, ganz hellgelb).

$R \parallel$ der $a$-Achse.

$m = 0{,}0807$, $\delta = 2{,}936$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | $69^\circ\,36'$ | |
| | | $69\;\;0$ | |
| $h = 6{,}13$ | | $69\;21$ | |
| | | $69\;\;9$ | |
| | $\varphi_\alpha =$ | $69^\circ\,17'$ | |
| | $\beta)$ | $69^\circ\,20'$ | |
| | | $69\;20$ | |
| $h = 6{,}13$ | | $69\;20$ | |
| | | $69\;21$ | |
| | $\varphi_\beta =$ | $69^\circ\,20'$ | |

$x_1' = -3{,}92 \cdot 10^{-7}$, $x_1 = -11{,}5_0 \cdot 10^{-7}$.

$R \parallel$ der $b$-Achse.

$m = 0{,}0788$, $\delta = 2{,}936$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | $67^\circ\;0'$ | |
| | | $67\;\;8$ | |
| $h = 6{,}14$ | | $67\;20$ | |
| | | $66\;52$ | |
| | $\varphi_\alpha =$ | $67^\circ\;4'$ | |
| | $\beta)$ | $67^\circ\,15'$ | |
| | | $66\;59$ | |
| $h = 6{,}16$ | | $67\;32$ | |
| | | $66\;48$ | |
| | $\varphi_\beta =$ | $67^\circ\;7'$ | |

$x_2' = -3{,}87 \cdot 10^{-7}$, $x_2 = -11{,}3_6 \cdot 10^{-7}$.

$R \parallel$ der $c$-Achse.

$m = 0{,}0537$, $\delta = 2{,}96$, $r = 0{,}275$, $s - s_0 = -0{,}003$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\alpha)$ | $52^\circ\,13'$ | |
| | | $52\;16$ | |
| $h = 6{,}12$ | | $52\;21$ | |
| | | $52\;\;5$ | |
| | $\varphi_\alpha =$ | $52^\circ\,14'$ | |
| | $\beta)$ | $52^\circ\,12'$ | |
| | | $52\;\;7$ | |
| $h = 6{,}12$ | | $52\;10$ | |
| | | $52\;\;8$ | |
| | $\varphi_\beta =$ | $52^\circ\;\;8'$ | |

$x_3' = -4{,}44 \cdot 10^{-7}$, $x_3 = -18{,}0_4 \cdot 10^{-7}$.

Der dritte Wert $x$ weicht von den beiden vorhergehenden sehr merklich ab.

Göttingen, im März 1907.

(Eingegangen 30. September 1907.)

## 6. *Über Absorption in lumineszierenden Gasen; von A. Pflüger.*

Die folgende Untersuchung soll einen Beitrag liefern zu der Frage, ob für Gase, die unter dem Einfluß elektrischer Entladungen leuchten, das Kirchhoffsche Gesetz wenigstens qualitativ gilt, d. h. ob sie in elektrisch erregtem (ionisiertem) Zustande diejenigen Strahlen absorbieren, die sie emittieren. Dabei bleibt die weitere Frage, ob diese Art der Strahlung als Temperaturstrahlung aufgefaßt werden kann, d. h. ob das Kirchhoffsche Gesetz auch quantitativ gilt, vollständig offen.

An experimentellem Material liegen zunächst vor die zahlreichen Beobachtungen[1]) über Selbstumkehr in Geisslerröhren, speziell für Wasserstoff. Diese Umkehr läßt sich leicht beobachten, wenn man durch eine mit Wasserstoff unter einigen Zentimetern Druck gefüllte Kapillarröhre die Entladungen Leydener Flaschen hindurchgehen läßt, und in Längsdurchsicht beobachtet. Die Linien werden dann verbreitert, und die Selbstumkehr tritt insbesondere bei $H_\alpha$ und $H_\beta$ deutlich hervor.

### Versuche bei niedrigem Druck.

Solche Versuche hat nur Cantor[2]), allerdings mit unzureichenden Hilfsmitteln angestellt. Er läßt das Licht einer Bogenlampe durch ein langes evakuiertes Glasrohr gehen und beobachtet mittels eines Vierordtschen Spektralphotometers, ob das Licht eine Schwächung erleidet, wenn die Röhre durch die Entladungen eines Induktoriums zum Leuchten gebracht wird. Auf die Fehler dieser Anordnung hat schon Pringsheim[3]) aufmerksam gemacht. Zunächst ist die Entladung des Induktoriums intermittierend, und das Gas befindet sich darum nur während eines kleinen Bruchteiles der Beobachtungszeit

1) Literaturangabe in Kaysers Handbuch der Spektroskopie 2. p. 184; vgl. auch A. Hagenbach u. H. Konen, Atlas, Jena 1905.

2) M. Cantor, Ann. d. Phys. 1. p. 462. 1900.

3) E. Pringsheim, Ann. d. Phys. 2. p. 199. 1900.

in demjenigen Zustande, in dem es emittiert und folglich Absorption zu erwarten ist. Während der übrigen Zeit wird das Licht der Lampe nicht absorbiert. Ferner sind die Spektrallinien des leuchtenden Gases sehr homogen, wenigstens bei niedrigen Drucken. Wollen wir für eine solche Linie Absorption nachweisen, so muß das Licht der benutzten Lichtquelle von nahezu gleicher Homogenität sein. Das läßt sich aber selbst mit engem Spalt und starker Dispersion des verwendeten Spektralapparates bei Benutzung des kontinuierlichen Spektrums der Bogenlampe nur sehr unvollkommen erreichen. Beide Fehlerquellen bewirken, daß die Absorption, wenn sie vorhanden ist, sehr viel kleiner erscheint, als sie in Wirklichkeit ist. Die Größe dieses Bruchteiles läßt sich nach den Versuchen nicht schätzen. Wenn Cantor also keine Absorption findet, so ist dies Resultat selbst als negatives nicht brauchbar, da es keine Schätzung der unteren Grenze der den Beobachtungen überhaupt zugänglichen Absorption erlaubt.

Der Versuch läßt sich indessen mit leichter Mühe exakt gestalten. Man wählt als „Lichtquelle" ein zweites genau gleiches Geisslerrohr, mit demselben Gase unter gleichem Druck gefüllt, und von demselben Induktorium in Serienschaltung mit dem Versuchsrohr (das wir der Kürze wegen „Absorptionsrohr" nennen) betrieben. Dann stimmt das Licht der Lichtquelle für jeden noch so engen Spektralausschnitt in seiner Zusammensetzung genau mit demjenigen überein, das vom Absorptionsrohr emittiert, also absorbiert werden soll. Ferner leuchtet die Lichtquelle nur in denselben Zeitmomenten wie das Absorptionsrohr, und selbst eine Korrektur für die Zeit, die das Licht braucht, um von dem einen Rohr zum andern zu gelangen, ist bei den langsamen Schwingungen des Induktoriums zu vernachlässigen.

Es wurde darum folgende Versuchsanordnung gewählt. *L* und *A* sind zwei genau gleiche Glasrohre von 1 m Länge, 4 cm lichter Weite, mit ringförmigen Elektroden, durch Spiegelglasplatten verschlossen und durch Rohrleitungen untereinander und mit der Luftpumpe verbunden. Beide Röhren können gleichzeitig mit einem beliebigen Gas gefüllt, bis zu demselben Druck ausgepumpt und gegeneinander abgesperrt werden. Das Absorptionsrohr *A* ist verschiebbar, und läßt sich mittels

eines Anschlages stets in dieselbe Lage zurückbringen. Die Lichtquelle $L$ liegt fest. Die Linse $l_1$ sendet das Licht von $L$ durch $A$ hindurch, die Linse $l_2$ konzentriert das Licht von $L$ und $A$ auf den Spalt $s$ eines Lummer-Brodhunschen Spektralphotometers. Als Vergleichslichtquelle vor dem Spalt des zweiten Collimatorrohres $C_2$ dieses Apparates dient eine Glühlampe, oder eine dritte von demselben Induktorium betriebene Röhre, oder das von $L$ seitlich ausgestrahlte und durch eine geeignete Spiegelanordnung nach dort gelenkte Licht.

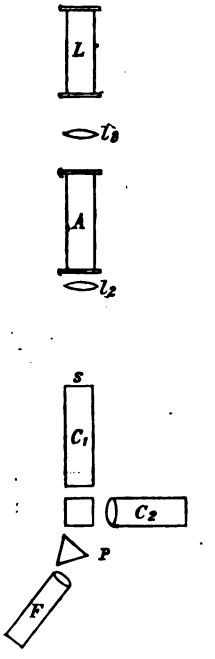


Fig. 1.

Man mißt nun für eine beliebige Spektralpartie, oder für eine einzelne Linie, oder für das gesamte Spektrum (wobei das Prisma des Photometers entfernt wird):

1. die Intensität $J_L$ von $L$, während $A$ nicht leuchtet, aber an seinem Platze verbleibt;

2. die Intensität $J_A$ von $A$ allein, während $L$ durch einen Schirm abgeblendet wird;

3. die Intensität $J_{LA}$ beider Röhren zusammen.

Wenn Absorption in $A$ stattfindet, muß

$$J_{AL} < \text{ als } J_L + J_A \text{ sein.}$$

Über die Technik der Messungen nur einige Bemerkungen. Es ist offenbar günstig, wenn $J_A$ nicht zu sehr von $J_L$ verschieden ist. Durch geeignete Stellung der Linsen und die Wahl ihrer Brennweite kann man diese Bedingung annähernd erfüllen. Zweckmäßig ist es, die Brennweite von $l_2$ größer zu wählen als die Länge von $A$, so daß $A$ sich in dem Raume zwischen der Linse und ihrem Brennpunkt aufbauen läßt, und somit die nach $l_2$ entsendeten Strahlen zerstreut werden, während $l_1$ Strahlen von $L$ sammelt und durch $l_2$ auf dem Spalt des Photometers konzentriert. Durch Verschieben der Linsen und geeignete Entfernung der Röhren voneinander kann man dann empirisch die günstigste Stellung ausprobieren.

Bei geringen Strahlungsintensitäten muß das Milchglas,

mit dem man gewöhnlich zur Erzielung eines gleichmäßigen Gesichtsfeldes den Spalt des Photometers bedeckt, entfernt werden, da es zu lichtschwächend wirkt. Die Linsen müssen darum auch den Objektiven des Photometers angepaßt sein, und die Justierung ist sehr mühsam.

Die Röhren wurden ausgepumpt, bis das gesamte Innere möglichst gleichmäßig und möglichst hell leuchtete (Druck von der Größenordnung 1 mm). Bei Verwendung eines rotierenden Quecksilberunterbrechers und nicht zu starken Strömen ist die Strahlung für längere Zeit genügend konstant, um eine einwandfreie Messung unter Benutzung einer Glühlampe als Vergleichslichtquelle zu gestatten. Bei starken Strömen zuckt das Licht. Man kann sich dann helfen, indem man eine dritte genau gleiche Röhre als Vergleichslichtquelle nimmt. Wenn sie mit demselben Induktorium in Serienschaltung mit den beiden anderen Röhren betrieben wird, zuckt sie in demselben Tempo, und macht Messungen bis zu einer höheren Grenze möglich, ohne daß das Gesichtsfeld in störender Weise flimmert. Auch das seitlich von $L$ ausgestrahlte Licht kann, wie oben erwähnt, durch eine geeignete Spiegelanordnung dem Vergleichsspalt zugeführt und in gleicher Weise benutzt werden. Allerdings sind die Messungen ungenauer, da man bei einer periodisch verlöschenden Lichtquelle offenbar keinen rotierenden Sektor zur Abschwächung des Vergleichslichtes anwenden darf, sondern nach der fehlerhaften Vierordtschen Methode mit Verstellung des Vergleichsspaltes arbeiten muß. Man kann diese Methode darum nur benutzen für Messungen am Gesamtspektrum, oder für einzelne Linien unter selbstverständlichen Bedingungen, die wir nicht zu erörtern brauchen.

Wenn während der Messung von $J_L$ die Röhre $A$ stromlos war, wurde eine andere genau gleiche Röhre und eventuell ein Jodcadmiumwiderstand an ihre Stelle in den Stromkreis geschaltet, damit die Intensität von $L$ (und eventuell der Vergleichsröhre) sich nicht ändere. Um dies zu kontrollieren, wird $J_L$ bei leuchtendem und nichtleuchtendem $A$ gemessen, wobei man das Licht von $L$ entweder durch eine Spiegelanordnung zum Spalt $s$ leitet und $A$ abblendet oder $A$ zur Seite schiebt. Weitere Kontrollmessungen betrafen die Reflexion des von $A$ nach hinten entsandten Lichtes an den Verschluß-

platten von $L$, und eine Reihe bei photometrischen Messungen selbstverständlicher Punkte.

Die Genauigkeit des Resultates schwankte je nach den besonderen Umständen zwischen 1 und 3 Proz.

Untersucht wurden Luft und Wasserstoff. Letzterer gibt in weiten Röhren das bekannte, sehr linienreiche Spektrum, in welchem nur $H_\alpha$ stark genug war, um eine gesonderte Messung zu erlauben. Als Verunreinigung treten stets nach einiger Zeit die Banden des Kohlenoxyds auf, die gleichfalls zur Messung herangezogen wurden.

Gemessen wurde:

1. Die Gesamtstrahlung, wobei zur Erzielung gleicher Färbung der Felder eine dritte Röhre oder $L$ selbst als Vergleichslichtquelle diente.

2. Einzelne Partien des Spektrums mittels eingeschalteter Farbfilter, oder bei weit gestelltem Spalt.

3. Einzelne Linien oder Liniengruppen.

In keinem Falle wurde eine Verschiedenheit zwischen $J_{AL}$ und $J_A + J_L$ konstatiert, welche die Grenzen der Versuchsfehler überschritten hätte. Wir gewinnen somit das Resultat:

*Die Absorption einer 1 m langen Schicht leuchtenden Wasserstoffs und leuchtender Luft bei ca. 1 mm Druck ist bei den stärksten beobachteten Leuchtintensitäten kleiner als die zwischen 1 und 3 Proz. schwankenden Versuchsfehler.*

### Versuche bei höherem Druck.

Die Bedingungen der Selbstumkehr der Wasserstofflinien sind von Schumann[1]) ausführlich beschrieben worden. Der Versuch gelingt leicht in folgender Form. Man fülle eine Kapillarröhre, wie Fig. 2, mit Wasserstoff und pumpe zunächst bis ca. 1 mm aus. Dann lasse man die Entladungen eines Induktoriums mit parallel geschalteter Leidener Batterie hindurchgehen und beobachte in Längsdurchsicht mittels eines Spektroskops, wobei man von der zum Punkt verkürzten Kapillaren ein Bild auf

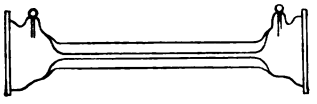


Fig. 2.

1) V. Schumann, Astronomy and Astrophysics **12**. p. 159. 1893.

den Spalt wirft. Die charakteristischen Serienlinien erscheinen scharf auf dunklem Grund. Nun öffne man den Hahn des *H*-Entwickelungsapparates und lasse den Druck langsam ansteigen. Die Linien verbreitern sich, die Entladung wird hellglänzend und bei einigen Zentimetern Quecksilbersäule beobachtet man deutlich und scharf die Selbstumkehr bei $H_\alpha$ und etwas weniger scharf bei $H_\beta$. Mit wachsendem Druck wird die Erscheinung immer ausgeprägter, bis schließlich die Entladungen nicht mehr durch das Rohr hindurchzugehen vermögen. Um die Kapillare und die Kittung der Verschlußplatten vor der entwickelten Wärme zu schützen, tauche man die Röhre in ein Wassergefäß mit Beobachtungsfenster, und isoliere die Elektroden von dem Wasser durch aufgestülpte Gummischläuche.

Daß diese Selbstumkehr eine Absorptionserscheinung ist, daß mithin der Wasserstoff im leuchtenden Zustand die Fähigkeit zu absorbieren erhält, steht wohl außer Zweifel. Immerhin sind folgende Kontrollexperimente von Interesse.

Zunächst betrachten wir die Röhre in Querdurchsicht, indem ein Bild der Kapillaren auf den Spalt des Spektroskops entworfen wird. Die Linien erscheinen dann weniger verbreitert und die Selbstumkehr ist unter Verwendung eines Prismas, also bei geringer Dispersion, nicht mehr zu bemerken. Der Versuch beweist zunächst, daß große Schichtdicken nötig sind, um die Absorption bei geringer Dispersion des Spektralapparates deutlich hervortreten zu lassen. Zweitens wird man auf die Erscheinung dieselbe Schlußweise anwenden müssen, wie auf den bekannten Selbstumkehrversuch mit Bogenlampe und Natriumflamme: es müssen längs der Kapillaren Ungleichheiten der Emissionsfähigkeit (wir sagen nicht der Temperatur) vorhanden sein, um Selbstumkehr zu bewirken. Wir können darum einen dem eben genannten analogen Versuch anstellen. Wir nehmen eine Röhre wie Fig. 3. *C* ist ein Kapillarrohr von ca. $^3/_4$ cm Länge, 1 mm lichter Weite, *R* ein weiteres Rohr, 8 cm lang, 9 mm lichte Weite. *a*, *b*, *c* sind Elektroden. Wir füllen das Rohr mit Wasserstoff von einigen Zentimetern

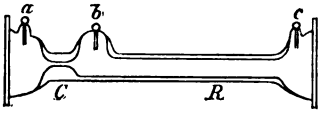


Fig. 3.

Druck, entwerfen mit einer Linse ein Bild des zum Punkt verkürzten $C$ auf den Spalt des Spektroskops, und verfahren wie folgt:

1. Wir lassen die Kondensatorentladung nur durch $a$—$b$, d. h. durch die Kapillare $C$ gehen. Das schmale, bandförmige Spektrum zeigt dann keine Selbstumkehr in $H_\alpha$ oder $H_\beta$, da die Kapillare und damit die absorbierende Schicht zu kurz ist.

2. Wir schicken die Entladung nur durch $b$—$c$, d. h. nur durch das weitere Rohr $R$. Die Linse sammelt Strahlen von $R$ zu einem unscharfen Fleck auf dem ganzen Spalt des Spektroskops, und es entsteht ein Spektrum mit nur schwach verbreiterten Linien, von erheblich geringerer Intensität wie unter 1., ohne Selbstumkehr.

3. Wir lassen die Entladung durch $a$—$c$, d. h. durch $C$ und $R$ hintereinander gehen. Wir sehen dann die Linie $H_\alpha$ wie in Fig. 4. $R_1$ ist die schwach verbreiterte Linie, herrührend von $R$. $C_1$ ist die stark verbreiterte sehr helle Linie, herrührend von $C$, die nunmehr deutlich umgekehrt erscheint.

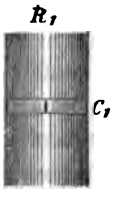


Fig. 4.

Hier spielt also $C$ die Rolle der Bogenlampe, $R$ die Rolle der Natriumflamme, und aus dem Versuch geht hervor:

daß die Erscheinung in der Tat durch Absorption in $R$ hervorgerufen wird;

daß, wie aus 1. folgt, Wasserstoff die $H_\alpha$-Linie nur dann absorbiert, wenn er leuchtet, wenn er sich also in ionisiertem Zustande befindet.

Für $H_\beta$ ließ sich die ohnehin nicht sehr starke Erscheinung nicht beobachten.

Es folgt aber selbstverständlich nicht, daß wir es mit Temperaturstrahlung, und demzufolge mit Temperaturunterschieden in $C$ und $R$ als Ursache zu tun hätten. Denn der Schluß, den man beim Bogenlampen–Natriumflamme-Versuch gewöhnlich macht, daß nämlich zur Erzeugung von Selbstumkehr verschiedene Temperatur nötig sei, läßt sich nicht umkehren, und streng genommen auf die Natriumflamme ebensowenig anwenden wie hier. Es genügt, daß die Na-Flamme die $D$-Linien absorbiert, und schwächer emittiert, ohne daß man die Strahlung der Flamme als Temperaturstrahlung aufzufassen braucht.

Es sei bemerkt, daß der Versuch nicht ohne weiteres gelingt. *C* muß so kurz sein, daß es keine Selbstumkehr zeigt, und die Stromintensität so gering, daß die Entladung in *R* nicht von vielen helleuchtenden Streifen durchsetzt ist, weil sonst auch *R* allein Selbstumkehr zeigt. Man gelangt erst nach einigem Probieren mit den Dimensionen der Röhre und der Art der Entladung zum Ziel. Die Erscheinung ist aber von mehreren Beobachtern deutlich konstatiert worden.

### Schlußfolgerungen.

Wenn man die einfache Tatsache der Selbstumkehr nicht als beweiskräftig ansehen will, so zeigt doch unser letzter Versuch zur Evidenz, daß Wasserstoff (und damit auch wohl andere Gase) im sogenannten „ionisierten" Zustande und *nur dann* die Fähigkeit erlangt, gewisse Strahlen, die er emittiert, zu absorbieren. Wenn dies so ist, dann dürfen wir im Rahmen heutiger Anschauungen folgende Schlüsse ziehen: wir nehmen an, daß Emissions- und Absorptionsfähigkeit gleiche Ursachen haben, insofern sie beruhen auf der Schwingungsfähigkeit gewisser molekularer Gebilde, etwa der Elektronen. Nun haben wir durch Experiment bewiesen, daß Absorptionsfähigkeit im gewöhnlichen Zustande des Gases nicht, wohl aber im „ionisierten" Zustande besteht. Oder, in der Bildersprache moderner Theorien zu reden: die Elektronen besitzen nur im isolierten Ion, nicht im Molekularverbande die erforderliche Schwingungsfähigkeit. (Wem dieser Schluß zu weit geht, der möge sagen, die Absorptionsfähigkeit sei geknüpft an eine Störung des molekularen Gleichgewichtszustandes.) Nun beruht nach unserer Auffassung die Emissionsfähigkeit auf derselben Ursache. Also gelangen wir auf diesem durch Experimente gestützten Wege zu den Anschauungen moderner Theorien, die die *isolierten* Ionen als Erzeuger des Leuchtens betrachten, ihnen aber diese Fähigkeit innerhalb des Molekularverbandes absprechen. Zu diesem Schlusse können wir nicht gelangen, wenn wir nur von der Tatsache der Emission ausgehen. Denn wir dürfen offenbar nur sagen, es sei *bisher kein Mittel gefunden*, die hier betrachteten Gase zur Luminescenz zu bringen, ohne daß gleichzeitig Ionisation eintritt.

Wenn nun sehr verdünnte Gase keine solchen Absorptionserscheinungen zeigen, so bedeutet dies nach unserer Auffassung nur, daß sie unterhalb der Beobachtungsgrenze liegen. In der Tat ist leicht einzusehen, daß mit wachsender Stromdichte die Ionisierung, d. h. die Zahl der schwingungsfähigen Gebilde und damit die Emission und Absorption wachsen muß (wobei natürlich noch andere Faktoren, wie z. B. die Amplitude der Elektronenschwingungen usw. mitsprechen können). Erst bei großen Stromdichten, wie wir sie in engen Röhren und bei hohem Druck und dadurch bedingter hoher Entladespannung des Kondensators erzeugen können, tritt das Absorptionsphänomen deutlich genug in den Bereich der Beobachtung. Ob sämtliche Spektrallinien es zeigen, müßte durch Untersuchung auf Selbstumkehr mit feinen Hilfsmitteln (große auflösende Kraft der Instrumente) festgestellt werden.

Es wäre nun sehr interessant, das Verhältnis der Emission zur Absorption zu untersuchen, ob sie ihr proportional wächst (dann käme es nur auf die Zahl der Ionen an) usw. Aber diese Versuche auszuführen, bietet sehr große Schwierigkeiten, da bei der Inkonstanz des Entladungslichtes bei höheren Gasdrucken photometrische Messungen unmöglich sind. Vielleicht könnten Versuche mit trägen aber hochempfindlichen Thermosäulen, oder mit einem anderen Apparat, der auf Mittelwerte der Strahlung reagiert, zum Ziele führen.

Endlich sei noch eines Einwandes gedacht, den man gegen den Versuch 1 auf p. 521 machen könnte. Um den Versuch ganz exakt auszuführen, hätten wir das Gas in Röhre $R$ durch äußere Wärmezufuhr auf denselben Druck und dieselbe Temperatur bringen müssen, wie im leuchtenden Zustande. Dieser Einwand ist aber nicht berechtigt. Denn wenn wir hier unter „Temperatur" des Gases diejenige jedenfalls sehr niedrige Temperatur verstehen wollen, die ein in die Röhre eingeschmolzenes Thermoelement zeigen würde, so wäre der Versuch unnötig, da es genügend bekannt ist, daß Gase selbst bei sehr hohen Temperaturen keine Emission und Absorption von der Art hervorbringen, wie wir sie durch elektrische Entladungen erzeugen. Wenn wir aber annehmen, daß diese Art der Temperaturmessung nicht den richtigen, sondern einen viel zu geringen Wert ergebe, so ist der Einwand berechtigt. Die

experimentelle Prüfung würde dann aber auf die sattsam bekannten Schwierigkeiten stoßen, die sich den Versuchen, Luminescenz durch bloße Temperatursteigerung hervorzurufen, entgegenstellen. Und selbst wenn es gelänge, diese Schwierigkeiten zu überwinden, würde man bei diesen hohen Temperaturen wohl zweifellos Ionisation als Begleiterscheinung finden. Man vergleiche übrigens zu dieser Frage das im folgenden Abschnitt beschriebene Experiment.

### Versuche mit dem Quecksilberlichtbogen.

Nach Abschluß der vorstehend beschriebenen Versuche erschien eine interessante Arbeit von Küch und Retschinsky[1]), die für den Quecksilberlichtbogen im Vakuum deutlich Absorption derjenigen Strahlen nachweist, die er emittiert, und wahrscheinlich macht, daß seine Strahlung in mancher Beziehung ähnliche Gesetze befolgt, wie die Temperaturstrahlung. Um diese Untersuchung mit feineren photometrischen Hilfsmitteln weiter zu verfolgen, wurden mir die benutzten Quarzröhren von der Firma W. C. Heraeus in Hanau freundlichst leihweise überlassen. Ich spreche auch an dieser Stelle sowohl der Firma, wie den Herren Küch und Retschinsky meinen besten Dank aus.

Zunächst schien mir von Interesse, festzustellen, ob auch beim Quecksilberbogen die Absorptionsfähigkeit eng mit der Emissionsfähigkeit verknüpft ist, d. h. also, ob sie nur so lange existiert, als der Dampf leuchtet. Zu diesem Zwecke hätte man den Quecksilberdampf durch Erhitzen auf dieselbe Temperatur und Dichte bringen müssen, wie im leuchtenden Zustande. Dies schien mir indessen kaum realisierbar, und so wurde eine einfachere Methode gewählt, die zwar viele Einwände und keine bündigen Schlüsse erlaubt, aber immerhin des Versuches wert ist. Die Heraeusschen Lampen (40 cm lange Quarzröhren mit angeschmolzenen planparallelen Verschlußquarzplatten) wurden genau wie in Fig. 1 montiert, und jede durch einen besonderen Stromkreis von 220 Volt (Städtisches Elektrizitätswerk, Dreileitersystem, 440 Volt) zum Leuchten

1) R. Küch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. 22. p. 852. 1907.

gebracht. Im Fernrohr $F$ des Spektrometers $C_1 PF$ befand sich an Stelle des Fadenkreuzes eine Rubenssche Thermosäule in Verbindung mit einem Kugelpanzergalvanometer. Die starke gelbe Doppellinie des Quecksilberbogens wurde mit der Thermosäule zu Deckung gebracht, und die Intensität der Röhren so reguliert, daß beide Röhren $L$ und $A$ *zusammen* denselben Galvanometerausschlag erzeugten wie Röhre $L$ *allein*, nachdem man $A$ ausgelöscht hatte. Dies bedeutet, daß $A$ genau so viel emittiert, als es von dem $L$-Licht absorbiert. Wenn wir nun $A$ durch plötzliche Stromunterbrechung auslöschen, so ist anzunehmen, daß Dichte und Temperatur des Quecksilberdampfes sehr viel langsamer abnehmen, als das Leuchten bzw. die Ionisation. Ist es doch bekannt, daß die Quecksilberlampe mit Wechselstrom selbst sehr hoher Periode nicht betrieben werden kann, daß also der Ionisationszustand schon nach sehr kleinen Bruchteilen einer Sekunde, vielleicht $^1/_{10000}$ oder weniger, nicht mehr existiert. Dagegen werden wir annehmen dürfen, daß Druck und Temperatur vielleicht erst nach einigen zehntel Sekunden sich erheblich geändert haben werden. Der Dampf bleibt also noch einige Zeit lang im Zustande hoher Temperatur und Dichte, nachdem er aufgehört hat zu leuchten. Ob er auch aufgehört hat zu absorbieren, soll nun folgender Versuch zeigen. Wir beobachten die Einstellung des Kugelpanzergalvanometers in dem Moment, in welchem wir $A$ auslöschen. Wenn die Absorptionsfähigkeit länger bestehen bleibt als das Leuchten von $A$, dann muß die Skala offenbar zurückschwingen, da ja während dieser Zeit nur $L$ allein leuchtet, und ein Teil seiner durch $A$ gehenden Strahlung absorbiert wird. Erst wenn die Absorptionsfähigkeit verschwunden ist, wird die Skala wieder auf dem alten Platze angelangt sein, da wir ja beide Röhren so abgestimmt hatten, daß $L$ allein dieselbe Ablenkung hervorruft, wie $L$ und $A$ zusammen, wenn $A$ sich im nicht absorbierenden Zustand befindet. Der Versuch ergab nicht die leiseste Bewegung der Galvanometernadel. Die Empfindlichkeit dieses Versuches hängt offenbar von der Trägheit des Systems Thermosäule–Galvanometer ab. Kontrollversuche ergaben, daß eine Abschwächung der Spalthelligkeit um die halbe Größe der absorbierten Intensität für die Dauer von $^1/_{10}$ Sek. genügte,

um ein deutliches Zucken der Galvanometerskala zu bewirken. Es ist also bewiesen, daß schon nach mindestens $^1/_{10}$ Sek. die Absorptionsfähigkeit auf einen unmeßbaren Betrag gesunken ist, und wenn wir unsere Schätzung über das Abklingen von Dichte und Temperatur als richtig annehmen wollen, so wäre damit erwiesen, daß der Quecksilberdampf nur im leuchtenden Zustande absorbiert.

Über die weiteren Versuche mit den Heraeusschen Röhren sollen Mitteilungen folgen.

Bonn, Physik. Institut d. Universität, September 1907.

(Eingegangen 5. Oktober 1907.)

## 7. *Zur Physik der Flamme;* *von Heinrich Mache.*

(Mitgeteilt aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturw. Kl. 118. Abt. IIa. März 1904; 116. Abt. IIa. Juli 1907.)

(Zweite Mitteilung.[1])

Strömt ein homogenes Knallgas, etwa ein Leuchtgas–Luftgemisch aus einer zylindrischen Röhre aus und wird es entzündet, so hat die Brennfläche bekanntlich die Form eines Kegels. Es ist dies die innere, je nach dem Mischungsverhältnis grün bis violett leuchtende Fläche, in der sich das zuströmende Knallgas entzündet und in der brennendes und unverbranntes Gas sozusagen unvermittelt aneinander grenzen.[2]) Auf der einen Seite dieser Fläche herrscht die Entzündungstemperatur, auf der anderen Seite die hohe Verbrennungstemperatur. Da hier unmittelbar nach der Entzündung die Wärmeverluste an die Umgebung sich noch nicht geltend gemacht haben, so bezeichnet diese Seite der Brennfläche zugleich die heißeste Stelle der Flamme.

Es wurde nun bereits bemerkt, daß der Öffnungswinkel $2\gamma$ des Brennkegels (Fig. 1) in einer einfachen Beziehung zur Strömungsgeschwindigkeit $u$ und der zur Brennfläche normalen Explosionsgeschwindigkeit des Knallgases $c$ steht. Es ist nämlich die Projektion auf die zur Kegelfläche errichtete Normale $NN'$ gleich der normalen Explosionsgeschwindigkeit, d. h. es ist $c = u \sin \gamma$. Man kann also durch Beobachtung von $u$ und $\gamma$ das $c$ angenähert bestimmen.[3])

1) Erste Mitteilung: Ann. d. Phys. 10. p. 408. 1903.

2) Der Übergang von der Entzündungs- zur Verbrennungstemperatur erfolgt in außerordentlich kurzer Zeit. Vgl. darüber z. B. B. Hopkinson, Proc. Roy. Soc. 77. p. 387. 1906.

3) Auf die korrektere Methode von Gouy-Michelson zur Bestimmung der normalen Explosionsgeschwindigkeit, welche auch für nicht kegelförmige Brennflächen gilt, werden wir später zu sprechen kommen. Ich möchte hier auch erwähnen, daß mir bei Abfassung meiner ersten Mitteilung die Arbeiten von Gouy und Michelson leider entgangen

Derartige Messungen ergeben nun das überraschende Resultat, daß diese normale Explosionsgeschwindigkeit verhältnismäßig sehr gering ist und z. B. bei der explosibelsten Leuchtgas–Luftmischung 0,5 m/sec, bei der explosibelsten Wasserstoff–Sauerstoffmischung 10 m/sec nicht übersteigt.

Mit diesem Ergebnis stehen eine Reihe von Tatsachen scheinbar im Widerspruch. Erstens ist es ja bekannt, mit welcher außerordentlichen Heftigkeit Gasexplosionen im allgemeinen in größeren Räumen verlaufen, und daß die Schnelligkeit, mit der sich hierbei die Entzündung fortpflanzt, die oben gegebenen Werte bedeutend übertrifft.

Zweitens haben die Messungen von Berthelot, von Mallard und Le Chatelier und von Dixon direkt gezeigt, daß sich die Flamme in mit Knallgas gefüllten Röhren, an deren einem Ende die Entzündung eingeleitet wurde, von da mit zuerst rasch anwachsender, später konstant werdender Geschwindigkeit bewegt, und daß diese schließlich erreichte Endgeschwindigkeit, die Geschwindigkeit der „Explosionswelle", um vieles größer ist, als die oben gegebenen Zahlen. Selbst bei Gemengen von relativ geringer Explosibilität trifft dies zu, in besonders hohem Maße aber bei den Gemengen höherer Explosibilität, für welche die Arbeiten der genannten Forscher zu dem bemerkenswerten Ergebnis führten, daß sich hier die in der Röhre schließlich erlangte Geschwindigkeit der Flamme außerordentlich an die Molekulargeschwindigkeit, also auch an die Schallgeschwindigkeit, wie sie in dem brennenden Gasgemisch herrscht, annähert. Diese zuletzt erwähnte Gesetzmäßigkeit scheint nicht nur für gasförmige, sondern auch für flüssige und feste Explosivstoffe zu bestehen. Wenigstens haben Untersuchungen Berthelots an einigen dieser Körper zu Zahlen geführt, welche eine derartige Deutung zulassen.[1])

Eine dritte Erscheinung, welche gleichfalls auf Grund der geringen normalen Explosionsgeschwindigkeit nicht erklärt werden kann, ist die in die Theorien der inneren Ballistik

waren. Dadurch wird auch die Bemerkung hinfällig, die sich dort als Fußnote auf p. 410 vorfindet. Michelson hat bereits im Jahre 1889 die Brauchbarkeit dieser, im Prinzip von Gouy herrührenden Methode überzeugend dargetan.

1) Vgl. darüber: W. Nernst, Theoretische Chemie. 2. Aufl. p. 626.

von manchen Autoren eingeführte sogenannte „äußere Entzündung". Wird kolloidales Pulver mit würfel- oder röhrenförmigem Korn an einer Stelle entzündet, dann pflanzt sich zunächst die Entzündung so gut wie momentan über die Oberflächen aller Würfel oder Röhren fort, aus denen die Ladung besteht, um dann erst, ungleich langsamer, senkrecht gegen die Oberfläche in das Innere des Kornes vorzudringen. In der Tat brennt das Pulver in äquidistanter Fläche ab, so daß die Kornform gewahrt bleibt: Würfel bleibt Würfel, Röhre bleibt Röhre. Der Beweis wurde erbracht durch die Beobachtung erloschener Reste und eine Bestätigung liegt auch darin, daß die Verbrennungsdauer des Kornes der Korndicke proportional ist.[1]) Ein derartiges Verhalten ist nur möglich, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion von einem Korn zum andern, also die Oberflächengeschwindigkeit der Explosion, groß ist gegenüber der Verbrennungsgeschwindigkeit des Kornes, d. h. also gegenüber der Geschwindigkeit, mit der die Explosion senkrecht zur Brennfläche fortschreitet.

Angesichts der erwähnten Tatsachen drängt sich nun die Frage auf, wie es möglich ist, daß ein und derselbe Verbrennungsprozeß das eine Mal mit relativ kleiner, das andere Mal mit so großer Geschwindigkeit in die unverbrannte Substanz fortgeleitet wird. In den folgenden Ausführungen wird versucht, diese Frage zu beantworten. Hierbei beschränken wir uns auf den Fall, daß die Verbrennung offen, also unter normalem Luftdruck vor sich geht. Im geschlossenen Gefäß wird durch den steigenden Druck sowohl das Flammengas, wie der Explosivkörper adiabatisch komprimiert und hierdurch einerseits die Verbrennungstemperatur erhöht, andererseits die noch nicht entzündete Masse vorgewärmt. Aus beiden Gründen steigt die Explosionsgeschwindigkeit. Bei offener Flamme hingegen kann ein derartiger Effekt nur eintreten, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion die Schallgeschwindigkeit übersteigt. Bis zu dieser Grenze bestimmen chemische Natur und Anfangstemperatur der explosiblen Substanz eindeutig diese Größe.

---

1) C. Cranz, Ballistik p. 257; Enzyklopädie d. mathem. Wiss. IV$_3$. Heft 2. 1903.

Es wurde bereits mehrfach versucht, die Riemannsche Theorie der Verdichtungsstöße, welche zuerst E. Mach und J. Sommer[1]), später P. Vieille[2]) auf die als Knall gehörte, von einem explosiblen Präparat in die umgebende Atmosphäre ausgehende Schallwelle erfolgreich angewendet haben, auf die Fortpflanzung der Verbrennung im Explosivkörper selbst anzuwenden. Nach dieser Auffassung löst die von der Entzündungsstelle ausgehende Stoßwelle die chemische Reaktion aus und trägt die Explosion mit sich fort. Daß diese Theorie dann Berechtigung haben kann, wenn die Explosion bereits Überschallgeschwindigkeit erreicht hat, wollen wir durchaus nicht bestreiten. Daß aber noch weit unter dieser Grenze in einem homogenen Explosivkörper, z. B. in einem homogenen Knallgase und in offenem Gefäß bei kontinuierlicher Verbrennung[3]) derartige Verdichtungsstöße nicht auftreten, liegt auf der Hand. Gerade hier muß aber die Untersuchung einsetzen. In der Tat fragt es sich, wie die Explosionsgeschwindigkeit von den durchaus niedrigen normalen Werten zunächst zu höheren, aber noch immer beträchtlich unter Schallgeschwindigkeit liegenden Werten ansteigen kann. Daß bei den explosibelsten Stoffen, wo diese Steigerung über die Schallgeschwindigkeit hinausführt, die jetzt auch bei offener Verbrennung eintretende adiabatische Kompression des Explosivkörpers mitbestimmend wird, unterliegt keinem Zweifel.

---

Kehren wir nun zur Betrachtung des Flammenkegels zurück, der sich in einem durch eine zylindrische Röhre strömenden, homogenen Knallgas stationär erhält. Auch hier können wir ersichtlich zwei verschiedene Explosionsgeschwindigkeiten unterscheiden. Zunächst erfolgt senkrecht zur Brennfläche die Fortleitung der Explosion mit der normalen Explosionsgeschwindigkeit $c$. Diese, unter der Strömungsgeschwindigkeit des Knallgases liegend, wäre aber allein nicht imstande den Brennkegel stationär zu erhalten; denn sie treibt ihn nur mit der Geschwindigkeit $u \sin^2 \gamma$ der Strömung entgegen. Es

---

1) E. Mach u. J. Sommer, Wiener Ber. 75. p. 128. 1877.

2) P. Vieille, Compt. rend. 126. p. 31. 1898.

3) Die Bunsensche Theorie der Partialexplosionen ist gegenwärtig wohl allgemein aufgegeben.

würde sich also die Flamme vom Brennerrohr abheben und erlöschen. Da dies nicht eintritt, sind wir zur Annahme gezwungen, daß sich die Basis des Kegels mit der Geschwindigkeit $C = u$ der Strömung entgegenbewegt, d. h. daß am Rande der Brennfläche, etwa unter dem Winkel $\gamma$ gegen diese, sich die Explosion mit der Geschwindigkeit der Strömung in das unverbrannte Gasgemisch fortpflanzt. Es ist einleuchtend, daß dann auch die übrigen Teile der Brennfläche stationär erhalten bleiben werden, indem sie sich jederzeit im selben Maße, in dem sie von der Strömung in die Höhe getragen werden, vom stationären Rande der Brennfläche her ergänzen.[1]) In der Tat wird sich ja doch ein in $A$ befindliches Flammenteilchen, durch die Strömung und die normale Explosionsgeschwindigkeit getrieben, längs der Mantelfläche des Kegels bewegen müssen.

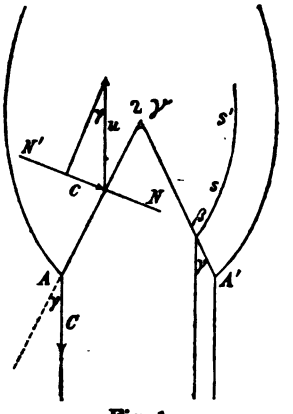


Fig. 1.

Steigert man die Strömungsgeschwindigkeit, so wird der Brennkegel steiler und höher, bis er bei einem vom Mischungsverhältnis abhängigen, kritischen Wert sich vom Brennerrohr abhebt und erlöscht. Indem sich also der Rand des Kegels unter immer spitzerem Winkel gegen das zuströmende Gas einstellt, erhält er zunächst die Fähigkeit, mit der jeweiligen Strömungsgeschwindigkeit dem Gasstrom entgegenzueilen und sich so stationär zu erhalten. Erhöht man aber die Strömungsgeschwindigkeit bis zum Erlöschen der Flamme, so bezeichnet dieser Wert den Maximalwert $C_{\text{Max.}}$, mit dem die Explosion vom Rande der Brennfläche aus in das Gas vordringen kann und der Winkel, den jetzt die Brennfläche mit der Strömungsrichtung einschließt, diejenige Richtung, in welcher die Explosion mit diesem Maximalwert fortschreitet. Als minder wesentlich sei hier nur kurz bemerkt, daß der Winkel an der

1) Das Knattern der Flamme kurzröhriger Bunsenbrenner rührt von dieser, fortwährend vom Rande aus erfolgenden Neuentzündung her.

Basis des Kegels sich nicht genau mit dem halben Öffnungswinkel $\gamma$ deckt. Er ist vielmehr stets größer, schon deshalb, weil die Brennfläche an der Basis eine Verbiegung aufweist, die hauptsächlich dadurch bestimmt ist, daß dort in der Nähe der Wand die Strömungsgeschwindigkeit infolge der Reibung geringer ist.[1])

Im folgenden werden zunächst einige Bestimmungen der Größe $C_{Max.}$ für ein Leuchtgas–Luftgemisch mitgeteilt, die gemäß den obigen Ausführungen in der Weise erhalten wurden, daß man die Geschwindigkeit des Knallgasstromes beobachtete, die gerade hinreichte, um die Flamme zu erlöschen. Der Durchmesser des verwendeten Brennerrohres betrug 0,765 cm, seine Länge 85 cm. An ihm war unten ein weiteres Rohr angesetzt, das als Mischkammer diente. Die Luft wurde einem mit Gewichten belasteten Glockengasometer entnommen, der im Gasometer vorhandene Druck mit einem Manometer beobachtet, das ausgetretene Luftquantum aus dem Sinken der Gasometertrommel unter Voraussetzung isothermer Ausdehnung berechnet. Das Leuchtgas[2]) wurde direkt aus der Leitung zugeführt, das Quantum vermittelst einer mehrmals kubizierten und mit Manometer versehenen Präzisionsgasuhr bestimmt. Es war nach dem Passieren der Gasuhr mit Wasserdampf so gut wie gesättigt, hingegen hatte die Luft, da sie dem Gasometer unmittelbar nach der Füllung entnommen wurde, nur den geringen Feuchtigkeitsgehalt der Luft des Beobachtungsraumes.

Die folgende Tabelle enthält in der ersten Spalte den

---

1) Es ist wohl bekannt, daß es gleichfalls unwesentlich ist, daß wir uns den Brennkegel am Ende des Brennerrohres aufsitzen denken. Kegel von gleicher Form lassen sich auch im Rohre oder in kleiner Entfernung über dem Rohre erhalten. Um die Flamme ins Rohr zu bringen, ist es nur nötig das Ende von außen, etwa mit einer Stichflamme, anzuheizen. Der Kegel zieht sich, nach kurz dauerndem Vibrieren zwischen den beiden Lagen, hinein und wandert dann in dem Maße, in dem das Rohr von ihm selbst erhitzt wird, langsam nach unten. Auch über dem Rohre läßt sich der Flammenkegel, etwa auf einem Ring aus Platindraht von der gleichen Öffnung, wie das Brennerrohr aufsitzend, erhalten.

2) Der Heizwert des zu diesen Messungen verwendeten Leuchtgases betrug rund 4900 Cal. Es stammte aus dem Innsbrucker städtischen Werke.

Prozentgehalt der Mischung an Leuchtgas, in der zweiten die (nach der Gouy-Michelsonschen Methode gemessene) normale Explosionsgeschwindigkeit $c$, in der dritten die Strömungsgeschwindigkeit, bei welcher das Abreißen der Flamme erfolgte, also diejenige Größe, die nach den obigen Ausführungen mit der maximalen Explosionsgeschwindigkeit $C_{\text{Max.}}$ identisch ist. In der vierten Spalte ist der Quotient $C_{\text{Max.}}/c$ gegeben.

| Proz. | $c\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ | $C_{\text{Max.}}\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ | $\frac{C_{\text{Max.}}}{c}$ |
|---|---|---|---|
| 10,53 | 19,9 | 107 | 5,4 |
| 11,56 | 23,2 | 222 | 9,6 |
| 12,14 | 25,0 | 433 | 17,3 |
| 14,39 | 32,2 | 559 | 17,4 |
| 14,72 | 33,2 | 653 | 19,7 |
| 15,26 | 34,9 | 733 | 21,0 |
| 15,62 | 36,1 | 880 | 24,4 |

Wir sehen aus diesen Zahlen, daß selbst bei den im Vergleich zu anderen explosiven Mischungen relativ wenig explosiblen Leuchtgas–Luftgemengen die maximale Explosionsgeschwindigkeit die normale um vieles übertrifft. Auch sieht man, daß mit wachsendem Leuchtgasgehalt und gleichzeitig steigender Explosibilität der Wert $C_{\text{Max.}}$ etwa linear, der Quotient $C_{\text{Max.}}/c$ hingegen zuerst schnell, später langsamer anwächst.

Der geringe Gasdruck in der Leitung gestattete nicht den Prozentgehalt des Leuchtgases in der Mischung noch weiter zu erhöhen und so den Höchstwert der maximalen Explosionsgeschwindigkeit zu bestimmen, der offenbar erst in der explosibelsten Mischung, die nahe bei 17 Proz. Leuchtgasgehalt liegt, erreicht worden wäre. Falls eine Extrapolation gestattet ist, so würde aus ihr folgen, daß dieser Höchstwert 10 m/sec nicht wesentlich übersteigt.

Fassen wir das bisher Gesagte zusammen, so kommen wir zu der folgenden Vorstellung über das Fortschreiten einer auf einer Fläche in einem homogenen Explosivkörper eingeleiteten Verbrennung. Ist $MN$ diese Fläche, so pflanzt sich in ihren mittleren Partien die Explosion in der Richtung der

zur Fläche errichteten Normalen mit der Geschwindigkeit $c$ fort. Am Rande der Fläche hingegen ist die Explosion auch seitlich gerichtet und ihre Geschwindigkeit erreicht da in einer bestimmten, etwa durch den Winkel $\Theta$ gegebenen Richtung einen Maximalwert $C_{\text{Max.}}$, der $c$ um vieles übertrifft.

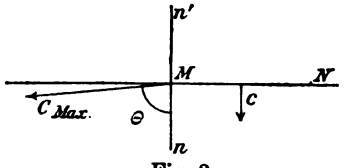


Fig. 2.

Um dieses polare Verhalten im Fortschreiten der Brennfläche zu begründen, wollen wir uns wieder der schon früher eingeführten Vorstellung bedienen, daß die Fortpflanzung der Verbrennung im Wesen ein Wärmeleitungsprozeß ist, d. h. daß die Entzündung der Gasschichten, welche der Brennfläche anliegen, dann erfolgt, wenn sie durch Wärmeleitung bis zur Entzündungstemperatur erhitzt sind. Hierbei wird der durch Strahlung übergeführte Wärmebetrag vernachlässigt, eine Vernachlässigung, die bei gasförmigen Explosivstoffen mit hinreichender Annäherung, bei flüssigen oder festen Explosivstoffen vollkommen zutrifft. Die verschieden geschwinde und verschieden gerichtete Fortpflanzung der Entzündung senkrecht und schräg zum Rande der Brennfläche muß dann durch Verschiedenheit in der Intensität des Wärmestromes nach beiden Richtungen begründet sein und wir werden im folgenden versuchen, diese Verschiedenheit molekularmechanisch zu erläutern.

---

Bedienen wir uns zunächst einer in der Flamme selbst auftretenden hydrodynamischen Analogie:

Tritt ein Knallgasstrom vom Querschnitt $q$ senkrecht in die Brennfläche $XY$, etwa mit der Geschwindigkeit $c$, so muß der Kontinuität halber diese Strömungsgeschwindigkeit nach dem Passieren der Brennfläche um so viel gesteigert sein, daß $q\varrho c = q\varrho' c'$ ist, wenn $\varrho'$ und $c'$ Dichte und Strömungsgeschwindigkeit des brennenden Gases bezeichnen, also des Gases nach dem Passieren der Fläche $XY$. Bei der in der Brennfläche vor sich gehenden Reaktion zwischen Sauerstoff und Brennstoff und der hierdurch gleichzeitig eintretenden Temperaturerhöhung und Verdünnung des Gases wird somit

der neugebildeten Molekel eine gegenüber der Bewegung der Komponenten erhöhte translatorische Bewegung verliehen, die in der Richtung der $Z$-Achse ihren Maximalwert erreicht und eine erhöhte molare Strömung veranlaßt.

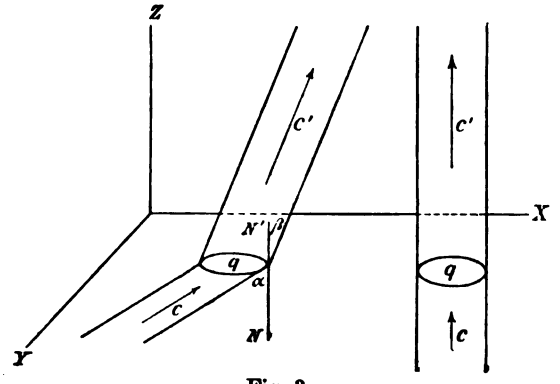



Fig. 3.

Ganz analog ist der Vorgang für den Fall, daß der Knallgasstrom mit der zur Brennfläche errichteten Normalen $NN'$ einen Winkel $\alpha$ einschließt. Auch hier wird aus Gründen der Kontinuität die Strömungsgeschwindigkeit von einem Wert $c$ auf einen Wert $c'$ erhöht werden, welcher jetzt der Gleichung $\cos\alpha\, q\, \varrho\, c = \cos\beta\, q\, \varrho'\, c'$ entspricht, wobei wir $\beta$ den Winkel nennen, welchen die Richtung des Gasstromes nach dem Passieren der Brennfläche mit der Flächennormalen einschließt. Außerdem ist es aus dem oben Gesagten einleuchtend, daß diese Geschwindigkeitserhöhung nur die auf $XY$ senkrechte Komponente von $c$ betrifft, während die zu ihr parallele erhalten bleibt. Somit ist auch $c \sin\alpha = c' \sin\beta$. Aus der Vereinigung beider Gleichungen ergibt sich die Beziehung $\varrho/\varrho' = \mathrm{tg}\,\alpha/\mathrm{tg}\,\beta$. Der die Flamme speisende Gasstrom wird also durch den in der Brennfläche eingeleiteten und sich dort auch nahezu momentan vollziehenden Prozeß der Verbrennung in der Richtung des zur Brennfläche errichteten Lotes abgelenkt.

Man kann dieses Verhalten nach Gouy[1]) an jedem Bunsenbrenner demonstrieren, wenn man die Strömungsfäden

1) A. Gouy, Ann. chim. phys. (5) 18. p. 27. 1879.

durch dem Gasgemisch beigemengten feinen Kohlenstaub sichtbar macht. Die in der Brennfläche lebhaft aufleuchtenden Partikel bewegen sich dann durch den Flammenmantel in einer Bahn $ss'$ (vgl. Fig. 1), die auf der Brennfläche unter einem Winkel $\beta$ ansetzt, der stets den Winkel $\gamma$ in Größe übertrifft. Man erkennt auch bei der Betrachtung der Erscheinung leicht, daß die Bahn der Teilchen mit der äußeren Kontur des Flammenmantels parallel verläuft. In der Tat verdankt ja diese äußere Begrenzung derselben ablenkenden Ursache ihre Form. Man kann daher den Winkel $\beta$ auch ohne Zuhilfenahme der aufleuchtenden Partikel bei $A$ oder $A'$ am Saume des Flammenmantels messen und dann die obige Beziehung dazu benutzen, um das Dichtenverhältnis $\varrho/\varrho'$ zu bestimmen.

In der folgenden Tabelle werden einige für dieses Verhältnis an Leuchtgas–Luftgemischen ermittelte Werte mitgeteilt. Verwendet wurde hierbei ein Brennerrohr von 0,81 cm Durchmesser und 120 cm Länge. Die Messung der Gasströme erfolgte in der bereits oben beschriebenen Weise. Das Ausmessen des Winkels $\beta$ geschah an photographischen Bildern der Flamme. Hierbei war nur eine Schwierigkeit zu überwinden, die darin bestand, daß Flammen, die mit einem Überschuß von Luft brennen (in unserem Falle Flammen mit einem Leuchtgasgehalt unter 17 Proz.), also oxydierende Flammen, nur Rudimente des Flammenmantels zeigen und schließlich nur aus dem Brennkegel allein bestehen. Doch gelang es leicht, auch hier den Flammenmantel sichtbar zu machen und zu photographieren, wenn man in das Knallgas Kupferchloridpulver oder gemahlenen Flußspat einführte.

| Proz. | $c\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ | $\gamma$ | $\beta$ | $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\varrho}{\varrho'}$ |
|---|---|---|---|---|
| 13,17 | 28,3 | 4° 5′ | 7° 40′ | 1,9 |
| 15,24 | 34,9 | 5 30 | 14 40 | 2,7 |
| 17,05 | 40,6 | 7 0 | 25 25 | 3,9 |
| 18,57 | 38,4 | 6 55 | 24 15 | 3,7 |
| 18,79 | 35,7 | 6 40 | 25 35 | 4,1 |
| 20,47 | 32,5 | 6 20 | 25 15 | 4,3 |
| 21,71 | 27,3 | 5 35 | 24 25 | 4,6 |
| 23,06 | 19,3 | 4 5 | 15 50 | 4,0 |

Die Zahlen der letzten Spalte geben das Verhältnis zwischen der Dichte des auf Entzündungstemperatur gebrachten Knallgases und des brennenden Flammengases. Man sieht, daß diese Größe mit steigendem Leuchtgasgehalt zu einem Maximum anwächst und dann wieder sinkt. Das Maximum entspricht aber nicht dem bei 17 Proz. liegenden Maximum der Explosibilität, sondern tritt erst bei einer an Leuchtgas reicheren Mischung ein.

Weiter beweisen diese Zahlen, daß in der Brennfläche nicht nur zwei Gasschichten sehr verschiedener Temperatur, sondern auch sehr verschiedener Dichte aneinanderliegen: auf der einen Seite das dichte, noch nicht entzündete, aber auf der Entzündungstemperatur befindliche Knallgas, auf der anderen Seite das um vieles weniger dichte, zur hohen Verbrennungstemperatur erhitzte Flammengas. Es ist klar, daß dieser Dichtenunterschied, der schon an den relativ wenig explosiblen Leuchtgas–Luftgemischen so ausgeprägt ist, bei den explosibelsten Gasgemischen, für welche die Entzündungstemperatur niedrig, die Verbrennungstemperatur hoch liegt, noch wesentlich höhere Werte annehmen kann und für flüssige und feste Explosivstoffe ganz enorme Größen erreicht. So läßt sich z. B. für Nitroglycerin

$$[2C_3H_5(NO_2)_3O_3 = 6CO_2 + 5H_2O + 6N + O,\ \text{Dichte} = 1{,}60],$$

dessen Verbrennungstemperatur nach Wuič 3005° C. beträgt, das Verhältnis $\varrho/\varrho'$ zu ungefähr 12000 berechnen, und für Knallquecksilber

$$[HgC_2O_2N_2 = Hg + 2CO + 2N,\ \text{Dichte} = 4{,}42],$$

das bei der Verbrennung von einem Grammäquivalent 116000 Cal. entwickelt, erhalten wir $\varrho/\varrho' = 34000$.

Es ist also das Charakteristische für eine jede Brennfläche, daß in ihr Gas von sehr hoher Temperatur und geringer Dichte an den Explosivstoff grenzt, der wesentlich niedrigere Temperatur und um vieles höhere Dichte aufweist. Die aus dem Gase in den Explosivstoff einfliegenden Molekel, welche durch Abgabe ihrer Energie die Explosion weiterleiten, haben somit hierbei den Übergang aus einem dünnen in ein bedeutend dichteres Medium zu vollziehen. Bei diesem Übergange, d. h. bei dem ersten im dichten Medium erfolgenden

Zusammenstoß werden sie, wie wir noch ausführlich erörtern wollen, abgelenkt und zwar von dem zur Fläche errichteten Lote. Sowie im oben behandelten Fall der vom dichten in das dünne Gas übertretende Gasstrom in der Richtung zum Lote gebrochen wird und, die praktische Realisierbarkeit des Falles vorausgesetzt, eine in entgegengesetzter Richtung erfolgende Strömung eine Ablenkung vom Lote erführe[1]), so wird auch die Richtung einer jeden einzelnen einfliegenden Molekel beim Übergang durchschnittsweise in gleichem Sinne abgelenkt, wenn auch natürlich nicht nach dem gleichen Gesetze. Die hierdurch entstehende Polarität in der Energieströmung erklärt dann zwanglos die besprochene Polarität in der Weiterleitung der Explosion vom Rande der Brennfläche.

---

Es hat Maxwell, um das Gleiten verdünnter Gase an einer festen Wand und die Erscheinung der thermischen Effusion analytisch zu behandeln, eine Methode gegeben[2]), der wir zwar hier aus leicht ersichtlichen Gründen nicht ganz folgen können, die wir aber doch zur Rechtfertigung unserer späteren speziellen Annahmen erwähnen müssen. Liegt molekular bewegtes Gas geringer Dichte und molekular ruhendes Gas großer Dichte unmittelbar aneinander, so wird dort ausgeführt, daß die aus dem dünnen Gas einfliegenden Molekel häufiger den Pol als den Äquator der Molekel des dichten Gases treffen werden und daß infolgedessen hauptsächlich die senkrecht zur Trennungsfläche ausfliegenden Molekel in das dichte Gas gelangen, während diejenigen, welche nahezu parallel zur Trennungsfläche ausfliegen, unter Beibehaltung ihrer Tangential- und Reversion ihrer Normalgeschwindigkeit von den obersten Molekelreihen des dichten Gases abprallen. Es ist ohne weiteres klar, daß diese Scheidung von „ab-

---

1) Auch bei der Effusion eines Gases wird das molar ungeordnete Gas molar geordnet, indem jede die Öffnung passierende Molekel durch den letzten in der Öffnung erfolgenden Zusammenstoß einen Geschwindigkeitszuwachs in der Richtung der Normalen erfährt. Umgekehrt erfährt die einfliegende Molekel beim ersten Zusammenstoß im dichten Gase im Durchschnitt eine Verminderung ihrer Normalkomponente.

2) Im Nachtrag zur Abhandlung „On stresses in rarified gases arising from inequalities in temperature".

sorbierten" und „reflektierten" Molekeln bezüglich der dynamischen Wirkung des ersten Zusammenstoßes keine strenge sein kann, daß vielmehr hier alle Übergänge vorhanden sein müssen und daß auch die eindringenden, absorbierten Molekel beim Zusammenstoß, ähnlich wie die reflektierten, hauptsächlich eine Änderung der Normalkomponente ihrer Geschwindigkeit erfahren werden, wogegen die Tangentialkomponente viel weniger beeinflußt wird, ja für alle schräg eindringenden, aber noch nicht reflektierten Molekel nahezu vollkommen erhalten bleibt. Dann verläuft aber im Durchschnitt die ganze Erscheinung so, als ob jede eindringende Molekel beim ersten Zusammenstoß unter Einbuße eines Teiles ihrer Energie nach einem bestimmten Gesetze vom Lote gebrochen würde.

Auch ein von Jäger[1]) zur Ableitung der van der Waalsschen Zustandsgleichung benutzter Gedanke läßt uns zum gleichen Schlusse kommen. Jäger beweist, daß eine aus dichtem in verdünntes Gas oder in den leeren Raum übertretende Molekel beim Durchgang durch die Grenzfläche Arbeit gewinnt, so, als ob zwischen den Molekeln Abstoßungskräfte vorhanden wären. Es hat dies zur unmittelbaren Folge, daß die Molekel im Momente, wo sie die Grenzfläche passiert, einen Impuls in der Richtung der Flächennormalen erfährt, d. h. die Normalkomponente ihrer Geschwindigkeit gesteigert wird, und zwar ohne Änderung der zur Fläche parallelen Komponente. Daraus ergibt sich aber auch, daß, wenn umgekehrt die Molekel aus dem dünnen in das dichte Gas übertritt, dies einer in der Richtung der Flächennormalen zu leistenden Arbeit entspricht, zufolge deren sie mit verminderter Normal- und beibehaltener Tangentialgeschwindigkeit zum nächsten Zusammenstoß gelangen wird.

Auf diese Überlegungen gestützt, nehmen wir an:

1. Daß die ursprüngliche Geschwindigkeit $c$ der Molekel und die durch den ersten Zusammenstoß veränderte $c'$ mit dem Einfallslot in einer Ebene bleiben. Das gilt natürlich nicht für den einzelnen Stoß, sondern nur für den Mittelwert vieler.

---

1) G. Jäger, Wiener Ber. 101. p. 1520. 1892. Auch Winkelmann, Handbuch der Physik II, 2. p. 544. 1896.

2. Daß die in die Richtung der Ebene fallende Komponente hierbei erhalten bleibt. Sind also $\vartheta$ und $\vartheta'$ die Winkel, welche die Geschwindigkeitsvektoren mit dem Lote bilden, so gelte die Gleichung $c \sin \vartheta = c' \sin \vartheta'$.

3. Daß hingegen die Normalkomponente $c \cos \vartheta$ eine gewisse von $\varrho$ und $\varrho'$ abhängige Veränderung erfährt. Es sei also $c' \cos \vartheta' = c \cos \vartheta f(\varrho, \varrho')$. Ist $\varrho' > \varrho$, so muß jedenfalls $f(\varrho, \varrho') < 1$ sein.

Durch Vereinigung beider Gleichungen erhalten wir ferner auch die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \vartheta = f(\varrho, \varrho') \operatorname{tg} \vartheta'$$

und

$$c'^2 = c^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta [f(\varrho, \varrho')]^2 .$$

Es ist wohl kaum nötig, eigens zu betonen, daß diese Annahmen, vor allem die zweite, durchaus nicht völlig den Tatsachen entsprechen werden und daß daher auch die Resultate nach der Auffindung direkterer Methoden möglicherweise erheblicher Korrekturen in quantitativer Beziehung bedürfen werden.

Wir betrachten nun den folgenden Fall:

Die für Wärme undurchdringliche Wand $AB$ trenne brennendes und unentzündetes Gas. Nur durch eine in der Wand befindliche Öffnung von der Größe $F$ sei das Fortschreiten der Verbrennung in das unter $AB$ befindliche Knallgas ermöglicht. Wir fragen nach der Dichte der Energie- oder Wärmeströmung in den verschiedenen Richtungen, einer Größe, die gemäß der oben entwickelten Anschauung der Geschwindigkeit proportional ist, mit der sich die Explosion von $F$ aus nach den verschiedenen Richtungen, unmittelbar nach Einleitung des Vorganges fortpflanzt. Denken wir uns also um $F$, in der aus der Fig. 4 ersichtlichen Weise,

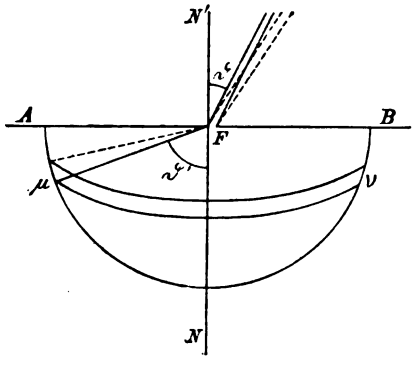


Fig. 4.

mit dem Radius Eins eine Halbkugel konstruiert, so handelt es sich um die Berechnung der Energie, welche die von oben aus dem brennenden Gase einfliegenden Molekel durch die verschieden gelegenen Flächenelemente dieser Halbkugel tragen, wobei es im voraus aus Gründen der Symmetrie einleuchtet, daß diese Energieströmung nur von dem Winkel $\vartheta$ oder $\vartheta'$, dagegen nicht vom Azimut abhängen kann und daher längs der Zone

$$\mu\nu = 2\pi \sin\vartheta' d\vartheta'$$

überall den gleichen Wert hat. Wir wollen ferner bedenken, daß die Geschwindigkeit der Molekeln des brennenden Gases viel größer ist als die des noch nicht entzündeten Gases, so daß wir uns das letztere molekular ruhend denken können. Es heißt dies nichts anderes, als daß die Wurzel aus der Differenz der Quadrate der Molekulargeschwindigkeiten in den beiden Gasarten sich mit der Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Molekel des brennenden Gases $c$ hinlänglich deckt.

Der Vorgang, durch den der Wärmetransport vom heißen zum kalten Gase erfolgt, ist dann der folgende:

Durch die Öffnung $F$ fliegen von allen Seiten die Molekeln des brennenden Gases in das um vieles dichtere, unverbrannte Gas ein. Bei dem ersten Zusammenstoß, welcher in den obersten Molekelreihen des dichten Gases stattfindet, werden die Normalkomponenten der stoßenden Molekel nach dem oben eingeführten Gesetze verändert und die hierbei verloren gegangene, senkrecht zur Trennungsfläche gerichtete Energie an die getroffenen Molekeln des dichten Gases übertragen. Außerdem haben aber auch die stoßenden Molekeln selbst einen Energierest behalten, der nach verschiedener Richtung verschieden groß ist und eine Energieströmung veranlaßt, die sich ersichtlich als Funktion des Winkels $\vartheta'$ ausdrücken lassen wird. Es soll gezeigt werden, daß die Dichte dieser vorzugsweise seitlich gerichteten Energieströmung die Dichte der normal eindringenden Energieströmung bedeutend übersteigen kann und in einer bestimmten Richtung das Maximum erreicht. Es ist dies dann zugleich die Richtung, in der die Explosionsgeschwindigkeit beim Durchtreten der Explosion durch die Wand $AB$ den größtmöglichen Wert erreicht.

Fassen wir unter den einfliegenden Molekeln diejenigen ins Auge, deren Richtung mit der Flächennormalen den Winkel $\vartheta$ bis $\vartheta + d\vartheta$ einschließt, so ist die Zahl solcher Molekel in der Sekunde bekanntlich[1]) gleich $\frac{1}{4} N c \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta$, wobei wir der Einfachheit halber $F = 1$ setzen und unter $N$ die Zahl der Molekel verstehen, welche in der Volumseinheit des brennenden Gases enthalten sind. Nach dem ersten Zusammenstoß schließen diese Molekel nach dem Obigen mit der Flächennormale den Winkel $\vartheta'$ bis $\vartheta' + d\vartheta'$ ein, wobei

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{1}{f(\varrho,\varrho')} \operatorname{tg}\vartheta \quad \text{und} \quad d\vartheta' = \frac{1}{f(\varrho,\varrho')} \frac{\cos^2\vartheta'}{\cos^2\vartheta} d\vartheta$$

ist. Ihre Geschwindigkeit ist

$$c' = c \sqrt{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta [f(\varrho,\varrho')]^2}.$$

Es passiert somit die Zone $\mu\nu$ der Energiebetrag:

$$E_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4} N m c^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta [f(\varrho,\varrho')]^2\},$$

und die Flächeneinheit der Zone der Energiebetrag:

$$E = \frac{1}{8\pi} N m c^3 \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta}{\sin\vartheta' \, d\vartheta'} \{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta [f(\varrho,\varrho')]^2\}.$$

Dieser Ausdruck, der nichts anderes gibt als die Dichte der Energieströmung in der Richtung des Winkels $\vartheta'$, läßt sich zunächst durch die folgenden einfachen Transformationen in eine übersichtliche Form bringen. Es ist nämlich unter Berücksichtigung der Beziehungen, welche zwischen $\vartheta$ und $\vartheta'$ bestehen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{8\pi} N m c^3 \frac{\sin\vartheta \cos^5\vartheta \, d\vartheta}{\sin\vartheta' \cos^2\vartheta' \, d\vartheta} f(\varrho,\varrho') \{\operatorname{tg}^2\vartheta + [f(\varrho,\varrho')]^2\} \\ &= \frac{1}{8\pi} N m c^3 \frac{\sin\vartheta \cos^5\vartheta}{\sin\vartheta' \cos^2\vartheta'} [f(\varrho,\varrho')]^2 (1 + \operatorname{tg}^2\vartheta') \\ &= \frac{1}{8\pi} N m c^3 \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta')^{5/2}}{\{1 + [f(\varrho,\varrho')]^2 \operatorname{tg}^2\vartheta'\}^3} [f(\varrho,\varrho')]^4. \end{aligned}$$

Suchen wir denjenigen Winkel $\Theta$, für welchen diese Energieströmung den größten Wert annimmt und unter dem sich somit auch die Explosion am raschesten fortpflanzt, so erhalten

---

1) Vgl. z. B. O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 82. 1899.

wir, durch Nullsetzung des nach $\vartheta'$ gebildeten Differentialquotienten, für ihn die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{tg}^2 \Theta = \frac{5}{[f(\varrho, \varrho')]^2} - 6,$$

und für den Höchstwert der Energieströmung

$$E_{\text{Max.}} = \frac{1}{8\pi} \frac{5^{5/2}}{6^3} N m c^3 \frac{1}{f(\varrho, \varrho')[1 - f(\varrho, \varrho')^2]^{3/2}}.$$

Es ist nun, wie schon oben betont wurde, $f(\varrho, \varrho')$ stets kleiner als Eins, und zwar wird es um so kleiner sein, je größer der Dichtenunterschied der Gase auf beiden Seiten der Brennfläche ist. Fassen wir Fälle ins Auge, wo dieser Dichtenunterschied große Werte erreicht, wo also $f(\varrho, \varrho')$ sehr klein ist, so können wir auch schreiben:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sqrt{5}}{f(\varrho, \varrho')}$$

und

$$E_{\text{Max.}} = \frac{1}{8\pi} \frac{5^{5/2}}{6^3} N m c^3 \frac{1}{f(\varrho, \varrho')} = 0{,}0103\, N m c^3 \frac{1}{f(\varrho, \varrho')}.$$

Vergleichen wir damit die Dichte der Energieströmung, wie sie in den mittleren Partien einer ausgedehnten Brennfläche vorhanden ist. Da sich hier die seitlich gerichteten Komponenten gegenseitig aufheben, wird sie senkrecht zur Brennfläche gerichtet sein. Es ist nun die Gesamtzahl der durch die Flächeneinheit in der Sekunde einfliegenden Teilchen gleich

$$\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} N c \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{4} N c,$$

und die durch sie überführte Energie

$$E_{\text{Normal}} = \tfrac{1}{8} N m c^3 = 0{,}125\, N m c^3.$$

Man sieht ein, daß für genügend kleines $f(\varrho, \varrho')$ der Wert von $E_{\text{Max.}}$ den von $E_{\text{Normal}}$ bedeutend übertreffen kann und daß dann auch die vom Rande der Brennfläche weitergreifende Explosion, besonders in der Richtung des Winkels $\Theta$, in ihrer Geschwindigkeit die normal zur Brennfläche sich fortpflanzende erheblich übersteigen wird.

### C. Die Explosionswelle.

Es erübrigt noch, die Bedeutung der oben entwickelten Anschauungen für die Physik der Explosionen kurz auseinanderzusetzen.

Zunächst ist es einleuchtend, daß die Einführung der am Rande der Brennfläche vorhandenen maximalen Explosionsgeschwindigkeit uns in den Stand setzt, sowohl die rasche Explosion größerer Knallgasvolumina, wie auch die außerordentlich schnelle „äußere Entzündung" der inneren Ballistik, die wir eingangs erwähnt haben, zu erklären. Von irgend einer Stelle aus, in der die Entzündung eingeleitet wurde und sich eine kleine Brennfläche gebildet hat, verbreitet sich zunächst diese Brennfläche vom Rande aus durch oder über den Explosivkörper mit großer Schnelligkeit, und zwar vornehmlich in der jeweiligen Richtung der maximalen Explosionsgeschwindigkeit, während in der Richtung der jeweiligen Flächennormalen die Verbrennung viel langsamer erfolgt. Ist speziell, wie bei den festen Explosivstoffen, der Dichtenunterschied zwischen dem Flammengas und der explosiblen Substanz sehr groß, so wird der Winkel $\Theta$ nahezu gleich $\pi/2$, d. h. die Explosionsgeschwindigkeit hat in der Richtung der an der betreffenden Stelle des Randes an die Brennfläche gelegten Tangentialebene den höchsten Wert. Die Verbrennung wird sich also tatsächlich in einer Pulverladung zunächst von der Entzündungsstelle über die Oberflächen der Pulverkörner bewegen und dann langsamer in das Innere eines jeden Kornes vordringen.

Auch das Entstehen der von Berthelot als Explosionswelle bezeichneten Erscheinung läßt sich auf Grund der entwickelten Theorie dem Verständnis näher bringen. Wird in einer mit einem Explosivstoff, etwa einem Knallgas gefüllten zylindrischen Röhre die Entzündung selbst auf einer zur Achse senkrechten Ebene eingeleitet, so schreitet die Brennfläche doch nicht als Ebene durch die Röhre weiter fort. Die der Röhre anliegenden Partien der Brennfläche werden nämlich infolge der kühlenden Wirkung der Wandung eine gegenüber der Mitte stark verminderte Explosionsgeschwindigkeit aufweisen und hinter ihnen zurückbleiben. Dadurch erhält aber die

Brennfläche, besonders in engen Röhren, wie sie ja stets zu diesen Versuchen verwendet werden, sehr bald die Form eines Kegels. Die Spitze dieses Kegels wirkt dann hier im ruhenden Gasgemisch ähnlich wie die Kegelbasis im strömenden, d. h. wie der Rand einer Brennfläche. In der Tat muß ja gemäß den obigen Ausführungen eine jede gegen das unverbrannte Knallgas gerichtete Flammenkante oder Spitze in ganz

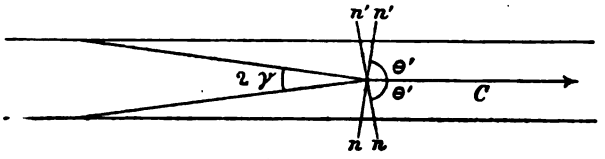



Fig. 5.

analoger Weise wirken, wie ein Flammenrand. Das hat zur Folge, daß die Spitze des Kegels nicht mit der normalen, sondern mit höherer Explosionsgeschwindigkeit in das Knallgas vordringt und den übrigen Partien der Brennfläche immer mehr voraneilt. Der Kegel wird steiler und steiler, die Geschwindigkeit seiner Spitze dadurch immer größer, bis sie ihren Höchstwert erreicht hat, bis nämlich die Richtung der maximalen Explosionsgeschwindigkeit mit der Achse der Röhre zusammenfällt. Ist diese größtmögliche Geschwindigkeit einmal vorhanden, so wird sie sich erhalten, d. h. der Kegel schreitet von da ab mit konstantem Öffnungswinkel und konstanter, die normale Explosionsgeschwindigkeit weit übertreffender Geschwindigkeit durch die Röhre weiter, wobei sich die peripheren Partien des Kegels in ganz analoger Weise von der Spitze her entzünden und ergänzen, wie im strömenden Knallgas die zentralen Partien vom Kegelrand. Bezeichnet also $2\gamma$ den Öffnungswinkel des Kegels, $C$ seine maximale Geschwindigkeit, $c$ wieder die normale Explosionsgeschwindigkeit, so ist $\sin\gamma = c/C$. Ist weiter $r$ der Radius der Röhre, so ist die maximale Länge des Kegels

$$l = r\cot g\,\gamma = r\sqrt{\left(\frac{C}{c}\right)^2 - 1} \sim r\,\frac{C}{c}.$$

Die Beobachtungen ergeben nun tatsächlich je nach der Länge der Röhre verschiedene Mittelwerte für die Geschwindig-

keit, mit der die Explosion sie durchläuft. Auch wurde nachgewiesen, daß diese Geschwindigkeit von der Entzündungsstelle aus zunächst anwächst, bis sie einen gewissen bestimmten Wert erreicht hat, den sie dann beibehält.[1])

Das Gesagte gilt ohne weiteres natürlich nur für offene Röhren und für den Fall, daß die auf die geschilderte Weise erreichte maximale Geschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit in der unverbrannten, explosiblen Substanz nicht erreicht. Tritt das letztere ein, so wird die Geschwindigkeit der Explosionswelle infolge der jetzt eintretenden adiabatischen Kompression noch weiter ansteigen. Es wird nämlich einerseits durch die Kompression des Flammengases die Verbrennungstemperatur höher, andererseits durch die Kompression der unverbrannten Substanz diese bedeutend vorgewärmt und die zur Erreichung der Entzündungstemperatur durch Wärmeleitung zuzuführende Wärmemenge geringer. Beide Ursachen, vor allem die zweite, erhöhen nun die Explosionsgeschwindigkeit und rückwirkend die Kompression. Diese gegenseitige Steigerung wird so lange andauern, bis die Explosionsgeschwindigkeit den größten überhaupt möglichen Wert angenommen hat. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, welches dieser Wert ist. Da der Fortleitungsmechanismus der Explosion in einem Wärmeleitungsprozeß besteht, so wird der Grenzwert der Explosionsgeschwindigkeit durch die Geschwindigkeit der Molekel gegeben sein, welche den Wärmetransport vermitteln. Es wird also schließlich, wie dies die Experimente von Berthelot und Dixon ergeben haben, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion in der Röhre gleich der Geschwindigkeit der Molekel in der Flamme sein, oder, genauer gesagt, gleich der mittleren molekularen Geschwindigkeit des Verbrennungsproduktes bei der aus Verbrennungswärme und Wärmekapazität berechenbaren maximalen Verbrennungstemperatur.

### D. Der Gouysche Satz.

Zum Schlusse wollen wir noch den Zusammenhang zwischen dem Gesagten und einem einfachen Gesetze darlegen, welches

1) Vgl. z. B. H. B. Dixon: R. Boyle Lecture 1903, H. Frowde, London 1905.

für alle Verbrennungserscheinungen von großer Bedeutung ist. Dieses Gesetz läßt sich in der Form aussprechen, daß der Verbrauch an Brennstoff für eine Flamme der Größe ihrer Oberfläche proportional ist. Gouy hat diesen Satz begründet und experimentell nachgewiesen.[1]) Er resultiert dort unmittelbar aus der Bemerkung, daß die Normalkomponente der Explosionsgeschwindigkeit für jeden Flächenteil der Flamme die gleiche ist, und zwar gleich der normalen Explosionsgeschwindigkeit der betreffenden explosiblen Substanz. Dann ist auch der Verbrauch an Brennstoff einer beliebig gestalteten Flamme gleich dem einer ebenen Flamme von gleicher Größe und es ist der Quotient aus Konsum und Brennfläche gleich $c$. Auf diese Weise hat W. Michelson durch Ausmessen der kegelförmigen Brennfläche, wie sie sich über zylindrischen Brennerröhren ausbildet, für einige Knallgase die normale Explosionsgeschwindigkeit bestimmt[2]) und auf diese Weise sind auch die oben für Leuchtgas–Luftgemische gegebenen Werte von $c$ erhalten worden.

Gouy hat diesen Satz, wie eben erwähnt wurde, experimentell begründet; doch sind diese Angaben nur nebenbei in einer Abhandlung enthalten, die sich mit ganz anderen Aufgaben beschäftigt und sind vor allem nicht auf photographischem Wege erhalten, der allein eine größere Genauigkeit ermöglicht. Eine indirekte Bestätigung des Satzes findet sich in der Arbeit Michelsons, der bei den von ihm untersuchten Gasgemischen den Durchmesser der Brennerröhren zwischen 0,393 und 1,086 cm variierte und fand, daß sich die mit verschiedenen Brennern gemachten Beobachtungen gut aneinander reihen lassen. Dessenungeachtet dürfte es nicht überflüssig sein, einige zur Prüfung des Gouyschen Satzes ausgeführte Messungen hier mitzuteilen.

Bei diesen Versuchen wurde das Leuchtgas wieder direkt der Leitung, die Luft aus einem Orgeltisch entnommen und die Gasströme mittels einer Präzisionsgasuhr gemessen. Die von den Flammen angefertigten Photographien wurden vergrößert und aus diesen Vergrößerungen die Brennfläche als

1) G. Gouy, Ann. chim. phys. (5) **18**. p. 27. 1879.
2) W. Michelson, Wied. Ann. **37**. p. 1. 1889.

Rotationsfläche bestimmt. Zu bemerken ist noch, daß diese Versuchsreihe in Wien ausgeführt wurde und somit Leuchtgas anderer Provenienz zur Verwendung kam als bei den früher mitgeteilten Messungen. Hieraus erklären sich auch die Abweichungen, welche die hier bestimmten Werte der normalen Explosionsgeschwindigkeit gegen die vorher angeführten aufweisen.

Für ein Brennerrohr von 150 cm Länge und 0,937 cm Durchmesser ergaben sich die Werte der folgenden Tabelle:

| $n$ % | $u$ cm/sec | $F$ cm² | $c$ cm/sec |
|---|---|---|---|
| 26,13 | 254,5 | 13,36 | 13,14 |
| 26,44 | 157,4 | 9,30 | 11,67 |
| 24,59 | 249,8 | 7,66 | 22,45 |
| 23,88 | 152,0 | 4,88 | 21,71 |
| 23,05 | 244,3 | 5,59 | 30,13 |
| 22,59 | 149,6 | 3,56 | 28,97 |
| 20,64 | 236,9 | 4,43 | 36,89 |
| 20,62 | 145,9 | 2,75 | 36,53 |
| 15,16 | 221,6 | 5,90 | 25,89 |
| 15,05 | 136,2 | 3,61 | 26,00 |
| 12,25 | 208,3 | 6,98 | 20,57 |
| 11,67 | 131,1 | 5,22 | 17,30 |

Die erste Spalte gibt wieder den Prozentgehalt des Gemenges an Leuchtgas, die zweite die Geschwindigkeit, mit der das Gemenge strömte, die dritte den Flächeninhalt der Brennfläche und die vierte die als Quotient aus Konsum und Brennfläche berechnete normale Explosionsgeschwindigkeit. Wie man sieht, ist die letztere nur vom Mischungsverhältnis abhängig, hingegen, wie das der Gouysche Satz verlangt, unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit. Zeichnet man die den beiden Geschwindigkeitsklassen zugehörigen Werte von $c$ in ein Diagramm, dann bemerkt man allerdings, daß die bei geringerer Strömungsgeschwindigkeit für $c$ erhaltenen Werte etwas niedriger liegen.

Die mit × bezeichneten Punkte, welche diesen Werten entsprechen, liegen alle, bis auf einen, ersichtlich tiefer. Doch

erklärt sich diese Differenz leicht als eine Folge der Wärmeabgabe an das Rohr, auf welchem der Flammenkegel ruht. Bezeichnen wir nämlich die Wärmemenge, welche durch die Flächeneinheit der Brennfläche in der Zeiteinheit dem Knall-

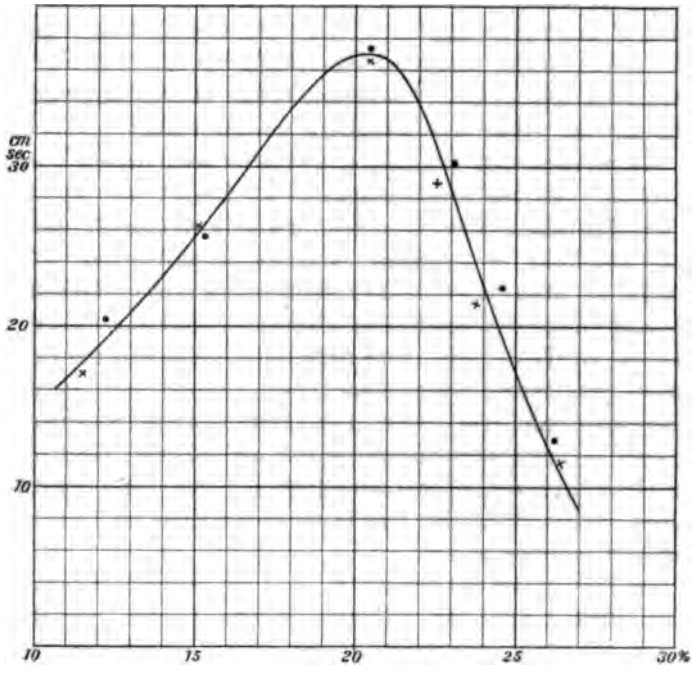



Fig. 6.

gas zugeführt wird, mit $W$ und mit $W'$ denjenigen Bruchteil der Wärme, welcher in der Zeiteinheit an das Rohr abgegeben wird und von dort in die Umgebung verloren geht, ist endlich $F$ der Flächeninhalt der Brennfläche, so wird nicht der Wärmebetrag $FW$, sondern nur $FW - W'$ dazu verwendet, um das zuströmende Gas von der Anfangstemperatur $t$ auf die Entzündungstemperatur $\tau$ zu bringen. Dementsprechend ist auch die auf diese Weise bestimmte Explosionsgeschwindigkeit $c$ stets etwas zu klein und wird durch die Gleichung

$$c = \frac{FW - W'}{q\,u\,\varrho\,\gamma\,(\tau - t)}$$

bestimmt, wo $q$ den Brennerquerschnitt, $u$ die Strömungs-

geschwindigkeit, $\varrho$ und $\gamma$ die Dichte und die spezifische Wärme des Knallgases bezeichnen (vgl. erste Mitteilung p. 414).

Da $W'$ von der Größe der Flamme nahezu unabhängig sein muß, wird dieser von der kühlenden Wirkung des Brennerrohres herrührende störende Einfluß um so größer sein, je kleiner $F$ ist. Am stärksten wird er sich demnach geltend machen, wenn die Flamme das Minimum an Flächeninhalt besitzt, wie das dann erreicht ist, wenn sie als vollkommene Ebene in das Rohr des Brenners zurückschlägt. Verwendet man als solches eine Glasröhre, so kann man diesen Vorgang beobachten und die Strömungsgeschwindigkeit so regulieren, daß das Zurückschlagen der Flamme mit möglichst geringer Geschwindigkeit — einigen wenigen Zentimetern in der Sekunde — stattfindet.[1]) Die Strömungsgeschwindigkeit um die Wanderungsgeschwindigkeit korrigiert, gibt für diesen Fall direkt die Größe $c$. Hier sind aber infolge des großen Wärmeverlustes die Werte stets um vieles kleiner als diejenigen, welche man an frei über der Brenneröffnung stehenden Flammen beobachtet. So wurde für ein 20 proz. Gemisch in einer Glasröhre von 0,7 cm Durchmesser der Wert 16 cm/sec erhalten, während an der frei brennenden Flamme 37,4 cm/sec beobachtet worden waren.

Der Gouysche Satz verlangt, daß die normale Explosionsgeschwindigkeit von den Krümmungsverhältnissen der Brennfläche unabhängig ist. Damit steht eine Beobachtung scheinbar im Widerspruch, die man am Brennkegel eines jeden Bunsenschen Brenners machen kann. Es zeigt sich nämlich dort, daß die Spitze des Kegels stets abgerundet ist. Die Neigung der verschiedenen Elemente der Brennfläche gegen die überall parallel und mit gleicher Geschwindigkeit vor sich gehende Strömung ist also verschieden groß und die normale Explosionsgeschwindigkeit hat somit in den verschiedenen Punkten der Brennfläche einen verschiedenen Wert. In der Tat steht ja das am obersten Punkte des Kegels befindliche Flächenelement $df$ auf der Strömungsrichtung sogar senkrecht

1) Zum Gelingen des Versuches ist es nötig, durch ein entsprechend langes Röhrensystem für gute Mischung und homogene Strömung zu sorgen. Auch darf das Brennerrohr nicht etwa infolge eines vorausgegangenen Versuches noch erhitzt sein.

und es ist daher dort die normale Explosionsgeschwindigkeit bis zur Geschwindigkeit der Strömung erhöht.

Gleichwohl ist diese Erhöhung der Explosionsgeschwindigkeit keine Folge der Krümmung der Brennfläche, sondern deren Ursache. Sie ist, wenigstens in erster Linie, durch die vom Kegelmantel aus dem in die Spitze einströmenden Gase erteilte Vorwärmung veranlaßt. Betrachten wir nämlich die in der Achse gelegene Strömungsröhre $mn$, welche in $df$ einmündet, wo das in ihr enthaltene Gas zur Verbrennung gelangt. Diesem Gas wird nicht nur von $df$ aus, sondern auch von den anliegenden Flächenelementen Wärme zugeführt, was dieselbe Wirkung hat, als ob das Gas vorgewärmt würde, d. h. mit einer höheren als der Anfangstemperatur gegen $df$ strömte. Das erhöht dann an dieser Stelle die Explosionsgeschwindigkeit. Es ist aber klar, daß dieses Plus an Wärme den peripher gelegenen Strömungsröhren entzogen wird, welch letztere dann infolge des Wärmeverlustes eine entsprechend erniedrigte Explosionsgeschwindigkeit aufweisen werden. Während also der Wert der normalen Explosionsgeschwindigkeit in der gegen die Strömungsrichtung geneigten Brennfläche von Punkt zu Punkt verschieden ist[1]), erscheint doch der über die ganze Fläche gebildete Mittelwert von der Konfiguration unabhängig, wie das dem Gouyschen Satze entspricht.

Fig. 7.

Natürlich wird diese Behauptung in den extremsten Fällen nicht mehr gelten. Sie gilt nur, solange die Tiefe, bis zu der die Wärmeströmung in den unentzündeten Brennstoff eindringt, eine kleine Größe gegen die bei den Beobachtungen vorkommenden Krümmungsradien der Oberfläche ist; wo

1) Der früher ausgesprochene Satz, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit des in eine beliebige Brennfläche einströmenden Gases überall die gleiche ist, und zwar gleich der normalen Explosionsgeschwindigkeit, bedarf also einer Einschränkung. Richtiger wäre es, zu sagen, daß die Normalkomponente gleich der normalen Explosionsgeschwindigkeit ist, diese aber in jedem Punkte eine verschiedene von der Konfiguration der Brennfläche und den Strömungsverhältnissen abhängigen Wert aufweist. Doch kommt diese Verschiedenheit merklich nur in den Spitzen oder Kanten der Brennfläche zur Geltung.

Krümmungsradius und Reichweite der Wärmeströmung von gleicher Größenordnung sind, wird der Gouysche Satz versagen.

Außerdem muß aber zur Gültigkeit des Satzes noch eine zweite Bedingung erfüllt sein; es muß nämlich die maximale Explosionsgeschwindigkeit die normale sehr wesentlich übertreffen. Genau würde der Satz nur gelten, wenn die maximale Explosionsgeschwindigkeit unendlich groß wäre und in die

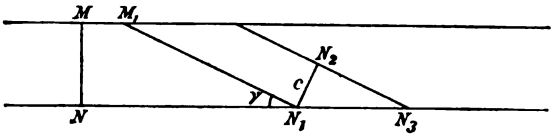



Fig. 8.

Richtung der Brennfläche fiele. Ist nämlich $MN = f$ eine, etwa in einer zylindrischen Röhre senkrecht zur Achse stehende Brennfläche, so schreitet sie, wenn wir von der kühlenden und retardierenden Wirkung der Wandung absehen, mit der Geschwindigkeit $c$ in der Röhre fort. Ist hingegen die Brennfläche unter dem Winkel $\gamma$ gegen die Achse geneigt, so fordert unser Satz, daß sich diese Geschwindigkeit auf $c/\sin\gamma$ erhöht; denn es ist ja nur dann der Quotient aus Konsum und Brennfläche $\frac{f(c/\sin\gamma)}{f/\sin\gamma} = c$. Während also die Explosion in einer bestimmten Zeit, etwa in einer Sekunde, senkrecht zur Brennfläche von $N_1$ nach $N_2$ fortschreitet, muß sie parallel zur Fläche, also vom Rande aus, mindestens die Strecke $N_2 N_3 = c/\mathrm{tg}\,\gamma$ zurückgelegt haben. Daraus ergibt sich, daß für kleine Werte von $\gamma$ die Geschwindigkeit in dieser Richtung sehr große Werte annehmen muß, ja daß, woferne wir die absolute Gültigkeit des Gesetzes postulieren wollten, die Fiktion nötig würde, daß sich die Explosion seitlich mit unendlich großer Geschwindigkeit ausbreitet.

Innsbruck, Physik. Inst. d. k. k. Universität.

(Eingegangen 2. Oktober 1907.)

# 8. *Über Kathodengefälle und Spektren einiger zusammengesetzter Gase;* *von Georg Gehlhoff.*

(Inaugural-Dissertation, Berlin 1907.)

## Einleitung.

Die Bestimmung der Kathodengefälle und Spektren zusammengesetzter Gase bietet sehr große Schwierigkeiten. Schließt man ein zusammengesetztes Gas in ein Geisslerrohr ein und schickt durch dieses eine Entladung, so wird einmal das Gas sehr schnell zersetzt, dann aber auch wird die Entladung infolge der Zersetzung häufig intermittierend, und durch beides wird die Messung unmöglich gemacht. Ebenso ist die Bestimmung der Spektren zusammengesetzter Gase durch die schnelle Zersetzung im geschlossenen Geisslerrohr nicht ausführbar.

Um den Einfluß der Zersetzung bei der Bestimmung des Kathodengefälles zu eliminieren, verfuhr Capstick[1]) folgendermaßen: Nachdem die Entladung eingesetzt hatte, ließ er durch Öffnen eines Hahnes frisches Gas zuströmen, welches die Kathode umspülte. Er beobachtete dann das Steigen des Kathodengefälles bis zur Unterbrechung der Entladung, wahrscheinlich durch Druckzunahme, was nach wenigen Sekunden in Ammoniak und Stickoxyd eintrat, während in Wasserdampf das Kathodengefälle durch Zulassen frischen Gases um 5—10 Volt sank. Er fand folgende Werte für das Kathodengefälle an Platin in Ammoniak, Wasserdampf und Stickoxyd:

| | |
|---|---|
| $NH_3$ . . . . | 582 (als Mittel aus zwei Messungen) |
| $H_2O$ . . . . | 469 |
| $(NO_2$ . . . . | 373). |

Der letzte Wert wird von Capstick eingeklammert angegeben, weil er glaubt, daß in Stickoxyd die Leitung von

1) J. W. Capstick, Proc. Roy. Soc. 63. p. 356. 1898.

Sauerstoff allein übernommen wird, da Sauerstoff das Kathodengefälle 369 hat.

Aus den beiden Zahlen zieht Capstick nun folgenden Schluß: „Es seien 149, 116 und 184 die Werte der Kathodengefälle für die Atome der Gase Wasserstoff ($H_2$... 298), Stickstoff ($N_2$... 232) und Sauerstoff ($O_2$... 369), so erhält man durch Addition der entsprechenden Werte für Wasserdampf ($H_2O$) das Kathodengefälle 482, und für Ammoniak ($NH_3$) 563 Volt; d. h. innerhalb der Fehlergrenzen setzen sich die Kathodengefälle zusammengesetzter Gase aus den für die Atome der Bestandteile hergeleiteten Werten additiv zusammen; das Kathodengefälle ist also eine Eigenschaft der Atome, nicht der Moleküle."

Da die Messungsmethode des Hrn. Capstick infolge der schnellen Zersetzung der zusammengesetzten Gase und der Inkonstanz der Entladung wenig befriedigende Resultate ergeben hatte, schlug Hr. Prof. E. Warburg vor, zu prüfen, ob nicht bessere Ergebnisse zu erhalten seien, wenn man das Gas in dauerndem Strome durch das Entladungsrohr schickte.

### A. Versuchsanordnung.

Zu diesem Zwecke wurde folgende Anordnung benutzt: Der Gasstrom trat in das eine Ende des Entladungsrohres durch eine feine Kapillare ein, welche in das Zuleitungsrohr luftdicht eingekittet bzw. eingeblasen war, während auf das andere Ende des Entladungsrohres eine Geryksche Ölluftpumpe wirkte; so wurde ein konstanter Gasstrom erhalten, dessen Druck von Querschnitt und Länge der Kapillare, vom Druck des Gases vor der Kapillare und von der Wirkung der Ölluftpumpe abhing. Die Form des Entladungsrohres war die übliche. Die Kathode, welche stets poliert war, wurde mittels eines Glasschliffes und einer Feder aus Platindraht eingesetzt, so daß der Abstand zwischen Kathode und Sonde, die bis auf eine feine Spitze in Glas eingeschlossen war, nach Herausnahme des Schliffes variiert werden konnte.

Fig. 1 veranschaulicht die Versuchsanordnung. Es bedeutet *P* Pumpe, *A* Anode, *S* Sonde, *Kt* Kathode, *Kp* Kapillare, *G* Gaszuleitungsrohr. Das Kathodengefälle wurde mit einem Quadrantelektrometer Warburgscher Konstruktion zwischen

Sonde und geerdeter Kathode gemessen. Das Quadrantelektrometer wurde durch die Potentialdifferenz der Enden eines bekannten von bestimmtem Strom durchflossenen Widerstandes geeicht. Die Ablesungen wurden mit Fernrohr (Fadenkreuz) und Skala gemacht; es wurden mittels eines Kommutators (das Elektrometer wurde in idiostatischer Schaltung benutzt) stets die Ausschläge nach beiden Seiten genommen.

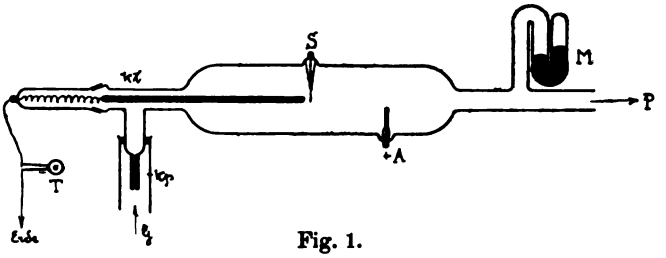



Fig. 1.

Die Zuleitungsdrähte zum Elektrometer waren gut isoliert. Als Stromquelle wurde eine Hochspannungsakkumulatorenbatterie benutzt, deren negativer Pol über einen regulierbaren Flüssigkeitswiderstand (Jodcadmiumlösung in Amylalkohol, Elektroden aus Cadmium und Cadmiumamalgam) geerdet war. Im Stromkreise befand sich ein Telephon (*T*), welches bei konstanter Entladung ruhig blieb, intermittierende Entladung durch Knacken oder Singen anzeigte. Der Druck wurde an einem Quecksilbermanometer (*M*) abgelesen.

### B. Kathodengefälle in Luft.

Es sollte zunächst durch einen Vorversuch festgestellt werden, ob das Strömen eines Gases von Einfluß auf das Kathodengefälle sei. Zu diesem Zwecke wurde Luft sorgfältig mit Kalilauge von Kohlensäure befreit und mit konzentrierter Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet; dann wurde sie durch eine Kapillare, deren Durchmesser 0,15 mm und deren Länge 25 cm betrug, von der Ölluftpumpe durch das Entladungsrohr in der Richtung von der Kathode nach der Anode gesaugt. Das Rohr konnte durch Hähne abgesperrt werden. Bei strömender Luft ließ sich der Druck durch die Tourenzahl der durch einen Motor angetriebenen Pumpe variieren.

Es ergaben sich für *ruhende* und *strömende* Luft bei den verwandten Drucken von 2—3 mm *gleiche* Werte für die Kathodengefälle, welche zwischen 338 und 345 Volt lagen. Der Abstand zwischen Kathode und Sonde betrug 2—3 mm. Der Mittelwert war 342 Volt, was mit den von Warburg gefundenen Werten (340—350 Volt) übereinstimmt. Wurde die Kapillare verkürzt, so daß die Strömungsgeschwindigkeit größer wurde, so wurden bei etwas höheren Drucken (3—4 mm) ähnliche Werte erhalten. Es ist also der Schluß erlaubt, daß das Kathodengefälle in *ruhender* und *strömender* Luft *gleich* ist, und zwar an Platin etwa 342 Volt beträgt. An Kupfer betrug es etwa 292 Volt, an Zink etwa 290 Volt.

Bei allen Messungen wurde darauf geachtet, daß das Telephon schwieg, d. h. der Strom konstant war.

### C. Kathodengefälle und Spektrum des Ammoniak.

Reines Ammoniak wurde auf folgende Weise hergestellt. Ammoniakwasser wurde erwärmt, das entweichende Gas über Calciumoxyd getrocknet und über Silberchlorid geleitet, welches durch ein Gemisch aus Salz und Eis gekühlt war. Nach Sättigung des Silberchlorids mit Ammoniak wurde das ganze Volumen einige Male schnell ausgepumpt, um etwaige Luftreste zu entfernen. Die gewünschten Drucke wurden durch Erwärmen des Silberchlorids mittels Wasserbäder erreicht und an einem geeichten Quecksilbermanometer mit abgeschlossenem Luftvolumen abgelesen.

Capstick hatte das Kathodengefälle in Ammoniak in der in der Einleitung beschriebenen Weise gemessen und an Platin zu 582 Volt als Mittel aus zwei Werten (570 und 594 Volt) bestimmt.

Auf dieselbe Methode bestimmte ich das Kathodengefälle und fand Werte von 450—570 Volt beim Aufhören der Entladung bei 3—4 mm Druck, wenn Spannungen von 2400 bis 3600 Volt benutzt wurden; bei der Druckzunahme kam die Sonde, deren Abstand von der Kathode etwa 6 mm betrug, allmählich in die positive Lichtsäule; jedoch auch wenn die Sonde sich noch im Faradayschen Raume befand, erhielt man bei verschiedenen Drucken verschiedene Werte für das Kathodengefälle, weswegen ich auf die Vermutung kam, daß

bei größeren Drucken das Gefälle in der negativen Glimmschicht und im Faradayschen Raume gegenüber dem Kathodengefälle durchaus nicht zu vernachlässigen sei. Es wurde deshalb das Gefälle bis zur Sonde in verschiedenen Abständen derselben von der Kathode bei gleichem Drucke und gleicher Strömungsgeschwindigkeit des Gases gemessen. Es wurde mit einer Kapillaren von 0,1 mm Durchmesser und 3 cm Länge gearbeitet. Der Druck vor derselben betrug 2 Atm.; der Druck des strömenden Gases war 12 mm.

Es wurden folgende Werte an Platin erhalten:

| Abstand zwischen Sonde u. Kathode | | Gefälle bis zur Sonde |
|---|---|---|
| 12 mm | | 488 Volt |
| 9 | | 460 |
| 6 | | 433 |
| 4 | | 410 |
| 2 | (Sonde berührt negatives Glimmlicht) | 390 |
| 1 | (Sonde berührt Crookesschen Raum) | 373 |

Fig. 2 gibt eine graphische Darstellung dieser Werte.

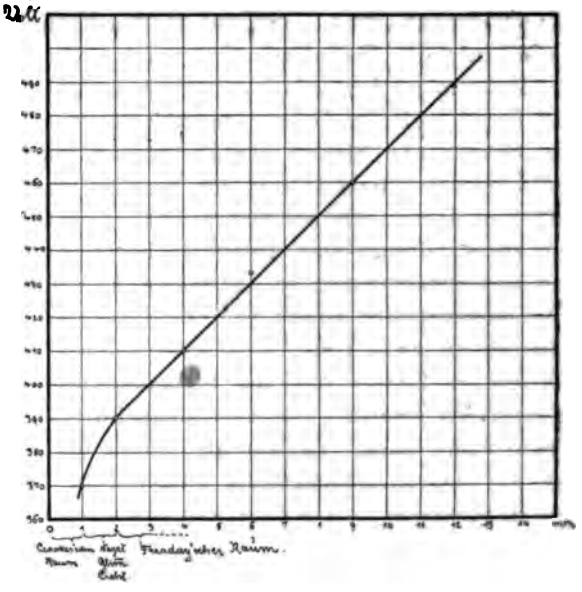


Fig. 2.

Wurde der Abstand zwischen Sonde und Kathode noch kleiner gewählt, so blieb der Wert des Kathodengefälles anfangs konstant; die Grenze des Crookesschen Raumes schien sich von der Sonde nach der Kathode hin einzubiegen.

Da Capstick keine Angaben über Druck und Spannung macht, so sind seine Werte schwer zu diskutieren. Jedoch sagt er im Anfange seiner Arbeit, daß der Abstand zwischen Sonde und Kathode stets 1 cm war, so daß hierdurch sowie durch das oben Gesagte wohl sein hoher Wert von 582 Volt zu erklären sein dürfte.

Wie Capstick in seiner Arbeit erwähnt, war es ihm nur selten möglich, konstante Entladungen zu erhalten, was das Singen des Telephons anzeigte. So gelang es ihm beim Ammoniak nur in zwei Fällen.

Ließ ich nun das Ammoniak dauernd durch eine Kapillare von 0,1 mm Durchmesser und 10 cm Länge strömen, so gelang es leicht, eine konstante Entladung, d. h. Schweigen des Telephons zu erhalten, wenn der Druck vor der Kapillaren 760 mm betrug. Der Druck im Entladungsrohr betrug dann etwa 5 mm. Derselbe begann zu sinken, wenn der Druck vor der Kapillaren abnahm, wobei jedoch das Kathodengefälle anfangs konstant, das Telephon ruhig blieb. Erst wenn der Druck im Zuleitungsrohre etwa auf $^2/_3$ Atm. gesunken war, begann auch bei weiterer Druckverminderung das Kathodengefälle zu sinken; der Einfluß der Zersetzung überwog dann offenbar die Geschwindigkeit, mit der frisches Gas zugeführt wurde. Es war dann auch nur selten möglich, eine konstante Entladung zu erhalten. Das Telephon hörte kaum auf zu singen und das Elektrometer gab unruhige Ausschläge.

Wurde hingegen der Druck vor der Kapillaren von einer Atmosphäre an bis zu 3 Atm.[1]) gesteigert, so stieg gleichzeitig der Druck bis zu 20 mm und die Strömungsgeschwindigkeit im Entladungsrohr, während das Kathodengefälle unverändert, das Telephon ruhig blieb. Es war also somit der Einfluß der Zersetzung auf das Kathodengefälle aufgehoben. Auch Verkürzen der Kapillare bis auf 3 cm ergab kein anderes Resultat.

1) Wurde der Druck noch weiter erhöht, bzw. die Kapillare verkürzt, so vermochte die Ölluftpumpe das zuströmende Gas nicht mehr zu bewältigen und blieb stehen.

Hierbei war noch folgendes zu beachten:

Bei allen früheren Messungen von Kathodengefällen war man so verfahren, daß die Potentialdifferenz zwischen Kathode und einem Punkte des negativen Glimmlichtes oder des Faradayschen Raumes gemessen wurde, da das Gefälle in denselben gegenüber dem Gefälle im Crookesschen Raume zu vernachlässigen ist. Dies war aber bei den Drucken, bei denen ich meine Messungen ausführen mußte, nicht angängig. Es zeigte sich nämlich, daß das Gefälle im negativen Glimmlicht vom Drucke abhängig ist und bei hohen Drucken Werte annimmt, die gegenüber dem Kathodengefälle nicht zu vernachlässigen sind.

Die Abhängigkeit des Gefälles im negativen Glimmlicht vom Drucke (für den Faradayschen Raum ist dieselbe schon bekannt (W. Graham[1]) und Skinner[2])) wurde so bestimmt, daß die Sonde auf die Grenze zwischen Faradayschem Raume und negativem Glimmlicht eingestellt und die Potentialdifferenz zwischen Kathode und Sonde bei verschiedenen Drucken gemessen wurde.

Folgende Mittelwerte aus etwa je 20—30 Messungen wurden erhalten:

| Druck in mm Quecksilber | Gefälle von Kathode bis negatives Glimmlicht inkl. |
|---|---|
| $p = 5$ mm | 375 Volt |
| 8 | 378 |
| 10 | 381 |
| 12 | 384 |
| 15 | 391 |

Fig. 3 gibt eine graphische Darstellung dieser Resultate.

Es wurde von jetzt ab bei allen Messungen von Kathodengefällen so verfahren, daß die Potentialdifferenz zwischen geerdeter Kathode und Grenze zwischen Crookesschem Raume und negativem Glimmlicht bestimmt wurde.[3]) Dieselbe betrug bei Ammoniak, wenn der Druck von der Kapillaren von 1 bis

1) W. P. Graham, Wied. Ann. **64.** p. 49. 1898.

2) C. A. Skinner, Wied. Ann. **68.** p. 752. 1899.

3) Diese Definition des Kathodengefälles stimmt mit der von J. Stark überein. J. Stark, Die Elektrizität in Gasen p. 169. 1902.

3 Atm., die Länge der Kapillaren von 10—3 cm variiert wurde, für alle Drucke von 5—15 mm im Entladungsrohre im Mittel 370 Volt. Die Stromstärke, die zwischen 0,5 und 2,1 Milliamp. variiert wurde, war ohne Einfluß auf das Kathodengefälle.

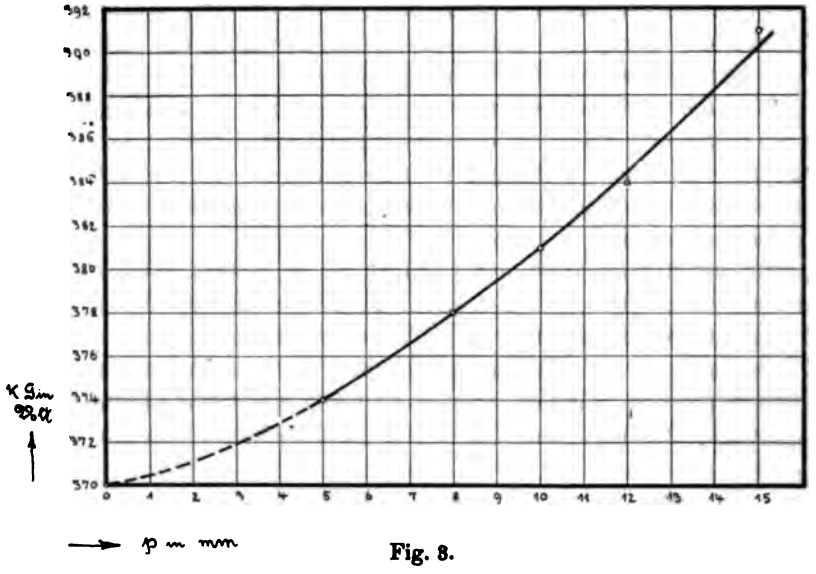



Fig. 3.

Wie Fig. 3 zeigt, ist das Gefälle im negativen Glimmlicht bei kleinen Drucken sehr klein gegenüber dem Kathodengefälle. Aus diesem Grunde sind meine Resultate sehr wohl vergleichbar mit allen früher gemessenen Kathodengefällen, die, soweit bekannt, immer bei kleinen Drucken erhalten wurden.

Das Kathodengefälle an Kupfer war entgegen dem Meyschen[1]) Gesetze, wonach die Metalle in bezug auf das Kathodengefälle dieselbe Stellung wie in der elektrostatischen Spannungsreihe haben, etwas größer, nämlich gleich 380—385 Volt. Dies stimmt überein mit dem von Warburg[2]) beobachteten Verhalten des Kupfers in Wasserstoff, der ja den Hauptbestandteil des Ammoniak ausmacht.

1) K. Mey, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 5. p. 72. 1903; vgl. auch C. A. Skinner, Phil. Mag. 8. p. 387—400. 1904.

2) E. Warburg, Wied. Ann. 31. p. 545. 1887.

An Zink betrug das Kathodengefälle in Ammoniak 330 Volt.

Es wurde auch der Einfluß der Zersetzung auf das Kathodengefälle untersucht. Ein abgeschlossenes Volumen Ammoniak zeigte bei der Zersetzung ein mit der Zeit sinkendes Kathodengefälle. Das Grenzkathodengefälle war schwierig zu messen, da Konstanz des Stromes schlecht zu erreichen war. Es ergaben sich bei verschiedenen Drucken nach einigen Stunden Stromdurchgang Werte zwischen 260 und 310 Volt an Platin. Der Mittelwert war etwa 290 Volt.

Die oben beschriebene Methode bietet auch einen Weg zur Bestimmung von Spektren solcher zusammengesetzter Gase, die im geschlossenen Geisslerrohr so schnell zersetzt werden, daß nur die Linien der Zersetzungsprodukte zum Vorschein kommen. Das negative oder positive Glimmlicht in strömendem Ammoniak zeigten nur eine gelbgrüne Bande von 568 bis 563 $\mu\mu$. Dieser Wert stimmt überein mit dem von Schuster[1]) gefundenen: Schuster hatte das Spektrum des Ammoniak so erhalten, daß er das Gas mittels flüssiger Luft durch eine Kapillare destillieren und eine elektrische Ladung hindurchgehen ließ.

### D. Kathodengefälle in Kohlenoxyd.

Reines Kohlenoxyd wurde durch Erwärmen von konzentrierter Ameisensäure und Schwefelsäure erhalten ($H_2SO_4 + H_2CO_2 = H_2SO_4 . H_2O + CO$). Das Gas wurde durch alkalische Pyrogallollösung von etwaigem Sauerstoff und Kohlensäure befreit nnd mit Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet.[2])

Die benutzte Kapillare hatte einen Durchmesser von 0,15 mm und eine Länge von 25 cm.

Bei der Entladung in strömendem Gase zeigte sich, daß sich die polierte Metallkathode bald mit einer Schicht blanker Kohle bedeckte, welche das Kathodengefälle erhöhte. Der

1) A. Schuster, Rep. Brit. Ass. 1872; Nature **6**. p. 358—360. 1872.

2) Auf das Trocknen der Gase wurde besonders große Sorgfalt verwendet, da, wie Warburg gezeigt hat, die Feuchtigkeit großen Einfluß auf das Kathodengefälle hat. E. Warburg, Wied. Ann. **40**. p. 1. 1890.

Grenzwert wurde schon nach einer Minute ganz erreicht und war unabhängig von dem Metall, auf das die Kohle niedergeschlagen wurde.

Das Kathodengefälle an Kohle in strömendem Kohlenoxyd betrug bei variiertem Drucke und Strömungsgeschwindigkeit 525 Volt, wenn die Sonde an der Grenze zwischen Faradayschem Raume und negativem Glimmlicht stand. Wurde das Rohr abgeschlossen, so wurde das Kathodengefälle kleiner; der Grenzwert wurde nach zwei Minuten erreicht und betrug im Durchschnitt 510 Volt; der Einfluß der Zersetzung war also merklich, wenn auch klein.

Das Gefälle an Metallen mußte in kurzer Zeit an immer wieder frisch polierten Elektroden gemessen werden. Es betrug an Platin etwa 490 Volt, an Kupfer etwa 484 Volt, an Zink etwa 479 Volt; letzterer Wert dürfte wohl deswegen zu groß sein, weil wahrscheinlich der Einfluß einer geringen Kohleschicht auf diesem Metall größer ist als an den beiden anderen Metallen infolge der größeren Differenz der Kathodengefälle.

Auch im geschlossenen Rohre bedeckten sich die Kathoden mit einer geringen Kohleschicht, die das Kathodengefälle allmählich, wenn auch wenig vergrößerte.

In strömendem Gase war nach $^1/_2$ Min. der Wert des Kathodengefälles an Kohle beinahe erreicht, während die Metallelektrode ihr Aussehen noch nicht verändert hatte. Nach 3—4 Min. wurde die Politur matter, man sah einen bronzefarbenen Niederschlag, der immer dunkler wurde und nach 9—10 Min. dunkelblau bis schwarz und glänzend aussah. Der Niederschlag verflüchtete sich in der Bunsenflamme; er haftete nicht fest und konnte abgekratzt bzw. mit Schmirgelpapier abgeschabt werden; es kam dann das blanke Metall zum Vorschein, welches das ursprüngliche Kathodengefälle wieder aufwies.

Auf eine Kupferkathode von 2 mm Durchmesser wurde mit einer Stromstärke von 3 Milliamp. 12 Min. lang Kohle niedergeschlagen. Dieselbe wog 0,4 mg. Wenn man das spezifische Gewicht derselben zu 1,9 (Wert für Gaskohle nach Landolt und Börnstein) annimmt, so berechnet sich daraus die Dicke der Schicht zu 0,032 mm. Wie oben erwähnt,

wurde der Grenzwert des Kathodengefälles an Kohle nach einer Minute erreicht. Die niedergeschlagene Schicht war dann also so dick, daß das Metall nicht mehr in Wirksamkeit trat; die für diese Schicht berechnete Dicke beträgt etwa 0,0027 mm (ein Wert, der natürlich nur angenähert ist).

Zehn solcher Elektroden mit Kohleüberzug wurden nebeneinander gelötet. Die Kohle erwies sich photoelektrisch ebenso empfindlich wie eine Rußschicht.[1]) Dies wurde so bestimmt, daß eine gleiche mit Terpentinruß überzogene Fläche von derselben Bogenlampe belichtet und die Zeit gemessen wurde, in der sich ein mit den Flächen verbundenes Elektrometer bei der Belichtung um einen bestimmten Betrag entlud. Während also diese elektrolytisch abgeschiedene Kohle ihrem Kathodengefälle nach sich der elektrostatischen Spannungsreihe einordnet, tut sie es ihrer photoelektrischen Empfindlichkeit nach nicht.

Bemerkenswert ist noch folgende auffällige beobachtete Erscheinung: War eine Kathode (die Erscheinung wurde hauptsächlich an einer Kupferkathode studiert, wurde jedoch auch an Platin beobachtet) mit Kohle überzogen, so bildete sich

Fig. 4.

nach einiger Zeit bei großer Stromstärke um das negative Kohlenoxydglimmlicht eine rötlich-violette Aureole, die jedoch nicht der Form des Kohlenoxydlichtes folgte, sondern an der Spitze der Kathode und an der Glaswand am schmalsten, in

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 152. 1902.

der Mitte am breitesten war. Fig. 4 zeigt eine Photographie dieser Erscheinung.

Man sieht in der Mitte die Kathode, daran schließt sich die erste Glimmschicht, der Crookessche Raum und die zweite Glimmschicht des Kohlenoxyd mit regelmäßiger Gestalt an; dann kommt die Aureole mit beinahe eiförmiger Gestalt. Ging die Entladung mit 2—3 Milliamp. längere Zeit durch das Rohr, so verschwand allmählich die Kohle und mit ihr die Erscheinung, oder dieselbe wurde doch sehr schwach, während das Kupfer wieder poliert aussah. Die sofort herausgenommene Kathode war dann so heiß, daß man sie nicht anfassen konnte. Wurde die Kathode abgekühlt und auf derselben wieder Kohle niedergeschlagen, so trat die Erscheinung wieder ein.

Ein Einfluß derselben auf das Kathodengefälle wurde nicht bemerkt.

Das Spektrum dieser Aureole wies drei helle Banden auf, welche nicht dem Kohlenoxyd angehörten; die Wellenlängen derselben, welche wegen Lichtschwäche nicht genau gemessen werden konnten, waren etwa 586, 543 und 473 $\mu\mu$. Dieselben gehören weder dem Kohlenoxyd noch dem Quecksilber noch sonst einem in Betracht kommenden Elemente an. Entweder rührt die Erscheinung von zerstäubter bzw. verflüchteter Kohle oder von einer Kohlenwasserstoffverbindung her, zu der der Wasserstoff aus dem Metall kam, da das Kohlenoxyd zuverlässig trocken war.[1])

Es soll später auf diese Erscheinung (unter F.) zurückgekommen werden.

### E. Kathodengefälle und Spektrum der Kohlensäure.

Reine Kohlensäure wurde aus einer Lösung von Natriumbikarbonat in gut ausgekochtem, destilliertem Wasser und luft-

1) Die Werte für das Kathodengefälle in Kohlenoxydgas dürften sämtlich etwas zu groß sein, da der Abstand zwischen Kathode und Sonde 3—4 mm betrug, so daß die Sonde nicht den Crookesschen Raum berührte. Diese Untersuchungen gingen zeitlich denen im Ammoniak voraus; es sind daher nach dem unter C. Gesagten etwas kleinere Werte zu erwarten. Da jedoch diese Werte bei kleinen Drucken erhalten wurden, so sind sie mit den übrigen gut vergleichbar.

freier verdünnter Schwefelsäure hergestellt. Sie wurde durch Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet.

Die verwandte Kapillare war 8 cm lang und hatte einen Durchmesser von 0,1 mm.

Eine Ausscheidung von Kohle an der Kathode wurde erst nach sehr langem Arbeiten bemerkt.

Das auf die unter C. gekennzeichnete Weise gemessene Kathodengefälle in Kohlensäure an Platin betrug im Durchschnitt 475 Volt, an Kupfer 460 Volt, an Zink 410 Volt, wenn die Sonde an der Grenze des Crookesschen Raumes stand.

Das negative Glimmlicht sah in strömendem Gase rein blau aus, das positive schwach rosa. Ersteres wurde in ruhendem Gase nach wenigen Sekunden grünlich und nahm schließlich die Farbe des Kohlenoxydlichtes an, letzteres wurde fast momentan grünlich weiß.

Das Spektrum des negativen Glimmlichtes in Kohlensäure hatte mehrere Banden im Blauen und Grünen, eine hellere im Orange und im Rot. Die letztere ist auch schon von Plücker[1]) im abgeschlossenen Geisslerrohr im Anfange der Entladung bemerkt worden.

Große Genauigkeit war bei der Ausmessung des Spektrums der Kohlensäure wegen zu geringer Lichtintensität nicht möglich. Vergrößerte man die elektrische Intensität und damit die Helligkeit des Lichtes, so traten die Kohlenoxydbanden hervor, während die Kohlensäurebanden nicht viel heller wurden.

Zur Bestimmung der Wellenlängen der Kohlensäurebanden bediente ich mich eines kleinen geeichten Handspektroskopes mit einer Skala, welche die Wellenlänge abzulesen gestattete.

Es wurden folgende Banden gemessen (ausgedrückt in $\mu\mu$):

| | |
|---|---|
| 650 | 500 |
| 594 | 473 |
| 570 | 460—455 (mehrere Banden). |

Sehr hell ist namentlich die orange Linie 500 $\mu\mu$. Im violetten Teile des Spektrums waren noch sichere Unterschiede zwischen Kohlensäure- und Kohlenoxydspektrum vorhanden.

1) J. Plücker, Pogg. Ann. **107.** p. 497. 1859.

Doch war die Messung in diesem Gebiete des Spektrums nicht auszuführen.

In einem Spektralrohre mit Kapillare war die Zersetzung so stark, daß nur das Kohlenoxydspektrum erschien.

### F. Kathodengefälle und Spektrum des Methan.

Das Methan wurde aus Aluminiumkarbid und Wasser hergestellt ($Al_4C_3 + 6H_2O = 2Al_2O_3 + 3CH_4$); um es von Acetylen, Schwefelwasserstoff und Kohlensäure zu befreien, wurde es mit Aceton, Wasser, ammoniakalischer Kupfersulfatlösung und Kalilauge gewaschen und dann mit Calciumchlorid und Phosphorpentoxyd getrocknet.

Das Kathodengefälle in Methan ließ sich leider nicht bestimmen, da keine konstante Entladung zu erhalten war. Die Kathode bedeckte sich in strömendem Gase auch mit einem Kathodenniederschlag, der aber nicht blank, sondern rauh war; bei der Entladung liefen an der Oberfläche der Kathode Fünkchen entlang, das Glimmlicht flackerte, kurz die Entladung war stets so inkonstant, daß das Elektrometer immer unruhig war, und das Telephon nicht aufhörte zu singen und zu knacken.

Die Farbe des negativen Glimmlichtes war dieselbe, wie die der unter D. beschriebenen Erscheinung. Die Banden hatten die Wellenlängen 586, 543 und 473 $\mu\mu$. Demnach scheint jetzt der Schluß erlaubt, daß die unter D. beschriebene Erscheinung vom Methan (bzw. einem Kohlenwasserstoff) herrührt, wozu der Wasserstoff aus der heißen Elektrode geliefert wurde.

Hierfür spricht auch noch der Umstand, daß die Banden des Methan sehr schnell verschwanden, wenn man ein Rohr mit blanker Kathode mit frischem Methan beschickte und dieses durch den Strom zersetzen ließ. Es traten dann die Wasserstofflinien sehr bald hervor. War dagegen die Kathode mit Kohle bedeckt, so wurden die Methanbanden bei der Zersetzung des Gases im abgeschlossenen Rohr zwar bedeutend schwächer, verschwanden aber erst nach längerer Zeit oder überhaupt nicht.

### G. Kathodengefälle und Spektrum im Stickstoffdioxyd.

Reines Stickstoffdioxyd wurde durch Erhitzen von Bleinitrat zusammen mit Stickstofftetroxyd und Sauerstoff erhalten. $\left(2\,PbNO_3 = \begin{matrix}(N_2O_4)\\ 2\,NO_2\end{matrix} + 2\,PbO.\right)$ Die entweichenden Gase gingen durch ein Trockenrohr, ferner durch ein Kühlrohr, in welchem das Gemisch von Stickstoffdioxyd und -tetroxyd verflüssigt wurde. Das Kühlrohr wurde dann abgeschmolzen und durch Erwärmen der Flüssigkeit der erwünschte Druck erreicht. Die Luft wurde durch mehrmaliges Sieden der Flüssigkeit vertrieben.

Um im Entladungsrohr nur Stickstoffdioxyd zu erhalten (nach Ostwald ist das Gemisch bei 2,3 cm Druck und 100° C. vollständig dissoziiert), wurde dasselbe mit einer Glasschlange in ein Bad von Paraffinöl gebracht, welches durch eine elektrische Heizspirale auf 110—115° erwärmt wurde. Das Gas ging dann zuerst durch ein Phosphorpentoxydrohr, dann durch die Glasschlange und durch das Entladungsrohr an der Kathode vorbei, so daß anzunehmen war, daß nur Stickstoffdioxyd die Kathode umspülte.

Als Mittelwert aus mehreren Messungen für das Kathodengefälle in Stickstoffdioxyd an Platin wurde 387 Volt gefunden, bei Drucken von 5—7 mm.

Wurde das Entladungsrohr nicht erwärmt, fand also der Durchgang des Gases durch dasselbe bei Zimmertemperatur (10° C.) statt, so wurden für das Kathodengefälle in dem Gemische von Stickstoffdioxyd und -tetroxyd Werte gefunden, die sich von dem obigen nicht merklich unterscheiden. Es läßt sich auch wohl annehmen, daß bei den verwandten Drucken der Dissoziationsgrad schon einen ziemlich hohen Betrag erreicht hat, trotz der geringen Temperatur.

Ein sehr merkwürdiges Verhalten zeigte das Kathodengefälle im abgeschlossenen Rohre: Mit zunehmender Zersetzung des Stickstoffdioxyds nahm das Kathodengefälle sehr schnell ab, erreichte ein Minimum und fing dann wieder an zu wachsen. Bisweilen war das Minimum sehr stark (vgl. Fig. 5, I), bisweilen nur sehr schwach ausgeprägt (Fig. 5, II),

ohne daß hierfür ein sichtbarer Grund oder ein Unterschied in den Versuchsbedingungen vorlag. Fig. 5 zeigt die Abhängigkeit des Kathodengefälles von der Zeit im abgeschlossenen Gasvolumen; beide Kurven wurden bei gleichen Drucken ($p = 6$ mm) und gleicher Stromstärke ($i = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$) erhalten. Auch war es nicht möglich, durch Veränderung des Druckes oder der Stromstärke die *eine oder* die *andere* Kurve zu erhalten. Vielleicht hat dies seinen Grund in Diffusionsvorgängen.

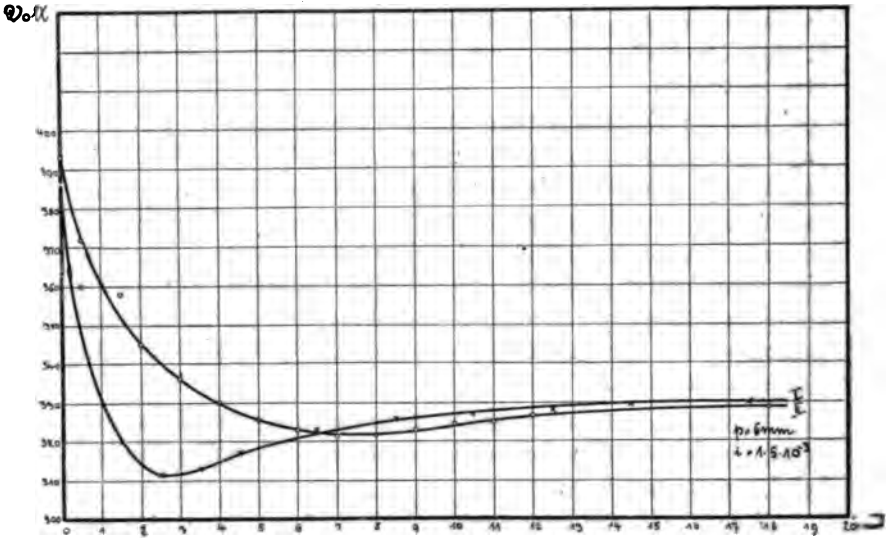



Fig. 5.

Wird die Abnahme des Kathodengefälles durch die Zersetzung des Stickstoffdioxyds bedingt, so läßt sich der Anstieg vielleicht durch die gleichzeitige Bildung einer mehrwertigen Stickstoff–Sauerstoffverbindung oder durch Rückbildung von Stickstoffdioxyd erklären.

Das Aussehen der Entladung, welches sich von dem der Entladung in anderen Gasen wesentlich unterschied, war sowohl in diesen beiden Fällen, als auch in den beiden anderen untersuchten Stickstoff–Sauerstoffverbindungen das gleiche. Es soll deshalb nur an dieser Stelle eine genaue Beschreibung stattfinden, auf welche ich mich später beziehen will.

Das bläulichweiße negative Glimmlicht im Stickstoffdioxyd war von einer dritten nicht scharfbegrenzten Glimmschicht von gelblicher Farbe umgeben. Das positive Glimmlicht sah bei Drucken von 3—7 mm bläulich aus und war gleichfalls von einer gelblichen Lichtschicht umgeben. Letztere erfüllte bei Drucken von 1—3 mm das ganze Rohr bis zu dem ziemlich großen Faradayschen Raume; ebenso dehnte sich die dritte negative Glimmschicht bis zur Glaswand auch noch hinter dem bläulichweißen Glimmlicht aus, während das bläuliche anodische Glimmlicht fast ganz verschwand. Besonders auffällig war aber, daß das gelbe Licht mit fast gleicher Helligkeit auch den Raum hinter der Anode ausfüllte und sich selbst in benachbarte Glasröhren fortpflanzte, wo es dann allmählich bis zum Verschwinden abnahm. Fig. 6 gibt eine Skizze dieser Erscheinung. (Vgl. auch Fig. 9.)

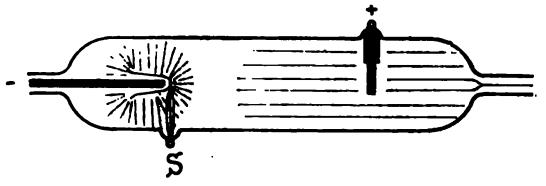



Fig. 6.

Wie oben schon gesagt ist, war der Unterschied in der Helligkeit zwischen den vor und hinter der Anode liegenden Teilen des gelben Lichtes nicht groß. Um so größer war der Unterschied ihrer Wirkung auf die photographische Platte. Figg. 7 und 8 zeigen dies deutlich: Fig. 7 wurde bei einer Belichtungszeit von 2 Minuten erhalten. Während der untere Teil fast gar keine Schwärzung hervorgebracht hat, ist dies beim oberen Teile schon ganz deutlich der Fall. Die Anode bildet die ziemlich scharfe Trennungslinie. Fig. 8 wurde bei einer Belichtungszeit von 5 Minuten erhalten. Der obere Teil ist bereits ganz schwarz, der untere erst grau.

Es scheint also der obere Teil mehr chemisch wirksames Licht als der untere auszusenden. Hierfür spricht auch noch ein weiterer Umstand: Durch das Licht der Entladung im Stickstoffdioxyd und -tetroxyd wurde das Glas zu sehr leb-

hafter heller Fluorescenz erregt. Dieses war nun bei dem oberen, dem der Kathode zugeneigten Teile des gelben Lichtes in größerem Maße der Fall als bei dem der Kathode abgewandten Teile, was man in Figg. 7 und 8 auch noch erkennen kann. Demnach dürfte wohl der Schluß erlaubt sein, daß der hinter der Anode liegende Teil des gelben Lichtes sekundären Ursprunges ist, sei es, daß es durch Absorption von ultraviolettem Lichte erregt wird, sei es, daß es sich um

Fig. 7.

Fig. 8.

Phosphoreszenz des Gases handelt oder sei es, daß über die Anode noch hinausfliegende Ionen das hinter demselben liegende Gas zum Leuchten bringen. Auch wird man die dritte Glimmschicht an der Kathode als sekundäre Erscheinung ansprechen müssen.

Ob sich das gelbe Licht auch noch hinter einer das Entladungsrohr abschließenden Quarzplatte fortpflanzte, konnte mit Sicherheit nicht unterschieden werden. Doch glaube ich, ein sehr schwaches gelbes Leuchten bisweilen gesehen zu haben.

Zur Untersuchung des Spektrums in den einzelnen Teilen der Entladung wurde ein Geisslersches Spektralrohr verwandt. Fig. 9 zeigt die typische Erscheinung in demselben.

Das gelbe Licht der durch die Anode getrennten Teile in der unteren Erweiterung des Rohres zeigte dasselbe *kontinuierliche* Spektrum von 650 bis 450 $\mu\mu$ mit schnellem Anstieg der Intensität im roten Teile des Spektrums, einem Maximum bei 550 $\mu\mu$ und von da ab langsam abfallender Intensität bis zum Blauvioletten.

Fig. 9.

Das rötlichblaue Licht im kapillaren Teile zeigte außer Stickstoffbanden folgende Banden in $\mu\mu$ auf schwachem, kontinuierlichem Grunde, der nach obigem verständlich ist. (Die Messungen wurden mit demselben Handspektroskop gemacht wie bei der Kohlensäure):

686
626
617
601, 598 } Sehr helle Banden!
594—584 Mehrere schwache Banden.
563
554—552 Helle Bande.
542 „ „
526
521

Dieselben kennzeichneten sich dadurch als Stickstoffdioxyd- bzw. -tetroxydbanden, daß sie bei der Zersetzung verschwanden,

bei Zulassen von frischem Gase wieder erschienen. Bei großem Drucke und großer Strömungsgeschwindigkeit waren die Stickstofflinien gar nicht zu sehen, dafür wurden aber auch die Stickstoffdioxyd- bzw. -tetroxydbanden schwächer und der kontinuierliche Grund sehr viel heller, so daß die schwachen Linien kaum zu sehen waren. Es erwies sich deswegen als praktischer, bei geringeren Drucken auf die verschwindenden bzw. neu erscheinenden Linien zu achten und deren Wellenlänge zu bestimmen.

Im negativen, bläulichen Glimmlicht waren wegen geringerer Helligkeit nur die stärkeren Banden zu sehen. Die dritte, gelbe Glimmschicht zeigte dasselbe kontinuierliche Spektrum wie das gelbe, anodische Licht.

Eine Messung mit erwärmtem, d. h. vollständig dissoziiertem Gase wurde nicht ausgeführt, so daß sämtliche optischen Resultate sich auf ein Gemisch aus Stickstoffdioxyd und Stickstofftetroxyd beziehen. Doch dürfte wohl nach dem oben (p. 567) Gesagten kein wesentlich anderes Resultat zu erwarten gewesen sein.

### H. Kathodengefälle und Spektrum in Stickstoffmonoxyd (Stickoxyd).

Reines Stickoxyd wurde durch Eintropfen von konzentrierter Natriumnitritlösung in eine salzsaure Lösung von Eisenchlorid erhalten. ($FeCl_2 + NaNO_2 + 2HCl = FeCl_3 + Na.Cl + H_2O + NO$). Nachdem das entweichende Gas, welches mittels konzentrierter Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet wurde, ganz farblos geworden war, wurde angenommen, daß alle Luft vertrieben war und abgeschmolzen.

Das Kathodengefälle in strömendem Stickoxyd an Platin betrug bei verschiedenen Drucken (5—15 mm) und Stromstärken im Mittel 365 Volt.

Bei der Zersetzung des Gases hatte das Kathodengefälle denselben Verlauf, der im vorigen Abschnitt gekennzeichnet wurde: Zuerst Abfall bis zu einem mehr oder weniger stark ausgeprägten Minimum, dann Anstieg bis zu einem Grenzwerte. Fig. 10 zeigt drei derartige Kurven, die unter gleichen Versuchsbedingungen erhalten wurden ($p = 10$ mm, $i = 1{,}7 \times 10^{-3}$).

Hier dürfte der Anstieg durch Stickstoffdioxydbildung zu erklären sein.

Das Aussehen der Entladung in Stickoxyd war genau das gleiche wie in Stickstoffdioxyd. Das gelbe Licht gab ein kontinuierliches Spektrum von 700—490 $\mu\mu$, dessen Intensität bei 700 $\mu\mu$ sehr stark anstieg und vom Grünen ab langsam abfiel.

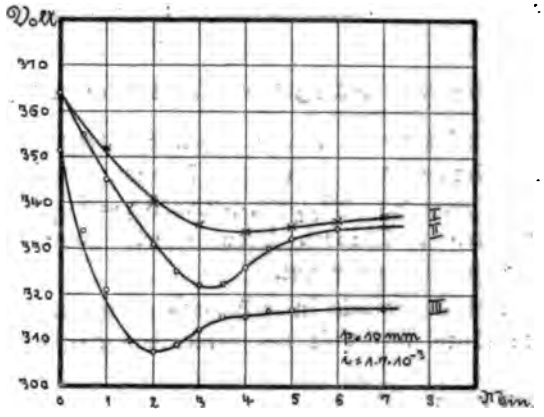



Fig. 10.

Das positive Licht in der Kapillare enthielt folgende Banden in $\mu\mu$:

| | |
|---|---|
| 656 | |
| 635 | |
| 618 | |
| 602 } | Sehr helle Banden |
| 598 } | |
| 593—586 | Mehrere schwache Banden |
| 554—551 | Sehr helle Bande |
| 540 | |
| 524 | |

Ein Vergleich mit dem Spektrum des Stickstoffdioxyds zeigt, daß fast alle diese Zahlen mit jenen übereinstimmen. Obwohl vor den Kapillaren bisweilen ein Druck von $2^1/_2$ Atm. herrschte, die Strömungsgeschwindigkeit im *Vakuum*spektralrohr also sehr groß war, obwohl schwächerer Strom angewandt

wurde, war es nicht möglich, andere Linien zu finden, so daß man es hier also offenbar mit dem Spektrum des Stickstoffdioxyds zu tun hat, welches vielleicht dadurch entstand, daß der durch die Zersetzung frei gewordene Sauerstoff mit Stickoxyd sofort Stickstoffdioxyd bildete, da ersteres bekanntlich sehr große Affinität zum Sauerstoff hat. Doch ist es auch nicht ausgeschlossen, daß die gemessenen Banden teils dem Stickoxyd, teils dem Stickstoffdioxyd angehören.

### I. Kathodengefälle und Spektrum in Stickoxydul (Lachgas).

Reines Stickoxydul wurde durch Erhitzen eines gut getrockneten Gemisches äquivalenter Mengen von Natriumnitrat und Ammoniumsulfat $(NH_4)_2SO_4 + 2NaNO_3 = NO_2SO_4 + 4H_2O + 2NO_2$ erhalten und durch konzentrierte Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrocknet.

Das Kathodengefälle in strömendem Stickoxydul an Platin betrug im Mittel 331 Volt bei verschiedenen Drucken (6 bis

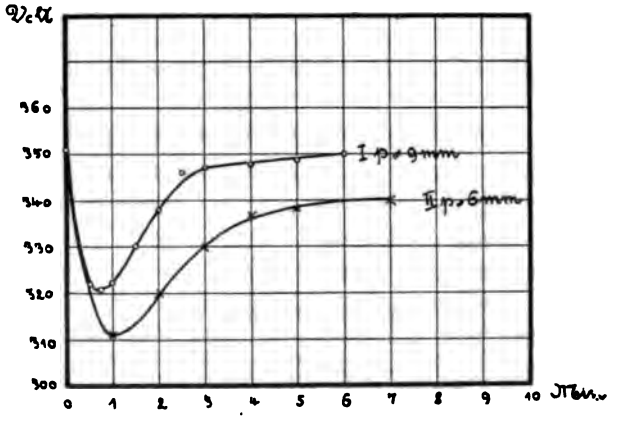



Fig. 11.

9 mm) und Stromstärken. Es konnten nur sechs Messungen gemacht werden, welche 320, 332, 340, 330, 325 und 320 Volt ergaben, weil infolge des großen Gasverbrauches beim Strömen die erste Füllung (mit Natriumnitrat und Ammoniumsulfat) bald verbraucht war und zwei weitere Füllungen heftig explo-

dierten, da die chemische Reaktion zu schnell verlief, weshalb von weiteren Messungen abgesehen wurde.

Der Einfluß der Zersetzung machte sich im Stickoxydul viel mehr geltend als in den beiden vorher untersuchten Stickoxyden. Das sehr scharf ausgeprägte Minimum trat schon nach einer Minute ein, nach dem Anstieg, der auch ziemlich schnell erfolgte, wurde beinahe der Anfangswert des Kathodengefälles erreicht.

Fig. 11 zeigt zwei bei 9 (I) und 6 mm (II) Druck durchgeführte Messungen. Unter anderen Bedingungen wurden ähnliche, aber niemals abgeflachte Kurven erhalten.

Die Entladung hatte auch in diesem Gase ungefähr dasselbe Aussehen wie in den beiden vorigen; die Fluorescenz des Glases war etwas stärker als die durch das Licht der beiden anderen Stickoxyde erregte. Das gelbe Licht zeigte ein kontinuierliches Spektrum von 670—450 $\mu\mu$, das Maximum erstreckte sich von 630—530 $\mu\mu$. Die Farbe des Lichtes war etwas grünlich.

Das anodische Glimmlicht in der Kapillaren des Spektralrohres enthielt folgende Banden (ausgedrückt in $\mu\mu$):

| | |
|---|---|
| 602<br>599 | Helle Banden (?) |
| 553 | |
| 532 | Helle Banden |
| 519 | |
| 504 | |

Die beiden ersten Banden scheinen mit solchen des Stickstoffdioxyds identisch zu sein; die letzten gehören aber dem Stickoxydul an.

### Zusammenfassung der Resultate.

1. Wenn man ein zusammengesetztes Gas dauernd durch ein Geisslerrohr strömen läßt, so ist es bei genügender Zuführung frischen Gases möglich, den Einfluß der Zersetzung zu eliminieren und eine konstante Entladung zu erhalten, was dadurch gekennzeichnet wird, daß ein in den Stromkreis eingeschaltetes Telephon ruhig bleibt. Auf dieselbe Weise lassen

sich Spektren solcher zusammengesetzter Gase erhalten, die im geschlossenen Geisslerrohr zu schnell zersetzt werden.

2. Das Strömen des Gases hat auf das Kathodengefälle keinen Einfluß, wie durch Messung des Kathodengefälles in ruhender und strömender Luft gezeigt wurde. Dasselbe betrug in beiden Fällen an Platin etwa 342 Volt.

3. Das Gefälle im negativen Glimmlicht ist vom Drucke abhängig und bei *größeren* Drucken gegenüber dem Kathodengefälle nicht zu vernachlässigen. Da ich gezwungen war, bei Drucken über 5 mm zu messen, so wurde bei allen Messungen so verfahren, daß sich die Sonde an der Grenze des Crookesschen Raumes befand. Die Werte für das Kathodengefälle in Kohlenoxydgas, sowie alle früher gemessenen sind mit den von mir gemessenen Kathodengefällen wohl vergleichbar.

4. Das Kathodengefälle in Ammoniak betrug bei Platin 370 Volt, an Kupfer etwa 380—385 Volt, an Zink 330 Volt. Das Spektrum des Ammoniak zeigt eine grüne Bande von 560—563 $\mu\mu$.

5. Das Kathodengefälle in Kohlenoxyd an durch den Strom ausgeschiedener Kohle beträgt 525 Volt, an Platin 490 Volt, an Kupfer 484 Volt, an Zink 478 Volt. Es wurde an einer Kohlekathode das Auftreten einer Aureole von eiförmiger Gestalt um das negative Kohlenoxydglimmlicht beobachtet, deren Spektrum dem Kohlenoxyd nicht angehört. Drei Banden mit den Wellenlängen 586, 543 und 473 $\mu\mu$ wurden später als dem Methan zugehörig bestimmt. Die bei der Zersetzung ausgeschiedene Kohle war photoelektrisch empfindlich.

6. Das Kathodengefälle in Kohlensäure beträgt an Platin 475 Volt, an Kupfer 460 Volt, an Zink 410 Volt. Das Spektrum der Kohlensäure besteht aus den Banden 650, 594, 570, 500, 473 und 460—455 $\mu\mu$.

7. Das Kathodengefälle in Methan ließ sich wegen Inkonstanz der Entladung, hervorgerufen durch unregelmäßige Kohleausscheidung an der Kathode, nicht bestimmen. Das Spektrum des Methan wurde ausgemessen; es enthält die Banden 586, 543 und 473 $\mu\mu$.

8. Das Kathodengefälle in Stickstoffdioxyd beträgt an Platin 387 Volt, in Stickoxyd an Platin 365 Volt, in Stick-

oxydul an Platin etwa 331 Volt. Bei der Zersetzung der Stickoxyde sank das Kathodengefälle zu einem Minimalwerte herab und näherte sich dann ansteigend einem Grenzwerte.

Das Steigen des Kathodengefälles in einem abgeschlossenen Luftvolumen bis auf 400 Volt, welches von Warburg[1]) beobachtet wurde, ist nach den mit höherer Oxydationsstufe der Stickstoff-Sauerstoffverbindungen steigenden Werten für das Kathodengefälle durch Stickstoffdioxydbildung zu erklären.

Das negative Glimmlicht der Stickoxyde, das bläulichweiß aussah, war von einer dritten gelben, nicht scharf begrenzten Glimmschicht umgeben. Bei Drucken von 1—3 mm verschwand das anodische Glimmlicht; das ganze Rohr wurde vom Faradayschen Raume selbst bis hinter die Anode von einem gelblichen Lichte ausgefüllt, welches ein kontinuierliches Spektrum gab. Das anodische Glimmlicht des Stickstoffdioxyds und des Stickoxyds ergab dasselbe Spektrum, welches die Banden (656), 636 (635), 626, 617 (618), 601 (602), 598 (598), 594—584 (593—586), 562, 554—552 (554—551), 542 (540), 526 (524) und 521 $\mu\mu$ enthielt (die eingeklammerten Werte gelten für Stickoxyd).

Das anodische Glimmlicht des Stickoxyduls enthielt die Banden 602 (?), 599 (?), 553, 532, 529 und 504 $\mu\mu$.

9. Das von Capstick[2]) aufgestellte Gesetz, wonach sich die Kathodengefälle zusammengesetzter Gase additiv aus den für die Atome der Bestandteile berechneten Gefällen zusammensetzen sollen, konnte nicht bestätigt werden. Der von Capstick gefundene Wert für Ammoniak ist wahrscheinlich zu groß.

Es sei noch erwähnt, daß die von Matthies[3]) für die Halogenverbindungen des Quecksilbers inzwischen publizierten Werte der Capstickschen Auffassung auch widersprechen.

Die Kathodengefälle an Platin im Chlor, Brom und Jod betragen nach Bode[4]) 320 bzw. 476 bzw. 380 Volt, in Queck-

1) E. Warburg, l. c.
2) J. W. Capstick, l. c.
3) W. Matthies, Ann. d. Phys. 17. p. 675. 1905.
4) G. Bode, Physik. Zeitschr. 6. p. 618. 1905.

silberdampf nach Warburg[1]) 340 Volt, während die Kathodengefälle in Quecksilberchlorid, -bromid und -jodid nach Matthies 365 bzw. 395 bzw. 432,5 Volt betragen.

Diese Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt. Für die Anregung zu den Untersuchungen bin ich Hrn. Geheimrat Warburg, für stetiges Interesse und Förderung eben demselben, sowie Hrn. Prof. Drude† zu größtem Dank verpflichtet.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 40. p. 13. 1890.

(Eingegangen 8. Oktober 1907.)

# 9. *Über die Bedeutung der Resonanz in der Theorie der Spektrallinien;* von *V. Walfrid Ekman.*

## Einleitung.

Die Breite der Spektrallinien kann auf zwei wesentlich verschiedenen Ursachen beruhen: teils auf dem von der Bewegung der Strahlungszentren (Gasmoleküle) hervorgebrachten Doppler-Effekt, teils auf dem Umstande, daß in den Strahlungszentren selbst nicht einfach harmonische Schwingungen ausgeführt werden.

Die Bedeutung der erstgenannten Ursache ist als Ergebnis theoretischer Berechnungen von H. Ebert und Lord Rayleigh und der Beobachtungen von Michelson sicher festgestellt; und zwar kann man behaupten, daß im Falle sehr verdünnter Gase der Doppler-Effekt jedenfalls die wesentlichste Ursache der Linienbreite, sowohl bei Emission wie bei Absorption, ist.[1])

Um die Verbreiterungserscheinungen bei vergrößerter Dichte zu erklären, muß die zweite der oben erwähnten Ursachen zu Hilfe genommen werden. Man hat zu diesem Zweck viele verschiedene Hypothesen und Theorien aufgestellt[2]), bei denen vier wesentlich verschiedene Anschauungen zu unterscheiden sind:

1. Daß jedes einzelne Gasmolekül ein kontinuierliches Spektrum emittiere (bzw. absorbiere), und daß die Verbreiterungserscheinungen Folgerungen der *Kirchhoffschen Gesetze* seien. Gegen diese Anschauung hat man u. a. den Einwand erhoben, daß die Verbreiterung nicht, wie die Theorie es fordert, auch bei vergrößerter *Dicke* der emittierenden bzw. absorbierenden Schicht entsteht.

2. Daß die lichterregenden molekularen Schwingungen unter der Einwirkung einer Art von Reibung mehr oder

1) Vgl. hierüber auch O. Schönrock, Ann. d. Phys. 20. p. 995. 1906.

2) Vgl. z. B. H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie II. p. 241 f. und 315 f.

weniger *gedämpft* werden, je nachdem die Dichte des emittierenden Gases größer oder geringer ist. Diese Anschauung ist aber, jedenfalls vom Gesichtspunkte der elektromagnetischen Lichttheorie aus, nicht verständlich.

3. Daß die Inhomogenität der Strahlung durch die *Zusammenstöße* der Moleküle bedingt werde — sei es wegen der plötzlichen Änderungen von Phase und Schwingungsamplitude der freien Schwingungen oder infolge der erzwungenen Schwingungen während der Zusammenstöße. Auch diese Wirkung kann indessen nur ganz unbedeutend sein.[1]) Die Spektrallinien werden nämlich nicht merklich verbreitert, selbst wenn — bei unveränderter Dichte des strahlenden Gases — eine vielfach größere Menge eines fremden Gases zugeführt wird. Da ein *Stoß* zwischen zwei ungleichartigen Molekülen nicht gern eine wesentlich verschiedene Wirkung auf die Schwingungen haben kann als ein Stoß zwischen zwei gleichen Molekülen, so muß man schließen, daß die Zusammenstöße überhaupt keine bedeutenden Verbreiterungserscheinungen verursachen können.

4. Daß die molekularen Lichtquellen, die als elektrische Oszillatoren aufgefaßt werden, sich durch *Induktion* gegenseitig beeinflussen. Je größer die Dichte des emittierenden (oder absorbierenden) Gases, um so näher kommen seine Moleküle aneinander, und um so stärker werden also die Störungen, die ihre natürlichen Eigenschwingungen erfahren. Fürst Galitzin gebührt das Verdienst, von diesem Gesichtspunkte aus eine Theorie entwickelt zu haben.[2]) Seine Theorie ist deshalb besonders beachtenswert, weil sie ungezwungen die *Dichte* des emittierenden (bzw. absorbierenden) Gases als Bedingung für die Verbreiterungserscheinungen in erster Linie stellt. Sie bedarf jedoch in einem wichtigen Punkte der Verbesserung.[3]) Galitzin behandelt nämlich die Schwingungen zweier molekularen Oszillatoren nach der Theorie quasi-stationärer Ströme,

---

1) Vgl. hierüber auch O. Schönrock, Ann. d. Phys. 22. p. 209. 1907.

2) B. Galitzin, Bull. St. Petersb. (5) 2. p. 397. 1895 und Wied. Ann. 56. p. 78. 1895.

3) Ich sehe dabei von einigen Unrichtigkeiten und Unklarheiten ganz ab, die die im übrigen sehr verdienstvollen Abhandlungen von Galitzin stören, und auf die zum Teil schon von anderer Seite aufmerksam gemacht worden ist.

was zwar von vornherein zulässig zu sein scheinen mag, da ja der durchschnittliche Abstand der Moleküle im allgemeinen sehr klein im Verhältnis zur Länge der erregten Lichtwellen ist. In Wirklichkeit jedoch ist dies *nicht* zulässig. Hierfür wäre es vielmehr erforderlich — wie ich in einer kürzlich erschienenen Abhandlung nachgewiesen habe[1]) —, daß der Abstand der zwei resonierenden molekularen Oszillatoren auch im Vergleich zu ihren eigenen Dimensionen klein, oder jedenfalls nicht groß sei, und diese Bedingung kann in dem vorliegenden Falle nicht als erfüllt betrachtet werden.

Ich werde im folgenden versuchen, dem angedeuteten Mangel in der Galitzinschen Theorie abzuhelfen. Freilich muß ich dabei die möglichst einfachen Annahmen über die molekularen Lichtquellen machen, und es liegt daher in der Natur der Sache, daß die erzielten Resultate keinen Anspruch auf die Vollständigkeit oder Endgültigkeit machen können. Denn die Spektrallinien zeigen so viele Verschiedenheiten in bezug auf Umkehrbarkeit, symmetrische oder unsymmetrische Verbreiterung, Zeeman-Phänomen usw., daß sie — selbst wenn von ihrer Anordnung in Serien abgesehen wird — unmöglich von Oszillatoren einer und derselben einfachsten Art herrühren können.[2])

Unter den gemachten Annahmen erweist sich das Dämpfungsdekrement der Oszillatoren als maßgebend für die Größe der Verbreiterung. Es ergibt sich, daß bei Benutzung solcher Werte des Dämpfungsdekrementes, als mit den Beobachtungsergebnissen über hohe Interferenzen vereinbar sind, *die tatsächlich beobachteten Linienbreiten erklärt werden können.* Ferner wird mit einem gewissen Grade von Wahrscheinlichkeit gezeigt werden, daß auch *Selbstumkehr* zum Teil — und in gewissen Fällen lediglich — als eine Wirkung der intermolekularen Resonanz erklärt werden muß.

---

1) V. W. Ekman, Arkiv för Mat., Astron. och Fys. 3. Nr. 23, Stockholm 1907; auch Ann. d. Phys. 24. p. 267. 1907.

2) Neulich hat W. J. Humphreys (Astrophys. J. 23. p. 233—247. 1906) Induktionswirkungen zwischen J. J. Thomsonschen Elektronringen untersucht, und gezeigt, wie in dieser Weise verschiedene Formen der Verbreiterungserscheinungen qualitativ erklärt werden können.

### 1. Die Schwingungen zweier molekularen Oszillatoren.

Der Einfachheit halber wollen wir nun ein Gas von den folgenden idealen Eigenschaften berücksichtigen.

Sämtliche Gasmoleküle seien untereinander vollständig gleich und jedes derselben bestehe aus „Materie" irgend einer Art, elektrisch geladen oder nicht, und aus *einer* elementaren Elektrizitätsmenge (Elektron). Das Elektron soll um eine stabile Gleichgewichtslage in allen Richtungen Sinusschwingungen von einer und derselben Periode ausführen können; und diese Schwingungen sollen lediglich durch die Energieausstrahlung gedämpft werden. Dagegen lassen wir Rotationsbewegungen des Elektrons außer Betracht. Weiter noch nehmen wir an, daß die Schwingungsweite des Elektrons im Vergleich zur Wellenlänge des erregten Lichtes sehr klein [1]), und das logarithmische Dämpfungsdekrement der Schwingungen ebenfalls sehr klein ist. (Wie ich in den oben angeführten Abhandlungen gezeigt habe, sind die zwei letztgenannten Annahmen nicht voneinander unabhängig, die zweite ist aber eine physikalisch notwendige Folgerung der ersteren. Auf die Kleinheit des Dämpfungsdekrements kann man bekanntlich auch unmittelbar aus der hohen Interferenzfähigkeit der Spektrallinien oder, was auf dasselbe herauskommt, aus ihrer geringen Breite schließen.)

Wir wollen zunächst ein aus zwei solchen Gasmolekülen bestehendes System betrachten. Sie sollen also so weit von den übrigen Molekülen entfernt sein, daß sie von den Schwingungen derselben nicht merklich beeinflußt werden. Ferner soll ihr gegenseitiger Abstand bedeutend größer (oder wenigstens nicht kleiner) als ihre eigenen Lineardimensionen sein. Die elektrischen Schwingungen eines solchen Systems habe ich in einer vorhergehenden Abhandlung untersucht.[2]) Um dieselbe darzustellen, wollen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem $(x, y, z)$ benutzen, dessen $z$-Achse mit der Verbindungslinie der

1) Die Durchmesser der Moleküle, die man berechnet hat, sind im allgemeinen mehr als 1000 mal kleiner als die Wellenlänge des violetten Lichtes.

2) V. W. Ekman, l. c. Ann. d. Phys. Hinsichtlich der Herleitung der unten zusammengestellten Ergebnisse wird auf diese Abhandlung hingewiesen.

beiden Moleküle zusammenfällt. Die allgemeinste Schwingungsart des betrachteten Systems ist dann aus sechs einfachen Schwingungsarten zusammengesetzt, die wir Partialschwingungen nennen wollen. Diese sind gedämpfte Sinusschwingungen, an denen beide Oszillatoren mit gleicher Energie und mit gemeinsamen Schwingungsrichtungen teilnehmen. Mit jeder der drei Achsenrichtungen laufen zwei Partialschwingungen parallel; in der einen schwingen die Oszillatoren gleichphasig (d. h. die beiden Elektronen bewegen sich immer in gleicher Richtung[1]), in der anderen schwingen sie mit entgegengesetzten Phasen).

Wir wollen im folgenden annehmen, daß der Abstand der Oszillatoren einen kleinen Bruchteil (etwa ein Zehntel oder kleiner) der Wellenlänge beträgt. Dann sind die drei Partialschwingungen, an denen die Oszillatoren mit *entgegengesetzten* Phasen teilnehmen, beinahe *ungedämpft*, während die drei übrigen Partialschwingungen beinahe *die doppelte Dämpfung* eines allein schwingenden Oszillators haben. Für die Strahlung sind natürlicherweise nur die drei gedämpften Partialschwingungen von Bedeutung. Unter den letzteren hat diejenige, die in der $z$-Richtung vor sich geht, die kleinste Schwingungszahl $\nu_a$; die zwei übrigen Partialschwingungen haben gleiche Schwingungszahlen, die wir mit $\nu_e$ bezeichnen wollen. Wird mit $\nu_0$ die natürliche Schwingungszahl der Oszillatoren, mit $\sigma$ ihr (natürliches) logarithmisches Dämpfungsdekrement, mit $r$ der Abstand der Moleküle und mit $\lambda$ die der Schwingungszahl $\nu_0$ entsprechende Wellenlänge bezeichnet, so sind:

$$\nu_a = \nu_0 - \frac{3\sigma\nu_0}{2\pi}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^3, \tag{1a}$$

$$\nu_e = \nu_0 + \frac{3\sigma\nu_0}{4\pi}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^3. \tag{1b}$$

Diese Resultate bleiben auch dann gültig, wenn die Moleküle sich relativ zueinander mit Geschwindigkeiten bewegen, die im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit klein sind. Die Schwingungszahlen ändern sich natürlicherweise dabei allmählich mit dem Werte von $r$, und im allgemeinen findet

1) (In den vorhergehenden, hier angeführten Abhandlungen habe ich die Gleichphasigkeit in einer verschiedenen Weise definiert.)

gleichzeitig ein stetiger Energieaustausch zwischen den verschiedenen Partialschwingungen statt. In letzterer Hinsicht ist jedoch ein wichtiger Ausnahmefall zu bemerken, wenn nämlich die Verbindungslinie der Moleküle bei der Bewegung eine unveränderliche Richtung beibehält, d. h. erstens, wenn die Moleküle bei unveränderter Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung zusammenstoßen würden, zweitens, wenn sie nach einem Zusammenstoße mit unveränderlichen Bewegungsrichtungen und Geschwindigkeiten sich wieder voneinander entfernen. In diesem Falle bleibt die Individualität der einzelnen Partialschwingungen beständig erhalten. Oder genauer ausgedrückt: durch die Bewegung der Moleküle geht in jedem Augenblick das gerade vorhandene Schwingungssystem in ein neues System über; dabei wird jede Partialschwingung des alten in die *entsprechende* Partialschwingung des neuen Systems umgewandelt, ohne anderen Energieverlust als den, der der Dämpfung der bezüglichen Partialschwingung entspricht.

Um mit bestimmten Zahlenwerten zu arbeiten, wollen wir Licht von $5 . 10^{-5}$ cm Wellenlänge (also eine grüne Spektrallinie) voraussetzen. Dann ist $\nu_0 = 6 . 10^{14}$. Die Dämpfung ist von M. Abraham unter Zuhilfenahme gewisser hypothetischen Annahmen theoretisch berechnet worden.[1]) Wir werden sowohl den aus seiner Berechnung hervorgehenden Wert $\sigma = 5 . 10^{-8}$ wie auch größere Werte benutzen. Die Abnahme der Schwingungsenergie wird durch den Dämpfungsfaktor $e^{-2\sigma\nu_0 t}$ ausgedrückt.

Ferner wollen wir nach der Berechnung von M. Planck annehmen, daß 1 ccm Gas bei 0° und Atmosphärendruck $2{,}76 . 10^{19}$ Moleküle enthält.[2])

### 2. Ein unendlich verdünntes Gas.

Es liegt nahe, zu denken, daß selbst bei beliebig großer Verdünnung eines emittierenden (nicht aber eines absorbieren-

1) M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung p. 70, Leipzig 1905. — *Bemerkung bei der Korrektur.* Die Dämpfung eines schwingenden Elektrons wurde schon 1900 von E. Wiechert (Arch. Neérland., Jubelband für H. A. Lorentz) berechnet, und zwar mit wesentlich demselben Resultat wie später von Abraham.

2) M. Planck, Vorles. über die Theorie der Wärmestrahlung p. 162. 1906.

den) Gases die Resonanz dennoch eine beträchtliche Verbreiterung verursachen müßte. Denn die Oszillatorschwingungen können wohl nur bei den Zusammenstößen erregt werden, und es müssen daher eben die am stärksten schwingenden Oszillatoren zu Paaren angeordnet sein, und je zwei in sehr kleinem Abstande voneinander sich befinden.[1])

Die Tatsache, daß die Emissionslinien stark verdünnter Gase keine andere Verbreiterung zeigen, als aus dem Dopplerschen Prinzip folgt, läßt sich jedoch leicht erklären, indem die Ausstrahlung eines Oszillatorpaares verschwindend klein ist in der Zeit, in der die Oszillatoren nahe genug bleiben, um einander beträchtlich zu beeinflussen. Nehmen wir z. B. die Werte

$$\nu_0 = 6 . 10^{14},\ \lambda = 5 . 10^{-5},\ \sigma = 5 . 10^{-8},\ r = 0.04\,\lambda = 2 . 10^{-6}\,\text{cm}$$

an, wo $r$ den Abstand der Oszillatoren bedeutet. Werden diese Werte in Gleichung (1a) eingesetzt, so findet man für die Veränderung der Schwingungszahl: $-(\nu_a - \nu_0) = 15 . 10^{-7}\,\nu_0$, was einer Veränderung der Wellenlänge um nur 0,008 Å.-E. entspricht. Bei einer Molekulargeschwindigkeit von 50000 cm pro Sekunde (Quecksilberdämpfe von 2100° C.) wird aber die Strecke $r = 2 . 10^{-6}$ cm in nur $4 . 10^{-11}$ Sekunden zurückgelegt; und selbst mit dem doppelten Dämpfungsdekremente eines einzelnen Oszillators wird in dieser Zeit nur 0,5 Proz. der gesamten Schwingungsenergie ausgestrahlt. Es würde also keine Linienverbreiterung von merkbarer Größe und merkbarer Lichtstärke entstehen, falls das Dämpfungsdekrement den angenommenen kleinen Wert hat.

Ferner muß man annehmen, daß durch den Zusammenstoß zweier gleichen molekularen Oszillatoren die zwei Elektronen gleiche und entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten er-

---

1) Freilich wäre es denkbar, wenn man sich z. B. auf den Boden der Lockyerschen Dissoziationstheorie stellt, daß die Schwingungen nur bei der Zersplitterung eines Atomes in seine Dissoziationsprodukte oder bei der Wiedervereinigung der letzteren merklich erregt werden. Falls dabei nur *verschiedenartige* Oszillatoren in der Nähe voneinander erregt werden, würden keine beträchtlichen Resonanzwirkungen entstehen. Ein solcher Fall liegt jedenfalls außerhalb des Gebietes unserer gegenwärtigen sehr einfachen Voraussetzungen.

halten. *Es werden also nur diejenigen Partialschwingungen erregt, die bei geringem Abstande der beiden Oszillatoren ungedämpft verlaufen.* Wird dieser Umstand berücksichtigt und die den Gleichungen (1a, b) entsprechenden genauen Gleichungen[1]) in Anwendung gebracht, so findet man, daß $\sigma$ einen etwa hundertmal größeren Wert als den oben angenommenen haben müßte, damit 1 Proz. der Lichtstärke 0,01 Å.-E. oder mehr zur Seite des hellsten Teiles der Spektrallinie fallen würde. Ein so großer Wert von $\sigma$ ist aber mit den von Michelson beobachteten Interferenzen bei sehr hohen Gangunterschieden unvereinbar.[2]) Die Hälfte, oder etwa $\sigma = 2.10^{-6}$ kann als ein Maximalwert angenommen werden, jedenfalls für die feineren Linien, und es kann also behauptet werden: *Linienverbreiterung entsteht nicht durch Resonanz zwischen denjenigen Oszillatoren, die durch Zusammenstoß eben erregt sind; sie kann nur durch Resonanz zwischen Oszillatoren entstehen, die schon vor dem Zusammentreffen schwingen.*

### 3. Die Größe der Verbreiterung durch Druck.

Es sei $N$ die Anzahl von Molekülen in 1 ccm Gas. $N$ soll eine sehr große Zahl sein. Dann gibt es im Mittel ein Gasmolekül innerhalb jeder Kugelfläche, deren Radius $R$ der Gleichung:

$$\frac{1}{N} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

genügt. Es sei ferner $n$ die Anzahl der Moleküle, die in einem bestimmten Augenblicke beträchtliche Schwingungen ausführen, und ihre mittlere Energiemenge sei $e$. Legen wir um jedes dieser Moleküle als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit dem Radius $R$, so findet sich innerhalb jeder Kugelfläche im Mittel noch beinahe *ein* Molekül. Dabei wird natürlicherweise nicht das zum Kugelzentrum gewählte Molekül mitgerechnet, und ebensowenig dasjenige, mit dem dieses eben zusammen-

1) V. W. Ekman l. c., Ann. d. Phys. Gleichung (9—10).

2) Dies läßt sich aus den in Kaysers Handbuch der Spektroskopie 1. p. 591—592 abgedruckten „Sichtbarkeitskurven" der Interferenzfransen berechnen.

gestoßen ist. Innerhalb sämtlicher $n$ Kugelflächen können also $n$ Moleküle gezählt werden, aber in Wirklichkeit sind weniger Moleküle vorhanden, weil einige gleichzeitig innerhalb zwei oder mehrerer Kugelflächen sich befinden und also mehrmals gezählt werden.

Legen wir die Kugelflächen mit denselben Zentren und mit dem Radius $xR$, wo $x<1$, so können innerhalb sämtlicher dieser Flächen $x^3 n$ Moleküle aufgezählt werden (außer den zusammengestoßenen selber). Wenn $x^3$ eine sehr kleine Zahl ist, so ist dabei sowohl die Anzahl von Molekülen, die gleichzeitig innerhalb zwei oder mehrerer Kugelflächen auftreten, wie auch die Anzahl von Kugelflächen, die zwei oder mehrere Moleküle enthalten, verschwindend klein. Es gibt also dann wirklich $x^3 n$ schwingende Moleküle, die miteinander oder mit anfänglich nicht schwingenden Molekülen zu Paaren angeordnet sind, mit einem gegenseitigen Abstand, der kleiner als $xR$ ist. Da sie dieselbe mittlere Energiemenge $e$ wie die übrigen schwingenden Moleküle haben, so ist die gesamte Energiemenge, die diesen Molekülpaaren zukommt, gleich $x^3 n e$, und durch Differentiation in bezug auf $x$ findet man, daß $3 n e x^2 dx$ die gesamte Schwingungsenergie der Molekülpaare darstellt, deren gegenseitige Abstände zwischen den Grenzwerten $xR$ und $(x+dx)R$ liegen. Die totale Schwingungsenergie des ganzen Gasvolumens ist $ne$.

In den Fällen, die wir hier zu berücksichtigen haben, ist der Abstand $xR$ immer klein im Verhältnis zur Wellenlänge. Selbst bei 2500° C. und 0,01 Atm. Druck ist $R$ nur ungefähr $2 . 10^{-6}$ cm oder 0,04 $\lambda$. Die Molekülpaare führen also drei gedämpfte und drei ungedämpfte Arten von Partialschwingungen aus, wie auf p. 582 f. beschrieben wurde; da das Zusammentreffen der molekularen Oszillatoren in ganz unregelmäßiger Weise erfolgt, so fällt auf jede Art von Partialschwingung im Mittel dieselbe Energiemenge. Ferner ist das Strahlungsdekrement dieser Partialschwingungen im Mittel dasselbe wie im Falle eines allein schwingenden Oszillators. Die Molekülpaare, deren Abstände zwischen den Werten $xR$ und $(x+dx)R$ liegen, strahlen also eine Energiemenge aus, die zu der ganzen vom Gase ausgestrahlten Energiemenge im Verhältnis:

$$3 n e x^2 dx / ne = 3 x^2 dx \tag{2}$$

steht.[1]) Für zwei der gedämpften Partialschwingungen liegen die Schwingungszahlen zwischen $\nu_0 + \mu$ und $\nu_0 + \mu + d\mu$, für die dritte zwischen $\nu_0 - 2\mu$ und $\nu_0 - 2\mu - 2d\mu$, wo $\nu_0$ die Eigenschwingungszahl der Oszillatoren — also die Schwingungszahl der unverbreiterten Spektrallinie ist, und $\mu$ infolge Gleichung (1 a, b) den Wert

$$\mu = \frac{3\sigma\nu_0\lambda^3}{32\pi^4 r^3} = \frac{3\sigma\nu_0\lambda^3}{32\pi^4 x^3 R^3} \tag{3}$$

hat. Setzen wir die ganze ausgestrahlte Energiemenge gleich 1, so kommt also infolge (2) und (3) auf die Schwingungszahlen zwischen $\nu_0 - 2\mu$ und $\nu_0 - 2\mu - 2d\mu$ die Energiemenge

$$x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3 = \frac{\sigma\nu_0\lambda^3}{32\pi^4 R^3} \frac{d\mu}{\mu^2}$$

und auf die Schwingungszahlen zwischen $\nu_0 + \mu$ und $\nu_0 + \mu + d\mu$ genau das Doppelte. Es ist dann leicht ersichtlich, daß sowohl für positive wie für negative Werte von $\mu$, auf die Schwingungszahlen zwischen $\nu_0 + \mu$ und $\nu_0 + \mu + d\mu$ die Energiemenge

$$\frac{\sigma\nu_0\lambda^3}{16\pi^4 R^3} \frac{d\mu}{\mu^2}$$

kommt, d. h. daß die spezifische Strahlungsintensität $K$ für diese Schwingungszahlen den Relativwert

$$K = \frac{\sigma\nu_0\lambda^3}{16\pi^4 R^3 \mu^2}$$

hat. Wird $K$ als Ordinate und $\mu$ als Abszisse aufgetragen, so bekommt man also eine Intensitätskurve, die aus zwei voneinander getrennten hyperbelähnlichen Zweigen besteht und symmetrisch auf beiden Seiten der Ordinatenachse liegt (Fig. 1, die dick gezogenen Linien).

Über die Voraussetzungen, unter denen diese Resultate abgeleitet wurden, ist folgendes zu bemerken:

---

1) Dieses Resultat gilt auch, wenn $xR$ im Verhältnis zur Wellenlänge *nicht* klein ist, und wenn also die genaueren, hier nicht abgedruckten Formeln benutzt werden müssen.

*Erstens* sollte der gegenseitige Abstand $xR$ zweier paarweise angeordneten Moleküle im Verhältnis zu ihren Linear-dimensionen groß sein. Es ist daher zu erwarten, daß die berechnete Intensitätskurve für die kleinsten Werte von $x$, also damit für große Werte von $\mu$ der Wirklichkeit nicht ent-

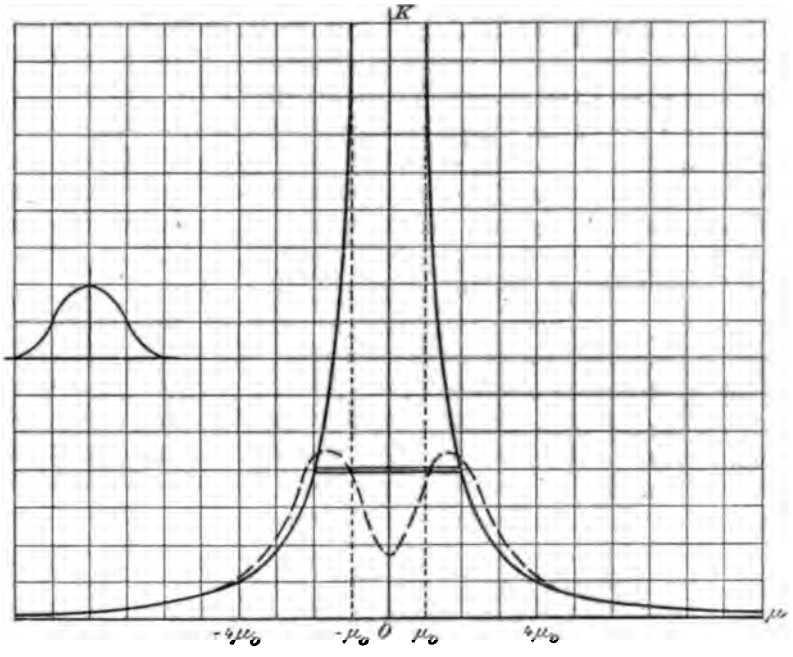



Fig. 1.

spricht. Dieser Fehler ist jedoch von nur untergeordneter Bedeutung, jedenfalls wenn der Gasdruck nicht sehr groß (1 Atm. oder mehr) ist. Denn die Anzahl der Molekülpaare, für die $xR$ von der Größenordnung der Molekulardimensionen oder noch kleiner sind, ist dann sehr gering und ihre Gesamtstrahlung mithin unbedeutend.

*Zweitens* sollte $x^3$ eine kleine Zahl sein, d. h. die berechnete Intensitätskurve ist nur für solche Molekülpaare richtig, bei denen der Abstand $xR$ beträchtlich kleiner als der mittlere Molekularabstand ist. Daß die berechnete Intensitätskurve nicht für beliebig kleine Werte von $\mu$ (d. h. für

beliebig große Werte von $x$) richtig sein kann, geht übrigens schon daraus hervor, daß sie anderenfalls eine unendlich totale Strahlungsintensität ergeben würde. Es ist daher notwendig, die Kurve in der Nähe der Ordinatenachse so zu verändern, daß sie den richtigen Wert der totalen Strahlungsintensität ergibt.

Es scheint nicht möglich, die Intensitätskurve für die kleinsten Werte von $\mu$ genau zu *berechnen*. Denn es müßten dabei die sehr verwickelten Verhältnisse berücksichtigt werden, wo viele molekulare Oszillatoren einander gleichzeitig beeinflussen. Als Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen setzen wir statt dessen eine Intensitätskurve voraus, die sich an die berechnete Kurve genau anschließt, die aber bei den Werten

$$\mu = \pm \mu_0, \quad \mu_0 = \frac{\sigma \nu_0 \lambda^3}{8 \pi^4 R^3} \tag{4}$$

endet, und also für Schwingungszahlen zwischen $\nu_0 - \mu_0$ und $\nu_0 + \mu_0$ absolutes Dunkel ergibt (Fig. 1, die dick gezogenen und die punktierten Linien). Für die totale Strahlungsintensität ergibt diese Kurve den Wert 1, wie unsere oben gemachte Wahl von Einheit es fordert. Diese Intensitätskurve entspricht wenigstens annähernd der Voraussetzung, daß *sämtliche* molekulare Oszillatoren in möglichst intens resonierenden Paaren einander zugeordnet sind, und daß jedes Oszillatorpaar von den übrigen Oszillatoren *unbeeinflußt* bleibt. In Wirklichkeit wird jeder Oszillator von allen den übrigen Oszillatoren beeinflußt; die Form der eben beschriebenen Intensitätskurve wird daher in der Weise verwischt, daß jeder infinitesimale Teil derselben wieder verbreitert wird. Diese letztere Verbreiterung, die als sekundäre Verbreiterung bezeichnet werden mag, muß sicher nach beiden Seiten hin gerichtet sein. Dagegen ist nicht von vornherein klar, ob sie symmetrisch oder etwa überwiegend nach der Mitte der Spektrallinie gerichtet ist. Wenn man bedenkt, daß die Resonanzwirkung umgekehrt wie die dritte Potenz des Abstandes abnimmt, so wird es jedenfalls klar, daß die sekundäre Verbreiterung in jeder Richtung die Größenordnung $\mu_0$ nicht wesentlich überschreiten kann. Dann wird nur der zentrale Teil der Intensitätskurve beträchtlich modifiziert, etwa wie die gestrichelte Kurve auf der Fig. 1

andeutet[1]), und es ist ein Intensitätsminimum in der Mitte der Spektrallinie zu erwarten.

Um wenigstens die Größenordnung der Verbreiterung berechnen zu können, machen wir die Annahme, daß die sekundäre Verbreiterung einseitig gegen die natürliche Schwingungszahl $\nu_0$ geschieht, und zwar so, daß die Intensitätskurve zum Teil aus den ursprünglich berechneten Zweigen und, in der Mitte, aus einer horizontalen Geraden (auf der Fig. 1 doppelt gezogen) bestehen wird. Wir bekommen dann sicher einen *zu kleinen* Wert der Verbreiterung, wenn schon von der richtigen Größenordnung. Da die totale Strahlungsintensität gleich 1 sein soll, findet man, daß der horizontale Teil der Intensitätskurve die Länge $4\mu_0$ ($2\mu_0$ auf jeder Seite der Mitte) haben muß. Rechnet man ferner die Grenze der Spektrallinie da, wo die spezifische Intensität bis zu $^1/_4$ des Maximalwertes abgenommen hat, so wird die Linienbreite gleich $8\mu_0$. (Rechnete man die Linienbreite doppelt so groß, so würde die Intensität am Rande der Linie zu $^1/_{16}$ der maximalen Intensität sinken.) Unter Berücksichtigung von (4) ergibt sich in dieser Weise für die Größenordnung der Linienbreite $b$:

$$b = \frac{\sigma \nu_0 \lambda^3}{\pi^4 R^3}.$$

Man sieht also, daß die Breite zu $R^{-3}$ und mithin zur Dichte des Gases proportional ist. Wenn wir für $\lambda$ den Wert $5.10^{-5}$ cm ansetzen, so wird im Falle eines Gases von Atmosphärendruck und 2500° C.: $\lambda^3 \pi^{-4} R^{-3} = 15000$. Die Linienbreite wird, in Schwingungszahl gerechnet, ungefähr $15000\,\sigma\nu_0$ oder $75.10^6\,\sigma$ Ångströmsche Einheiten. Wäre $\sigma = 5.10^{-8}$, wie von Abraham berechnet ist, so sollte also die Verbreiterung nur 3,7 Å.-E. pro Atmosphäre betragen. Wird aber $\sigma = 2.10^{-6}$ angesetzt, was möglicherweise noch zulässig sein kann, so sollte sich eine Verbreiterung von 150 Å.-E. pro Atmosphäre ergeben. *Insofern die gemachten Annahmen über die lichterregenden Oszillatoren zutreffend sind, ist es also nicht unmöglich, Linienverbreiterungen von den wirklich beobachteten Größen durch inter-*

1) Bei Berechnung dieser Kurve wurde eine symmetrische sekundäre Verbreiterung wie die durch die kleine Nebenfigur links auf Fig. 1 dargestellte angenommen.

*molekulare Resonanz zu erklären. Die größere oder kleinere Verbreiterung sollte auf einem größeren oder kleineren Dämpfungsdekrement der molekularen Oszillatoren beruhen.*

Es seien noch einige Umstände kurz erwähnt, die die oben erzielten Resultate in gewisser Weise modifizieren können.

Erstens bleiben die Partialschwingungen nicht unveränderlich bestehen, sondern ihre Schwingungszahlen ändern sich allmählich, je nach den Bewegungen der Moleküle. Hierdurch entsteht ebenfalls eine Verbreiterung, die mit der Geschwindigkeit der Moleküle, also mit der Temperatur wächst.

Zweitens werden die Moleküle voneinander ponderomotorisch beeinflußt und ihre gegenseitigen Lagen sind daher nicht, wie bisher angenommen, ganz den Wahrscheinlichkeitsgesetzen unterworfen. Man findet leicht, daß die drei ungedämpften Partialschwingungen eine abstoßende Kraft, die drei gedämpften dagegen eine Anziehung zwischen den resonierenden Molekülen hervorrufen. Um die dadurch entstehenden ziemlich verwickelten Verhältnisse zu berechnen, müßte man jedenfalls eine Annahme über die Größe und die Natur der trägen Masse eines Moleküles machen.

Drittens endlich ist die von dem Doppler-Effekt herrührende Verbreiterung zu berücksichtigen. Diese modifiziert die Form der Intensitätskurve und wird sogar für dieselbe bestimmend, falls die Dichte des Gases klein genug ist.

#### 4. Unsymmetrische Verbreiterung. Selbstumkehr.

Nach der oben entwickelten Theorie würden die Spektrallinien bei zunehmender Gasdichte symmetrisch verbreitert werden. In Wirklichkeit werden aber die Linien oftmals *unsymmetrisch*, und zwar in den meisten Fällen überwiegend nach rot hin, verbreitert. Meine Versuche, eine solche Assymmetrie zu erklären, haben nur zu negativen Resultaten geführt.[1])

1) Galitzin behauptet allerdings (l. c.), daß die gegen Rot verschobene Partialschwingung im allgemeinen intensiver ausfallen müsse, als die nach Violett verschobene. Der Grund, worauf er diese seine Behauptung stützt (Bull. St. Petersburg (5) 3. p. 32—33. 1895), scheint mir jedoch ein ganz willkürlich angenommener und physikalisch unberechtigter

Man könnte die Ursache darin suchen, daß der Abstand $xR$ der Moleküle nicht, wie angenommen wurde, unendlich klein im Verhältnisse zur Wellenlänge ist. Werden, unter Berücksichtigung dieses Umstandes, anstatt Gleichung (1 a, b) die exakten Formeln benutzt, so ergibt sich in der Tat eine größere Verbreiterung nach Rot hin; der Unterschied fällt aber viel zu gering aus, um die beobachtete Assymmetrie zu erklären. Ferner wäre es denkbar, eine assymmetrische Verbreiterung könnte dadurch verursacht werden, daß einige Moleküle einander so nahe kommen, daß es nicht mehr gestattet ist, ihre Lineardimensionen ihrem Abstande gegenüber zu vernachlässigen. Auch diese Erklärungsweise ist ungenügend, unter anderem weil unsymmetrische Verbreiterung auch bei verhältnismäßig niedrigen Drucken beobachtet werden kann. Die Ursache der Übereinstimmung zwischen Theorie und Wirklichkeit in dieser Hinsicht muß vielmehr in der Wahl des Modells einer Lichtquelle gesucht werden. Denn die Verbreiterungserscheinungen treten in sehr werschiedenartigen Formen auf, wie symmetrische, unsymmetrische oder sogar einseitige Verbreiterung nach Rot oder nach Violett hin, und die sehr einfachen Vorstellungen, die wir uns über die Art der molekularen Oszillatoren gemacht haben, ermöglichen offenbar keine solche Verschiedenartigkeiten. Eine ähnliche Bemerkung habe ich schon in der Einleitung gemacht.

Es wurde schon oben erwähnt, *daß ein Intensitätsminimum in der Mitte der Spektrallinie zu erwarten ist*, etwa wie durch die gestrichelte Linie auf Fig. 1 angedeutet. Dieses Resultat ist wohl nicht als sicher zu betrachten, da die Wirkung der sekundären Resonanz nicht berechnet, sondern nur geschätzt werden konnte. Falls aber das Minimum wirklich existiert, so trägt es offenbar zu der Erscheinung bei, die unter dem Namen *Selbstumkehr* bekannt ist. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, daß in vielen Fällen die Selbstumkehr in der gebräuchlichen Weise (durch Absorption in den äußeren kühleren Teilen einer Flamme) erklärt werden muß, und die Resonanz

zu sein. Auch die Erklärung, die Mebius für dieselbe Erscheinung gibt (Öfvers. K. Vet. Akad. Förh. Nr. 8. p. 485. 1898), ist unrichtig und, wenn ich sie richtig verstanden habe, in Widerspruch mit dem Energieprinzip.

jedenfalls nur eine untergeordnete Rolle spielt. Es genügt, an den von Kayser erwähnten Fall zu erinnern, wo Selbstumkehr ohne Verbreiterung entsteht.[1]) Auch der Umstand, daß die Selbstumkehr im allgemeinen am deutlichsten an den Enden der Spektrallinie, die Verbreiterung dagegen in ihrer Mitte am größten ist, spricht für die Richtigkeit der Auffassung, daß die Hauptursache der Selbstumkehr nicht in Resonanz, sondern in Absorption gesucht werden muß.

Wenn ich es dennoch wage, die Resonanz als eine wahrscheinlich mitwirkende Ursache der Selbstumkehr hervorzuheben, so beruht das darauf, daß gewisse Fälle von Selbstumkehr sonst schwer zu erklären wären. Im besonderen denke ich dabei an eine von C. A. Young gemachte Beobachtung über *Selbstumkehr einer Absorptionslinie.*[2]) Wenn eine Na-Flamme sehr hell ist, sieht man die $D$-Linien umgekehrt; setzt man hinter sie ein Kalklicht, so wird die Mitte wieder hell, und anstatt der beiden $D$-Linien sind jetzt vier schwarze Linien sichtbar. Kayser erklärt nun diese Erscheinung als eine Folgerung des Kirchhoffschen Gesetzes, was jedoch nicht richtig sein kann.

Um dies klarzulegen, denken wir uns, daß die Flamme aus mehreren Schichten von verschiedenen Temperaturen besteht, daß aber das Emissions- und Absorptionsvermögen $A$ jeder einzelnen Schicht für die *Mitte* der Spektrallinie am größten ist, und gegen beide Seiten abfällt. Es soll bewiesen werden, daß unter solchen Umständen die Lichtstärke nicht bei Emission ein Minimum und bei Absorption ein Maximum in der Mitte der Spektrallinie haben kann. Bezeichnen wir die Mitte der Spektrallinie mit (1) und einen beliebig gewählten Teil an der Seite derselben mit (2). Bezeichnen wir ferner mit $E_1$ bzw. $E_2$ die spezifische Strahlungsintensität bei Emission (d. h. ohne Kalklicht) und mit $E_1'$ bzw. $E_2'$ die spezifische Strahlungsintensität bei Absorption (d. h. wenn das Kalklicht hinter der Flamme angebracht worden ist). Es soll dann bewiesen werden, daß nicht gleichzeitig $E_1 - E_2$ negativ und $E_1' - E_2'$ positiv sein können. Wir betrachten zuerst den

1) H. Kayser, Handb. d. Spektr. 2. p. 385.

2) C. A. Young, Nature 21. p. 274. 1880; vgl. H. Kayser, l. c. p. 364.

Fall, wo die Flamme aus einer einzigen homogenen Schicht von der Temperatur $t$ bestehe. Es sei $e$ die spezifische Intensität der schwarzen Strahlung bei der Temperatur $t$ und $E_0$ die spezifische Strahlungsintensität des Kalklichtes. Sowohl $e$ wie $E_0$ können als über die ganze Breite der Spektrallinie konstant betrachtet werden. Dagegen seien $A_1$ und $A_2$ das Absorptionsvermögen der Flamme für die Wellenlängen 1 bzw. 2 und $A_1 > A_2$. Es ist dann:

$$E_1 = A_1 e; \quad E_1' = E_0 + A_1(e - E_0),$$

$$E_1 - E_2 = (A_1 - A_2)e; \quad E_1' - E_2' = (A_1 - A_2)(e - E_0)$$

und mithin

$$E_1 - E_2 > E_1' - E_2'.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß diese Ungleichung für eine von beliebigen Schichten zusammengesetzte Flamme gilt. Es genügt in der Tat anzunehmen, daß sie für eine gewisse Reihe von Schichten gilt, und zu zeigen, daß sie dann gültig bleibt, wenn noch eine Schicht hinzugefügt wird. Wir beziehen also die Größen $e$, $A_1$ und $A_2$ mit derselben Bedeutung wie vorher auf die vorderste Flammenschicht, die Größen $E_1$, $E_2$, $E_1'$, $E_2'$ auf die Strahlung der Flamme ohne und mit Kalklicht, *bevor* die vorderste Schicht hinzugefügt wird, und $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_1'$, $\mathfrak{E}_2'$, *nachdem* sie hinzugefügt worden ist. Dann ist:

$$\mathfrak{E}_1 = E_1 + A_1(e - E_1); \quad \mathfrak{E}_2 = E_2 + A_2(e - E_2),$$

$$\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 = (E_1 - E_2)(1 - A_2) + (A_1 - A_2)(e - E_1)$$

und in gleicher Weise:

$$\mathfrak{E}_1' - \mathfrak{E}_2' = (E_1' - E_2')(1 - A_2) + (A_1 - A_2)(e - E_1').$$

Da infolge unserer Annahmen:

$$E_1 - E_2 > E_1' - E_2'; \quad A_2 < 1; \quad A_1 > A_2; \quad E_1' \geqq E_1,$$

so ist dann auch:

$$\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 > \mathfrak{E}_1' - \mathfrak{E}_2',$$

was bewiesen werden sollte; und aus dieser Ungleichung folgt, daß nicht gleichzeitig $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$ negativ und $\mathfrak{E}_1' - \mathfrak{E}_2'$ positiv sein können. *Es ist also unmöglich, daß eine Spektrallinie infolge des Kirchhoffschen Gesetzes allein sowohl in Emission wie in*

*Absorption Selbstumkehr zeigen kann.* Wenn eine solche Erscheinung existiert, so muß dies vielmehr davon herrühren, daß die Strahlungsintensität *einzelner Flammenschichten* in der Mitte der Spektrallinie ein Minimum haben. Es liegt dann nahe, die Ursache in der oben erwähnten Wirkung der Resonanz zu suchen.

Für dieselbe Auffassung spricht eine Angabe in der zweiten Auflage von Winkelmanns Handbuch der Physik (6. p. 735), daß man nämlich mit einem Geisslerrohre nicht in gewöhnlicher Weise Absorptionslinien herstellen (infolge zu hoher Temperatur?), wohl aber Selbstumkehr in derselben beobachten kann.

(Eingegangen 22. Oktober 1907.)

## 10. *Über die Begleiterscheinungen des inversen longitudinalen Zeemaneffektes;* *von Ludwig Geiger.*

Unter obigem Titel habe ich in dieser Zeitschrift[1]) vor kurzem über meine Untersuchungen ausführlich berichtet. Durch ein Versehen sind die am Schlusse mitgeteilten Konstantenwerte in einer intermediären Form, nämlich vor Reduktion auf absolute Einheiten angegeben und dadurch unvergleichbar. Nachstehend teile ich ergänzend die reduzierten Werte mit:

### I. Die magnetischen Konstanten $c_l$ und $d_l'$.

Für die longitudinalen Quatruplette von Natrium ist:

| $\lambda$ in A.E. | $d\lambda_e$ in cm. $10^{-8}$ | $d\lambda_l$ in cm. $10^{-8}$ | $\delta_e \cdot 10^{20}$ | $\delta_l \cdot 10^{20}$ | $R$ | $c_l \cdot 10^{23}$ | $d_l' \cdot 10^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5890,19 | 0,25 | 0,15 | 1,33 | 0,80 | 10250 | 0,10 | 6,6 |
| 3302,47 | 0,08 | 0,05 | 0,43 | 0,27 | „ | 0,031 | 3,9 |

Für die longitudinalen Duplette ergeben sich die folgenden Werte, wobei die eingeklammerten unter Annahme der Prestonschen Regel extrapoliert sind:

| Element | $\lambda$ in A.E. | $d\lambda$ in cm. $10^{-8}$ | $2\delta \cdot 10^{20}$ | $R$ | $c_l \cdot 10^{23}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Natrium | 5896,52 | 0,20 | 2,10 | 10250 | 0,21 |
| | 3303,07 | (0,064) | (0,68) | „ | (0,066) |
| Kalium | 7701,92 | 0,24 | 2,6 | „ | 0,25 |
| | 7668,54 | 0,23 | 2,4 | „ | 0,23 |
| | 4047,36 | (0,066) | (0,70) | „ | (0,068) |
| | 4044,29 | (0,065) | (0,69) | „ | (0,067) |
| Lithium | 6708,2 | 0,34 | 3,6 | „ | 0,35 |

1) L. Geiger, Ann. d. Phys. **23**. p. 758 ff. 1907.

## II. Die elektrische Konstante $\varepsilon_i$.

1. Für *Natrium* A.E. 5896 ist $\frac{8\,v}{l\,c_i\,R} = 1{,}12 \cdot 10^{31}$, und

| $d\lambda$ in cm. $10^{-5}$ | $\delta \cdot 10^{19}$ | $\chi$ | $\chi\,\delta^2 \cdot 10^{38}$ |
|---|---|---|---|
| 0,98 | 0,52 | 0,70 | 0,19 |
| 0,62 | 0,33 | 1,22 | 0,13 |
| 0,59 | 0,31 | 1,48 | 0,14 |
| 0,45 | 0,24 | 1,75 | 0,10 |
| 0,49 | 0,26 | 1,92 | 0,13 |
| 0,43 | 0,23 | 2,27 | 0,12 |

Für den Mittelwert $\chi\,\delta^2 = 0{,}14 \cdot 10^{-38}$ ist $\varepsilon_i = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$.

Für A.E. 5890 liefert Gleichung (1):

| $d\lambda$ in cm. $10^{-5}$ | $\delta \cdot 10^{19}$ | $\chi$ | $\varepsilon \cdot 10^{5}$ |
|---|---|---|---|
| 1,16 | 0,62 | 0,70 | 5,6 |
| 0,85 | 0,46 | 1,22 | 5,5 |
| 0,80 | 0,43 | 1,48 | 5,6 |
| 0,59 | 0,31 | 1,75 | 3,0 |
| 0,64 | 0,34 | 1,92 | 4,2 |
| 0,58 | 0,31 | 2,27 | 4,1 |

Im Mittel ist $\varepsilon_i = 4{,}7 \cdot 10^{-6}$.

Für A.E./3303,07 ist . . . . . $\varepsilon_i = 0{,}52 \cdot 10^{-6}$,
für A.E./3302,47 ist . . . . . $\varepsilon_i = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$.

2. Für *Kalium* A.E./7702 ist $\frac{8\,v}{l\,c_i\,R} = 0{,}94 \cdot 10^{31}$, und

| $d\lambda$ in cm. $10^{-5}$ | $\delta \cdot 10^{19}$ | $\chi$ | $\chi\,\delta^2 \cdot 10^{38}$ [1] |
|---|---|---|---|
| 3,9 | 2,07 | 0,87 | 3,7 |
| 2,8 | 1,49 | 1,66 | 3,7 |
| 2,6 | 1,38 | 1,92 | 3,7 |

Für den Mittelwert $\chi\,\delta^2 = 3{,}7 \cdot 10^{-38}$ ist $\varepsilon_i = 35 \cdot 10^{-6}$.

Für A.E./7669 ist $\frac{8\,v}{l\,c_i\,R} = 1{,}02 \cdot 10^{31}$, und

| $d\lambda$ in cm. $10^{-5}$ | $\delta \cdot 10^{19}$ | $\chi$ | $\chi\,\delta^2 \cdot 10^{38}$ [1] |
|---|---|---|---|
| 5,4 | 2,87 | 0,87 | 7,2 |
| 4,0 | 2,13 | 1,66 | 7,5 |
| 3,8 | 2,02 | 1,92 | 7,8 |

Für den Mittelwert $\chi\,\delta^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-38}$ ist $\varepsilon_i = 77 \cdot 10^{-6}$.

1) In der ersten Mitteilung stand versehentlich in diesen beiden Tabellen in der Rubrik $\chi\,\delta^2$ nicht dieser Wert, sondern $\chi\,\delta$.

Für A.E./4047 ist $\frac{8\,\nu}{l\,c_t\,R} = 3{,}45 \cdot 10^{31}$, und

| $d\lambda$ in cm. $10^{-8}$ | $\delta \cdot 10^{19}$ | $\chi$ | $\chi\,\delta^2 \cdot 10^{38}$ |
|---|---|---|---|
| 0,45 | 0,24 | 0,19 | 0,011 |
| 0,36 | 0,19 | 0,37 | 0,013 |
| 0,22 | 0,12 | 0,72 | 0,010 |

Für den Mittelwert $\chi\,\delta^2 = 0{,}011 \cdot 10^{-38}$ ist $\varepsilon_t = 0{,}88 \cdot 10^{-8}$.

Für A.E./4044 ist $\frac{8\,\nu}{l\,c_t\,R} = 3{,}50 \cdot 10^{31}$, und

| $d\lambda$ in cm. $10^{-8}$ | $\delta \cdot 10^{19}$ | $\chi$ | $\chi\,\delta^2 \cdot 10^{38}$ |
|---|---|---|---|
| 0,49 | 0,26 | 0,19 | 0,013 |
| 0,39 | 0,21 | 0,37 | 0,016 |
| 0,29 | 0,15 | 0,54 | 0,012 |

Für den Mittelwert $\chi\,\delta^2 = 0{,}014 \cdot 10^{-38}$ ist $\varepsilon_t = 0{,}48 \cdot 10^{-8}$.

3. Für *Lithium* A.E./6708 ist $\frac{8\,\nu}{l\,c_t\,R} = 0{,}67 \cdot 10^{31}$, und

| $d\lambda$ in cm. $10^{-8}$ | $\delta \cdot 10^{19}$ | $\chi$ | $\chi\,\delta^2 \cdot 10^{38}$ |
|---|---|---|---|
| 1,03 | 0,55 | 0,35 | 0,105 |
| 0,67 | 0,36 | 0,70 | 0,091 |

Für den Mittelwert $\chi\,\delta^2 = 0{,}98 \cdot 10^{-38}$ ist $\varepsilon_t = 6{,}6 \cdot 10^{-8}$.

III. **Die Absorptionskonstante $\vartheta_t'$.**

| Element | $\lambda$ in A.E. | $d\lambda$ in cm. $10^{-8}$ | $\delta \cdot 10^{19}$ | $\vartheta_t' \cdot 10^{20}$ |
|---|---|---|---|---|
| Natrium . . | 5896 | 0,42 | 0,22 | 1,3 |
| | 5890 | 0,51 | 0,27 | 1,6 |
| | 3303 | 0,12 | 0,064 | 0,38 |
| | 3302 | 0,14 | 0,075 | 0,45 |
| Kalium . . | 7702 | 1,8 | 0,96 | 5,8 |
| | 7669 | 2,3 | 1,2 | 7,2 |
| | 4047 | 0,15 | 0,080 | 0,48 |
| | 4044 | 0,16 | 0,085 | 0,51 |
| | 3447 | 0,080 | 0,043 | 0,26 |
| | 3446 | 0,080 | 0,043 | 0,26 |
| Lithium . . | 6708 | 0,43 | 0,23 | 1,4 |

Göttingen, 7. Oktober 1907.

*Anmerkung.* Ich benütze die Gelegenheit, 3 Druckfehler zu berichtigen:

p. 759, Zeile 12 und 13 von oben lies statt „Schwingungszahl“ „reduzierte Schwingungszeit“.

p. 776 unten ist die Tabelle zu ersetzen durch

| Feldstärke | Linie | $di$ | | $i^2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10250 | A.E./5896 | $-0{,}59$ | | $+0{,}59$ | |
| | A.E./5890 | $-0{,}71$ | $-0{,}44$ | $+0{,}44$ | $+0{,}71$ |

und

p. 790 die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial \delta^2} = \text{Max.}$ durch

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial \delta^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \delta}\right)^2}} = \text{Max.}$$

(Eingegangen 10. Oktober 1907.)

## 11. *Zum Gesetze von Dulong und Petit*
### *(Erwiderung auf die Bemerkungen von R. Laemmel);*
### *von Albert Wigand.*

Hr. R. Laemmel spricht in zwei Abhandlungen der Annalen[1]) auf grund kritischer Überlegungen die Meinung aus, daß die übliche Formulierung und Begründung des *Gesetzes von Dulong und Petit* unzulässig sei. Man könne die Atomwärmenzahl willkürlich zwischen 3,5 und 9,5 annehmen; für jedes Element fände sich alsdann eine Temperatur, bei der die gewählte Zahl herauskäme. Hierauf und auf einige andere Punkte der zitierten Abhandlungen möchte ich Folgendes erwidern:

Zur Entdeckung des Gesetzes hat die Tatsache geführt, daß sich etwa bei der *Zahl 6* eine wesentliche *Häufungsstelle* für die Atomwärmen der festen Elemente befindet. Dies läßt sich leicht zeigen. Trägt man nämlich die Atomwärmen als Funktion der Temperatur in ein Koordinatensystem ein[2]), so ergibt sich aus dem *Kurvensystem* deutlich, daß nicht nur alle Elemente die Atomwärme 6 erreichen, sondern daß auch auf dem Gebiete in der Nähe des Wertes 6 die stärkste Häufung der Kurven eintritt und viele Kurven gerade hier am steilsten verlaufen, d. h. für ein relativ großes Temperaturintervall diesem Atomwärmengebiete angehören.

Ein weiterer schlagender Beleg ist die folgende Tab. II. Sie gibt eine Statistik über die Verteilung der festen Elemente auf die Atomwärmenwerte. Von den 23 festen Elementen der

1) R. Laemmel, Ann. d. Phys. **16.** p. 551. 1905; **23.** p. 61. 1907.
2) A. Wigand, Marburger Sitzungsber. 1906. p. 185; vgl. auch Physik. Zeitschr. 8. p. 344. 1907.

Tabelle I.

| Element | Spezifische Wärme | | | | Atomwärme | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | −100 bis 0° | 0 bis +100° | 100 bis 200° | 200 bis 300° | −100 bis 0° | 0 bis +100° | 100 bis 200° | 200 bis 300° |
| Al . . . . | 0,199 | 0,216 | 0,228 | 0,238 | 5,4 | 5,9 | 6,2 | 6,5 |
| Sb . . . . | 0,048 | 0,049 | 0,051 | 0,053 | 5,8 | 5,9 | 6,1 | 6,4 |
| Pb . . . . | 0,0299 | 0,0309 | 0,0318 | 0,0331 | 6,2 | 6,4 | 6,6 | 6,8 |
| $B_{krist.}$ . . . | 0,184 | 0,255 | 0,322 | 0,375 | 2,0 | 2,8 | 3,5 | 4,1 |
| Cd . . . . | 0,053 | 0,055 | 0,058 | 0,060 | 6,0 | 6,2 | 6,5 | 6,7 |
| Cr . . . . | 0,097 | 0,108 | 0,115 | 0,121 | 5,1 | 5,6 | 6,0 | 6,3 |
| Fe . . . . | 0,096 | 0,111 | 0,126 | 0,139 | 5,4 | 6,2 | 7,1 | 7,8 |
| Ir . . . . . | 0,029 | 0,032 | 0,034 | 0,035 | 5,6 | 6,2 | 6,6 | 6,8 |
| Co . . . . | 0,088 | 0,103 | 0,107 | 0,117 | 5,2 | 6,1 | 6,3 | 6,9 |
| $C_{Diamant}$ . . | 0,063 | 0,146 | 0,230 | 0,305 | 0,8 | 1,8 | 2,8 | 3,7 |
| Cu . . . . | 0,085 | 0,093 | 0,095 | 0,097 | 5,4 | 5,9 | 6,0 | 6,2 |
| Mg . . . . | 0,225 | 0,248 | 0,268 | 0,293 | 5,5 | 6,1 | 6,5 | 7,2 |
| Mn . . . . | 0,102 | 0,111 | 0,118 | 0,126 | 5,6 | 6,1 | 6,5 | 6,9 |
| Mo . . . . | 0,065 | 0,072 | 0,074 | 0,074 | 6,2 | 6,9 | 7,1 | 7,1 |
| Ni . . . . | 0,091 | 0,108 | 0,120 | 0,133 | 5,3 | 6,3 | 7,0 | 7,8 |
| Pd . . . . | 0,054 | 0,059 | 0,061 | 0,063 | 5,7 | 6,3 | 6,5 | 6,7 |
| Pt . . . . | 0,0300 | 0,0322 | 0,0338 | 0,0354 | 5,8 | 6,3 | 6,6 | 6,9 |
| Ag . . . . | 0,053 | 0,056 | 0,058 | 0,060 | 5,7 | 6,0 | 6,3 | 6,5 |
| $Si_{krist.}$ . . . | 0,131 | 0,180 | 0,198 | 0,204 | 3,7 | 5,1 | 5,6 | 5,8 |
| Tl . . . . | 0,0306 | 0,0324 | 0,0343 | 0,0360 | 6,2 | 6,6 | 7,0 | 7,3 |
| Ti . . . . | 0,090 | 0,112 | 0,148 | 0,168 | 4,3 | 5,4 | 7,1 | 8,1 |
| Bi . . . . | 0,0298 | 0,0307 | 0,0316 | 0,0326 | 6,2 | 6,4 | 6,6 | 6,8 |
| Zn . . . . | 0,085 | 0,093 | 0,097 | 0,102 | 5,6 | 6,1 | 6,3 | 6,7 |

Tab. I ist die spezifische Wärme zwischen $-100^{\circ}$ und $+300^{\circ}$ C. gut bekannt. Nicht mit aufgeführt sind solche, die bei diesen Temperaturen bereits schmelzen. Die Auswahl der 28 ist aber so regellos, daß ein systematischer Fehler ausgeschlossen ist. Die Daten sind zum größten Teil aus den Tabellen von Landolt-Börnstein-Meyerhoffer (3. Aufl. 1905) entnommen und nur in einigen Fällen wenig extrapoliert. Für Ti und Mo wurden die Resultate von Nordmeyer und Bernouilli[1]), für Mg von Stücker[2]) und für Mn von Laemmel[3]) mitbenutzt. Die oberen Werte für Bi sind nach den Resultaten von L. Lorenz[4]) bis 250° extrapoliert.

Tabelle II.

| Im Temperaturintervall | Von 28 festen Elementen haben die Atomwärme: | | | |
|---|---|---|---|---|
| | < 5 (0,8 bis 5,0) | 5,1 bis 6,0 | 6,1 bis 7,0 | > 7 (7,1 bis 8,1) |
| −100 bis 0° | 4 | 15 | 4 | 0 |
| 0 „ +100 | 2 | 7 | 14 | 0 |
| +100 „ 200 | 2 | 3 | 15 | 3 |
| 200 „ 300 | 2 | 1 | 14 | 6 |

Die Häufung um den Wert 6 ist unverkennbar und trifft nicht, wie Hr. Laemmel meint, nur zufällig bei „gewöhnlicher" Temperatur zu. Die starken Unterschreitungen fallen auf B, C, Si, Ti und werden nach Richarz[5]) durch das Zusammentreffen von kleinem Atomgewicht und kleinem Atomvolumen verständlich. Größere Überschreitungen kommen bei Fe, Mg, Mo, Ni, Tl, Ti in höherer Temperatur vor, was sich für einige dieser Substanzen wohl dadurch erklären läßt, daß nicht weit über der Beobachtungstemperatur der

1) P. Nordmeyer u. A. L. Bernouilli, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 9. p. 175. 1907.
2) N. Stücker, Wiener Ber. 114. Abt. IIa. p. 657. 1905.
3) R. Laemmel, Ann. d. Phys. 16. p. 551. 1905.
4) Vgl. Landolt-Börnstein-Meyerhoffer, 3. Aufl. 1905. p. 386.
5) F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 714. 1893.

Schmelzpunkt oder ein Umwandlungspunkt liegt, dessen Nähe, schon ehe er erreicht wird, durch latente Wärme auf die spezifische Wärme vergrößernd wirkt.[1]) Aus diesem Grunde erscheint auch Hrn. Laemmels Satz von der Konstanz der „*Schmelzpunktatomwärmen*" als recht problematisch, da die spezifische Wärme dicht *unter* dem Schmelzpunkte nur in wenigen Fällen ganz frei von Schmelzwärme gemessen werden kann, besonders bei den Metallen, die ja meistens schon vor dem Schmelzen erweichen. Die experimentelle Bestätigung dieses Satzes läßt daher auch viel zu wünschen übrig. Eher noch könnte man die Temperaturen dicht *über* dem Schmelzpunkte für „vergleichbar" halten; es ergibt sich aber auch für diese aus den vorliegenden Daten keine ganz konstante Atomwärmenzahl. Auch das ist wiederum nicht zu verwundern, da die Molekularbewegung des flüssigen Zustandes komplizierter ist.

Nimmt man anstatt der direkt meßbaren spezifischen Wärme bei konstantem Drucke $c_p$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen $c_v$, wie sie aus thermodynamischen Beziehungen berechnet werden kann, so wird die Häufung um einen konstanten Mittelwert der Atomwärme noch dichter. Dies ist kürzlich von G. N. Lewis[2]) festgestellt worden: bei 20° ist von 19 festen Elementen die mittlere Abweichung vom Mittelwerte der Atomwärme für $c_v$ nur etwa halb so groß als für $c_p$.

Zu Hrn. Laemmels theoretischen Überlegungen möchte ich nur bemerken, daß mir *seine* Darstellung und Kritik der Richarzschen Theorie den Kern der Sache nicht zu treffen scheint. Bei unbefangener Prüfung der Tatsachen lösen sich doch die meisten Schwierigkeiten. Im übrigen muß auf die Originalarbeiten[3]) verwiesen werden.

---

1) Näheres hierüber A. Wigand, Ann. d. Phys. **22**. p. 105. 1907.

2) G. N. Lewis, Zeitschr. f. anorg. Chem. **55**. p. 200. 1907; Journ. Amer. Chem. Soc. **29**. p. 1165. 1907.

3) F. Richarz, Sitzungsber. d. Physik. Ges. Berlin, 24. Febr. 1893; Wied. Ann. **48**. p. 708. 1893; **67**. p. 704. 1899; Naturw. Rundschau **9**. p. 221 u. 237. 1894; **15**. p. 221. 1900; Limpricht-Festschrift, Greifswald 1900; Marburger Sitzungsber. 1904. p. 61; 1905. p. 100; 1906. p. 187.

Schließlich sei auf einige Irrtümer in Hrn. Laemmels zweiter Abhandlung aufmerksam gemacht:

1. Es heißt dort[1]): „Leider übersahen beide Autoren (Richarz und Einstein) die experimentelle Tatsache, daß der Wert 6 oder 6,4 überhaupt immer überschritten wird.“ Soviel bis jetzt experimentell festgestellt ist, *über*schreiten Be, B, C, Si, S nicht die Atomwärme 6,4.

2. Aus experimentell ermittelten Daten (thermische Ausdehnung, Kompressibilität, adiabatische Temperaturänderung bei plötzlicher Ausdehnung), soweit sie damals bekannt waren, hat F. Richarz[2]) berechnet, daß bei festen Metallen das Verhältnis $c_p/c_v$ den Wert 1,04 erreichen kann. Nach neuen Messungen von T. W. Richards hat G. N. Lewis (l. c.) berechnet, daß $c_p$ sogar bis zu 15 Proz. größer sein kann als $c_v$. Die Differenz von $c_p$ und $c_v$ ist also so sehr klein nicht, wie Hr. Laemmel auf p. 70 meint.

3. In der Tab. 2 auf p. 67 wird die Prüfung des Satzes von der Konstanz des Produktes aus Atomvolumen, absoluter Schmelztemperatur und Ausdehnungskoeffizient vorgenommen. Die angeführten „Atomvolumina $\delta$“ sind zwar denen nach üblicher Definition $\left(\frac{\text{Atomgewicht}}{\text{Dichte}}\right)$ proportional, nur die Werte für As und Mg nicht. Während bei der Formulierung des Satzes im Texte der Volumenausdehnungskoeffizient $\alpha$ gesetzt wird, sind in der Tabelle bei allen Elementen, außer Hg und As, die linearen Ausdehnungskoeffizienten aufgeführt, bei Hg jedoch der kubische und bei As gar das Zehnfache des linearen. Bei exakterer Benutzung des vorliegenden Zahlenmaterials wird die „überraschend gute“ Übereinstimmung der berechneten Konstanten nicht besser.[3])

---

Vgl. auch A. Wigand, Diss. Marburg 1905; Marburger Sitzungsber. 1906. p. 185; Ann. d. Phys. 22. p. 64 u. 99. 1907; Physik. Zeitschr. 8. p. 344. 1907.

1) l. c. p. 70.

2) F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 712—713. 1893; vgl. auch Marburger Sitzungsber. 1906. p. 187.

3) Für Sb ist $\alpha \cdot \delta \cdot T = 77 \cdot 10^7$, für Pb $131 \cdot 10^7$ bei 0°.

4. Es ist leider beim Nachrechnen nicht mehr zu verfolgen, wie Hr. Laemmel in der Tab. 1 auf p. 62 einige Zahlenwerte der spezifischen Wärme extrapoliert hat. Vor allem bleibt mir unklar, wie man aus einem einzelnen, für weißes Zinn bei 0—21° beobachteten Werte sowohl auf höhere wie auf tiefere Temperaturen extrapolieren kann.

Dresden, Physik. Institut der Technischen Hochschule, im Oktober 1907.

(Eingegangen 2. November 1907.)

## 12. *Die Zustandsgleichung (zur Richtigstellung); von G. Jäger.*

In seiner Monographie „Die Zustandsgleichung der Gase und Flüssigkeiten und die Kontinuitätstheorie“ [1]) widmet J. P. Kuenen einen besonderen Abschnitt der „Theorie von Jäger“. Diese Theorie geht von der einseitigen Annahme aus, daß bei der Verdichtung der Gase das Volumen mit wachsendem Druck deshalb rascher abnehmen muß, als nach dem Boyle-Charlesschen Gesetz zu erwarten steht, weil die Molekeln *Abstoßungskräfte* aufeinander ausüben, demzufolge die mittlere Geschwindigkeit derselben bei der Kompression kleiner werden muß. Bei den vielen Beweisen, die heutzutage für den Satz existieren, daß bei Temperaturgleichgewicht die mittlere Energie der Gasmolekeln unabhängig von den äußeren Kräften ist, ist obige Ansicht natürlich nicht mehr haltbar, und ich habe in verschiedenen Abhandlungen über diesen Gegenstand gezeigt, daß ich die erwähnte Vorstellungsart längst fallen gelassen habe. Wenn J. P. Kuenen erwähnt, daß obige Theorie auch Eingang in Winkelmanns Handbuch der Physik gefunden hat, so gilt dies ebenfalls nicht mehr für die zweite Auflage, welche ein Jahr vor Kuenens Monographie erschien. Es heißt dort Bd. III p. 711 wörtlich: „Es liegt nahe, den Molekeln *Anziehungskräfte* zuzuschreiben, da ja sonst ein Verflüssigen der Gase und ein Überführen in den festen Zustand bei abnehmender Temperatur kaum denkbar wäre.“ Ebenfalls ein Jahr vor Kuenens Werk erschien meine Schrift „Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie“ in der oben erwähnten Sammlung „Wissenschaft“, in welcher die genannte Art der Abweichung der Gase vom Boyle-Charlesschen Gesetz den *Anziehungskräften* der Molekeln zugeschrieben und überall, besonders bei der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten, die

1) J. P. Kuenen, „Die Wissenschaft“, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1907.

*Gültigkeit des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes* als oberste Regel angesehen wird.

Wie leicht man bei der Schwierigkeit des genannten Gebietes zu Vorstellungen und Theorien gelangen konnte, die sich nachträglich als unhaltbar erwiesen, geht aus Boltzmanns Abhandlung „Über die Möglichkeit der Begründung einer kinetischen Gastheorie auf anziehende Kräfte allein“ [1]) hervor, in welcher er annahm, daß sich die Gasmolekeln, die nach der gewohnten Vorstellung innerhalb der Wirkungssphäre unendlich große Abstoßungskräfte aufeinander ausüben, sich genau so verhalten würden, wenn man unendlich große Anziehungskräfte annehmen würde. Daß man es hier mit einem Trugschluß zu tun hat, erkennt man wiederum am besten aus der Gültigkeit des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes, nach welchem sich ein derartiges Gas von selbst auf einen unendlich kleinen Raum zusammenziehen müßte. Es klingt nun fast wie Ironie, wenn J. P. Kuenen auf p. 203 seines Buches zur Begründung einer von Dieterici aufgestellten Zustandsgleichung wörtlich sagt: „Man kann den Einfluß der molekularen Attraktion auf den von einer Substanz ausgeübten Druck in anderer Weise, als diese von van der Waals geschehen ist, in Rechnung bringen. Wenn Moleküle gegen die Wand des Gefäßes hinfliegen, so werden sie beim Erreichen der Grenzschicht durch die einseitige Anziehung nach innen in ihrer Bewegung gehemmt und daher entweder die Wand gar nicht oder wenigstens nur mit kleinerer als der normalen Geschwindigkeit erreichen: es wird dadurch der Druck auf die Wand in einem bestimmten Verhältnis verkleinert.“ Es wird also hier dieselbe Vorstellungsweise, die Kuenen bei mir gerügt hat, als „eine theoretische Grundlage“ hingestellt. Natürlich ist sie hier nach dem gegenwärtigen Stand der kinetischen Theorie der Materie ebensowenig berechtigt wie in den früher angeführten Fällen.

Wien, den 11. Oktober 1907.

1) L. Boltzmann, Ann. Wied. 24. p. 37 ff. 1885.

(Eingegangen 15. Oktober 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 14.

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 24.

## 1. *Über den Wechselstromwiderstand der Spulen; von A. Sommerfeld.*

Eine theoretische Untersuchung über das Wechselfeld einer Spule, die ich in diesen Annalen[1]) veröffentlicht habe, ist durch die in Straßburg ausgeführten Messungen von Th. Black[2]) und durch demnächst zu publizierende Beobachtungsreihen von A. Esau in Danzig gut bestätigt[3]) worden. Da ich das Problem stark idealisiert hatte, konnte meine Untersuchung zunächst nur orientierenden Wert beanspruchen: ich hatte nicht nur die Spule als unendlich lang vorausgesetzt, sondern auch von der Raumerfüllung der Isolationen und der besonderen Querschnittsform abgesehen, indem ich einen homogenen Hohlzylinder an Stelle der Spule substituierte und in diesem Kreisströme von der durch die Feldgleichungen bedingten Verteilung annahm. Meine Formeln können daher nur die Art der Abhängigkeit von den folgenden Größen: Spulendurchmesser, Dicke des leitenden Materials und namentlich Wechselzahl bestimmen. In diesem Umfange werden sie aber durch die Beobachtungen von Black usw. auch quantitativ bestätigt; nämlich[4]) a) „Der Widerstand der Spule ist bei dem-

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 15. p. 673. 1904.

2) Th. Black, Dissertation Straßburg 1905 und Ann. d. Phys. 19. p. 157. 1906.

3) Auf die experimentellen und theoretischen Einwände Battellis bin ich in Physik. Zeitschr. 8. Heft 21 p. 805 eingegangen. Meine dortigen Bemerkungen betreffen ebenso die in dem gleichen Hefte erschienene neueste Mitteilung Battellis wie die früheren.

4) Vgl. Th. Black, Ann. d. Phys., l. c. p. 166 in etwas freier Wiedergabe. Zu c) ist zu bemerken, daß meine ursprünglichen Formeln auch die Unabhängigkeit vom Drahtradius aussagen, während Black eine Abhängigkeit von dem Verhältnis Drahtradius : Ganghöhe findet. Die folgende genauere Theorie bestätigt dies vollkommen und zeigt, daß die Ganghöhe, was ja an sich sehr verständlich ist, nur im Verhältnis zum Drahtradius in die Widerstandsformel eingeht.

selben Drahtradius unter allen praktisch in Betracht kommenden Umständen unabhängig vom Spulendurchmesser." b) „Solange $\varkappa = r\sqrt{n\pi\sigma/2}$ ($r$ bedeutet den Drahtradius, $n$ die Schwingungszahl in $2\pi$ Sekunden, $\sigma$ die in gewöhnlicher Weise elektromagnetisch gemessene Leitfähigkeit) kleiner ist als etwa 6, nimmt das Verhältnis Spulenwiderstand : Widerstand der gleichen Länge geraden Drahtes mit zunehmendem Drahtradius und zunehmender Schwingungszahl zu, aber um so weniger rasch, je größer $\varkappa$ ist." c) Bei hinreichend großem $\varkappa (\geqq 6)$ nähert sich das genannte Verhältnis einem konstanten, von der Wechselzahl unabhängigen Wert."

Unter diesen Umständen lohnt es sich wohl, meinen früheren Ansatz weiter auszubilden und die Abhängigkeit von der Querschnittsform (Kreis) und der Ganghöhe darin aufzunehmen. In dieser Hinsicht liegt eine dankenswerte Vorarbeit von G. Picciati[1]) vor, die ich in drei Punkten zu ergänzen habe:

1. Picciati setzt dicht aneinanderliegende Windungen voraus; die Untersuchung läßt sich aber, zum Teil ohne größere Mühe, auf den Fall eines beliebigen Abstandes der Windungen ausdehnen.

2. Picciati nimmt das magnetische Feld im Äußeren der Spule gleich Null. Dies ist selbst bei eng anliegenden Windungen im allgemeinen nicht strenge richtig; dagegen war es bei meinem ursprünglichen Ansatz (magnetische Kraftlinien überall parallel der Spulenachse) notwendig.

3. aber berücksichtigt Picciati als Grenzbedingung an der Oberfläche des leitenden Materials nur die *Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von* $\mathfrak{H}$ und kommt zu dem physikalisch unmöglichen Resultat, daß unendlich viele Konstanten des Problems unbestimmt bleiben. Um die Aufgabe physikalisch festzulegen, muß man aber auch die *Stetigkeit der normalen Komponente von* $\mathfrak{B}$ fordern. Ebenso wie man nämlich durch die Bedingung $\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$ im Innern magnetische Mengen ausschließt, muß man es auch auf der Oberfläche tun und dementsprechend, da ja ein Sprung von $\mathfrak{B}$ wahre magnetische Oberflächenbelegung bedeuten würde, die Stetigkeit von $\mathfrak{B}_n$ fordern.

1) G. Picciati, Nuovo Cimento (5) 19. Mai 1906.

Wir berühren damit einen prinzipiellen Punkt in der „quasistationären" Behandlung elektromagnetischer Probleme, im Gegensatz zu ihrer Behandlung nach der vollständigen Maxwellschen Theorie. Bei der quasistationären Behandlung sieht man von den Verschiebungsströmen, d. h. hier von dem elektrischen Felde im Nichtleiter ab; die Stetigkeit der tangentiellen elektrischen Feldstärke an der Grenze z. B. zwischen Leiter und Nichtleiter, die bei der allgemeinen Behandlung zu fordern ist, hat daher zunächst keinen Platz. Diese Stetigkeit bedingt aber nach den allgemeinen Maxwellschen Gleichungen diejenige von $\mathfrak{B}_n$ und bei periodischen Vorgängen auch diejenige von $\dot{\mathfrak{B}}_n$. Letztere können und müssen wir als Ersatz der vollständigen Grenzbedingungen auch in quasistationären Fällen vorschreiben.

Dagegen werden wir uns in den allgemeinen Formeln und namentlich darin an Picciati anlehnen, daß wir den Durchmesser der Spule als unendlich voraussetzen, indem meine frühere Untersuchung sowie die Erfahrung (vgl. oben unter a)) gezeigt haben, daß der Widerstand tatsächlich von der Größe dieses Durchmessers unabhängig ist. Ferner halten wir an der Annahme einer unendlich langen Spule und an der Vernachlässigung der Verschiebungsströme fest. Wir kommen so zu folgendem Problem: In einer Vertikalebene liegen äquidistant unendlich viele horizontale, von gleichphasigem Wechselstrom durchflossene Drähte. In größerer Entfernung von der Ebene auf der einen Seite (rechts in Fig. 1, entsprechend dem Inneren der Spule) wird das magnetische Feld homogen und vertikal gerichtet — Feldstärke $He^{int}$ —, in hinreichender Entfernung auf der anderen Seite (links in Fig. 1, entsprechend dem Äußeren der Spule) verschwindet es. Wir haben das magnetische Feld im ganzen Raume, das Stromfeld sowie die Wärmeentwickelung im Inneren der Drähte zu bestimmen.

### § 1. Allgemeine Gleichungen.

Mit Bezug auf Fig. 1 sei *I* das „Innere", *III* das „Äußere der Spule", das Gebiet *II* werde von den sämtlichen Querschnitten der leitenden Drähte gebildet. $x\,y\,z$ seien Rechtskoordinaten, so daß $z$ nach vorne weist. Der $+z$-Richtung des Stromes in *II* entspricht die $+y$-Richtung der magne-

tischen Kraft im Unendlichen von *I*. Die in Fig. 1 eingezeichnete Kurvenschar stellt die magnetischen Kraftlinien bei Gleichstrom dar, entsprechend einer analogen Figur bei Maxwell (vgl. § 3 Anm. 2).

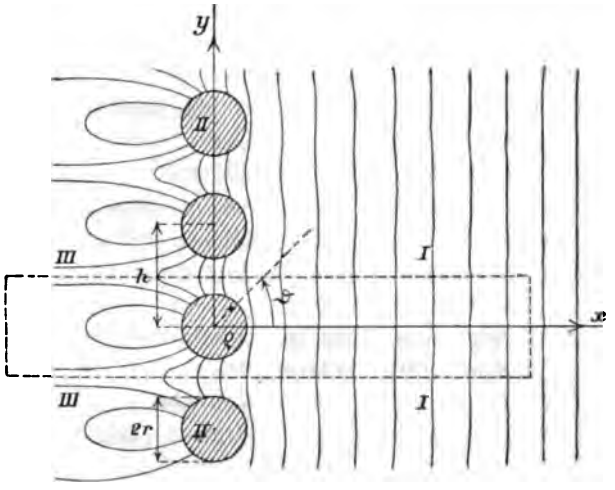



Fig. 1.

Bei quasistationärer Behandlung besteht in *I* und *III* ein magnetisches Potential. Wir setzen:

$$\mathfrak{H} = H e^{int} \operatorname{grad} V$$

und, unter $\alpha$, $\beta$ unbekannte Koeffizienten verstanden:

$$(1) \qquad V = y + \frac{h}{2\pi} \sum_{(s)} \alpha_s \sin \frac{2\pi s y}{h} e^{-2\pi s \frac{x}{h}} \ldots \text{ in } I,$$

$$(2) \qquad V = V_0 + \frac{h}{2\pi} \sum_{(s)} \beta_s \sin \frac{2\pi s y}{h} e^{+2\pi s \frac{x}{h}} \ldots \text{ in } III,$$

wo $V_0$ eine Konstante bedeutet, deren Wert keinen Einfluß auf das Feld $\mathfrak{H}$ hat.

In der Tat genügt dieser Ansatz der Potentialgleichung $\Delta V = 0$, den Bedingungen im Unendlichen (für $x = \pm\infty$) und den Symmetrieeigenschaften des Problems.

In *II* setzen wir die elektrische Kraft, indem wir der Bequemlichkeit halber eine passende Konstante abspalten, folgendermaßen an:

$$(3) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z = \frac{i n \mu}{k} H e^{int} E;$$

dann hat $E$ der Differentialgleichung zu genügen:

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad k = (1 - i)\sqrt{2\pi\mu n\sigma}. \tag{4}$$

Ihre Lösung kann in Polarkoordinaten $\varrho$, $\vartheta$ (vgl. Fig. 1) so geschrieben werden:

$$E = \sum_0^\infty{}^{(\nu)}\, c_\nu \frac{J_\nu(k\varrho)}{J_\nu'(kr)} \cos\nu\vartheta; \tag{5}$$

$J_\nu$ ist die $\nu^{te}$ Besselsche Funktion, $J_\nu'$ ihr Differentialquotient nach dem Argument.

Nach der Maxwellschen Beziehung $\mu\mathfrak{H} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}$ ergibt sich:

$$\mathfrak{H}_\varrho = -\frac{1}{in\mu\varrho}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\vartheta}, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = +\frac{1}{in\mu}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\varrho},$$

also auf der Oberfläche für $\varrho = r$:

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_\varrho = \dfrac{1}{rk} H e^{int} \displaystyle\sum_0^\infty \nu c_\nu \frac{J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)} \sin\nu\vartheta, \\ \mathfrak{H}_\vartheta = \quad H e^{int} \displaystyle\sum_0^\infty c_\nu \cos\nu\vartheta. \end{cases} \tag{6}$$

Diese Ausdrücke sind mit den aus (1) und (2) folgenden Werten von $\mathfrak{H}_\varrho$, $\mathfrak{H}_\vartheta$ zu vergleichen. Ersichtlich hat man:

$$\operatorname{grad}_\varrho V = \frac{\partial V}{\partial\varrho} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\vartheta,$$

$$\operatorname{grad}_\vartheta V = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = -\frac{\partial V}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\vartheta.$$

Aus der Stetigkeit von $\mathfrak{H}_\vartheta$ ergibt sich hiernach für $\varrho = r$ und $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$:

$$\sum c_\nu \cos\nu\vartheta = \cos\vartheta + \sum s\alpha_s \cos\left\{\vartheta - 2\pi s\frac{r}{h}\sin\vartheta\right\} e^{-2\pi s\frac{r}{h}\cos\vartheta} \tag{7}$$

und für $\varrho = r$, $+\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2$:

$$\sum c_\nu \cos\nu\vartheta = \sum s\beta_s \cos\left\{\vartheta + 2\pi s\frac{r}{h}\sin\vartheta\right\} e^{+2\pi s\frac{r}{h}\cos\vartheta}. \tag{8}$$

Andererseits aber ergibt sich aus der Stetigkeit von $\mathfrak{B}_\varrho$

oder $\mu \mathfrak{H}_\varrho$ ($\mu = 1$ in Luft) für $\varrho = r$ und $-\pi/2 < \vartheta < +\pi/2$ bzw. für $+\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2$:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu}{r\,k} \sum \nu\, c_\nu \dfrac{J_\nu(k\,r)}{J_\nu'(k\,r)} \sin \nu\,\vartheta = \sin\vartheta \\ \qquad\qquad + \sum s\,\alpha_s \sin\left\{\vartheta - 2\pi s \dfrac{r}{h} \sin\vartheta\right\} e^{-2\pi s \frac{r}{h}\cos\vartheta}, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu}{r\,k} \sum \nu\, c_\nu \dfrac{J_\nu(k\,r)}{J_\nu'(k\,r)} \sin \nu\,\vartheta \\ \qquad\qquad = \sum s\,\beta_s \sin\left\{\vartheta + 2\pi s \dfrac{r}{h} \sin\vartheta\right\} e^{+2\pi s \frac{r}{h}\cos\vartheta}. \end{cases}$$

Außerdem ist noch die Stetigkeit von grad $U$, oder was dasselbe bedeutet, diejenige von $U$ und $\partial U/\partial x$ für $x = 0$ und $r < y < h - r$ zu fordern, wodurch zugleich auch für die Stetigkeit in den äquivalenten Strecken $h + r < y < 2h - r, \ldots$ $-h + r < y < -r \ldots$ gesorgt ist. Diese Bedingungen lauten:

$$(11)\quad y + \frac{h}{2\pi} \sum (\alpha_s - \beta_s) \sin \frac{2\pi s\, y}{h} = V_0,$$

$$(12)\quad \sum s(\alpha_s + \beta_s) \sin \frac{2\pi s\, y}{h} = 0.$$

Aus (7) und (8) läßt sich $c_\nu$ berechnen, indem man mit $\cos \nu\vartheta$ multipliziert und (7) zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$, (8) zwischen $+\pi/2$ und $3\pi/2$ integriert. Es ergibt sich:

$$\pi c_\nu = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\nu\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta$$
$$+ \sum s\,\alpha_s \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\nu\vartheta \cos\left\{\vartheta - 2\pi s \frac{r}{h}\sin\vartheta\right\} e^{-2\pi s \frac{r}{h}\cos\vartheta}$$
$$+ \sum s\,\beta_s \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\nu\vartheta \cos\left\{\vartheta + 2\pi s \frac{r}{h}\sin\vartheta\right\} e^{+2\pi s \frac{r}{h}\cos\vartheta}.$$

Ausführung des ersten Integrals und Zusammenziehung der beiden letzten liefert:

$$(13)\quad \begin{cases} \pi c_\nu = \dfrac{2}{\nu^2 - 1} \sin(\nu - 1)\dfrac{\pi}{2} + \sum s\,(\alpha_s - (-1)^\nu \beta_s)\,\gamma_{s\nu}, \\ \gamma_{s\nu} = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\nu\vartheta \cos\left\{\vartheta - 2\pi s \frac{r}{h}\sin\vartheta\right\} e^{-2\pi s \frac{r}{h}\cos\vartheta}\, d\vartheta. \end{cases}$$

Verfährt man entsprechend mit den Gleichungen (9) und (10), nachdem man dieselben mit $\sin \nu \vartheta$ multipliziert hat, so folgt:

$$(14)\quad \begin{cases} \pi c_\nu \lambda_\nu = \dfrac{2\nu}{\nu^2-1} \sin(\nu-1)\dfrac{\pi}{2} + \sum s\left(\alpha_s - (-1)^\nu \beta_s\right) \delta_{s\nu}, \\ \lambda_\nu = \dfrac{\nu \mu}{r k} \dfrac{J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)}, \\ \delta_{s\nu} = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin \nu\vartheta \sin\left\{\vartheta - 2\pi s \frac{r}{h} \sin\vartheta\right\} e^{-2\pi s \frac{r}{h}\cos\vartheta}\, d\vartheta. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten auch noch im Falle $\nu = 1$, wo das erste Glied der rechten Seite von (13) und (14) durch seinen Grenzwert $\pi/2$ für $\nu = 1$ zu ersetzen ist. Im Falle $\nu = 0$ dagegen erhält man aus (7) und (8) für den Koeffizienten $c_0$ einen Wert, der sich mit Rücksicht auf (11) einfach folgendermaßen schreiben läßt:

$$(15)\qquad c_0 = \frac{h}{2\pi r}.$$

Derselbe Wert läßt sich auch direkt aus Fig. 1 ablesen. Es ist nämlich $4\pi \times$ Gesamtstrom im einzelnen Querschnitte gleich dem Linienintegral der magnetischen Kraft um den Querschnitt. Erstrecken wir dieses einerseits über die Peripherie des Kreises, so ergibt sich nach (6) $2\pi r H e^{int} c_0$; erstrecken wir es andererseits über den in Fig. 1 punktierten weit entfernten Rechteckweg, so folgt $h H e^{int}$. Der Vergleich beider Ausdrücke liefert wieder (15).

Die in (13) und (14) eingeführten Koeffizienten $\gamma_{s\nu}$, $\delta_{s\nu}$ berechnet man am einfachsten in der Kombination:

$$(16)\quad \begin{cases} 2 g_{s\nu} = \gamma_{s\nu} - \delta_{s\nu} = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{i(\nu+1)\vartheta - 2\pi s \frac{r}{h} e^{i\vartheta}}\, d\vartheta, \\ 2 d_{s\nu} = \gamma_{s\nu} + \delta_{s\nu} = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-i(\nu-1)\vartheta - 2\pi s \frac{r}{h} e^{i\vartheta}}\, d\vartheta. \end{cases}$$

Mit der Abkürzung $x = e^{i\vartheta}$ kann man hierfür auch schreiben:

$$(17)\quad g_{s\nu} = \frac{1}{2i}\int_{-i}^{+i} e^{-2\pi s \frac{r}{h} x} x^\nu\, dx, \quad d_{s\nu} = \frac{1}{2i}\int_{-i}^{+i} e^{-2\pi s \frac{r}{h} x} x^{-\nu}\, dx.$$

Sie lassen sich durch geeignete Rekursionsformeln und Reihen unschwer numerisch berechnen. Im Anhang I folgt eine Tabelle der $\gamma$, $\delta$ für den Fall $h = 2r$ (eng aneinander liegende Windungen).

Hier mögen nur noch die für *gerades* $\nu$ gültigen Summenformeln erwähnt werden:

$$(18)\quad \begin{cases} 2\sum_1^\infty{}^{(s)}\, g_{s\nu} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}(\nu-1)}{\nu+1}, \\ 2\sum_1^\infty{}^{(s)}\, d_{s\nu} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}(\nu+1)}{\nu-1} - \pi(-1)^{\nu/2}\dfrac{B_\nu}{\nu!}\left(\dfrac{2\pi r}{h}\right)^{\nu-1}. \end{cases}$$

Dieselben werden in Anhang II abgeleitet; die $B_\nu$ bedeuten die sogenannten Bernoullischen Zahlen.

Wegen des Zusammenhanges der $g$, $d$ mit den $\gamma$, $\delta$ folgt hieraus sogleich:

$$(19)\quad \begin{cases} \sum_1^\infty{}^{(s)}\, \gamma_{s\nu} = -\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}(\nu-1)}{\nu^2-1} - \dfrac{\pi}{2}(-1)^{\nu/2}\dfrac{B_\nu}{\nu!}\left(\dfrac{2\pi r}{h}\right)^{\nu-1}, \\ \sum_1^\infty{}^{(s)}\, \delta_{s\nu} = -\dfrac{\nu\sin\frac{\pi}{2}(\nu-1)}{\nu^2-1} - \dfrac{\pi}{2}(-1)^{\nu/2}\dfrac{B_\nu}{\nu!}\left(\dfrac{2\pi r}{h}\right)^{\nu-1}. \end{cases}$$

### § 2. Berechnung der Koeffizienten $\alpha$, $\beta$, $c$ und des Widerstandes.

Der allgemeine Gang der Rechnung würde sich nun folgendermaßen gestalten:

Man eliminiere zunächst die $c_\nu$ aus den Gleichungen (13) und (14), wobei sich ergibt:

$$(20)\quad \sum{}^{(s)}\, s\,(\alpha_s - (-1)^\nu\beta_s)\,(\delta_{s\nu} - \lambda_\nu\gamma_{s\nu}) = \frac{2(\lambda_\nu-\nu)}{\nu^2-1}\sin(\nu-1)\frac{\pi}{2}.$$

Des näheren haben wir zwischen geradem und ungeradem $\nu$ zu unterscheiden. Bei geradem $\nu$ gelten die Gleichungen (19), nach denen wir die rechte Seite von (20) ersetzen können durch

$$-2\lambda_\nu\sum\gamma_{s\nu} + 2\sum\delta_{s\nu} - \pi(\lambda_\nu-1)(-1)^{\nu/2}\frac{B_\nu}{\nu!}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^{\nu-1}.$$

Infolgedessen wird aus (20) bei *geradem* $\nu > 0$:

$$(21)\quad \begin{cases} \sum^{(s)} (s\{\alpha_s - \beta_s\} - 2)(\delta_{s\nu} - \lambda_\nu \gamma_{s\nu}) \\ \qquad = -\pi(\lambda_\nu - 1)(-1)^{\nu/2} \frac{B_\nu}{\nu!} \left(\frac{2\pi r}{h}\right)^{\nu-1}. \end{cases}$$

Bei ungeradem $\nu > 1$ verschwindet die rechte Seite von (20); dagegen ist für $\nu = 1$ nach einer an Gleichung (14) anschließenden Bemerkung der Limes für $\nu = 1$ zu bilden. Somit wird aus (20) bei *ungeradem* $\nu > 1$:

$$(22)\qquad \sum^{(s)} s(\alpha_s + \beta_s)(\delta_{s\nu} - \lambda_\nu \gamma_{s\nu}) = 0,$$

und *für* $\nu = 1$:

$$(23)\qquad \sum^{(s)} s(\alpha_s + \beta_s)(\delta_{s1} - \lambda_1 \gamma_{s1}) = (\lambda_1 - 1)\frac{\pi}{2}.$$

Die Koeffizienten $\alpha$, $\beta$ sind nun aus diesen Gleichungen (21), (22), (23) zusammen mit den Gleichungen (11) und (12) zu bestimmen. Wie man sieht, kommen sie nur in den Kombinationen $\alpha_s - \beta_s$ (Gleichung (21) und (11)) und $\alpha_s + \beta_s$ (Gleichung (22), (23) und (12)) vor. Beide Kombinationen können daher getrennt berechnet werden.

Eine Vereinfachung bringt die Annahme $h = 2r$ (dicht anliegende Windungen, Picciati) mit sich. Das Gültigkeitsgebiet der Gleichungen (11) und (12) schrumpft dann auf den einen Punkt $y = h/2$ (bzw. $y = mh \pm h/2$) zusammen, in dem diese Gleichungen identisch befriedigt werden. Aber auch in diesem Falle erfordert die Bestimmung der unendlich vielen Unbekannten $\alpha_s + \beta_s$ bzw. $\alpha_s - \beta_s$ die Auflösung je eines unendlichen Systems linearer Gleichungen.

In den im Folgenden zu betrachtenden charakteristischen Grenzfällen werden wir diese Auflösung nicht nötig haben, sondern die Werte der $\alpha_s \pm \beta_s$ direkt angeben können. Unsere Gleichungen (21), (22), (23) dienen dann nur zur Probe auf die Richtigkeit dieser Werte.

Sind die $\alpha_s \pm \beta_s$ bekannt, so liefern z. B. die Gleichung (13) unmittelbar die Werte der Koeffizienten $c_\nu$. Auf diese kommt es für die Berechnung des Widerstandes, wie wir jetzt sehen werden, in erster Linie an.

Wir bestimmen zunächst die der Längeneinheit des Drahtes in jedem Augenblicke zugeführte Energie

$$r\int_0^{2\pi} \mathfrak{S}\, d\vartheta$$

aus dem (radial gerichteten) Poyntingschen Vektor $\mathfrak{S}$ und gehen zu dem zeitlichen Mittelwerte desselben

$$r\left(\int_0^{2\pi} \mathfrak{S}\, d\vartheta\right)_m$$

über; dieser stellt die pro Längen- und Zeiteinheit im Draht entwickelte Joulesche Wärme dar und ist daher dem Widerstande $w$ proportional. Dieselbe Größe, für die Schwingungszahl Null gebildet, ist dem Gleichstromwiderstande $w_0$ proportional. Daher ergibt sich

$$\frac{w}{w_0} = \frac{\left(\int \mathfrak{S}\, d\vartheta\right)_m}{\left(\int \mathfrak{S}\, d\vartheta\right)_{m_0}}. \tag{24}$$

Nun ist $\mathfrak{S}$ proportional mit $\mathfrak{E}\mathfrak{H}_\phi$ und nach den Gleichungen (3), (5), (6), denen wir jetzt das Zeichen $\Re$ des reellen Betrages hinzufügen müssen:

$$\mathfrak{E}\mathfrak{H}_\phi = \Re\left\{\frac{in\mu}{k} H e^{int} \sum c_\nu \frac{J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)} \cos\nu\vartheta\right\} \Re\{H e^{int} \sum c_\nu \cos\nu\vartheta\},$$

also

$$\int \mathfrak{E}\mathfrak{H}_\phi\, d\vartheta = \sum{}^{(\nu)} p_\nu \Re\left\{\frac{in\mu}{k} H e^{int} \frac{J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)}\right\} \Re\{H e^{int} c_\nu\}.$$

Das hier eingeführte Zeichen $p_\nu$ bedeutet:

$$p_\nu = 2\pi \text{ für } \nu = 0, \quad p_\nu = \pi \text{ für } \nu > 0.$$

Um den zeitlichen Mittelwert zu bilden, ersetzen wir die beiden reellen Teile durch die halbe Summe des dahinter stehenden komplexen Ausdruckes und des dazu konjugierten. Führen wir das Produkt aus, so verschwinden von seinen vier Termen die beiden mit dem Faktor $e^{\pm 2int}$ bei der Mittelung nach $t$; die beiden anderen, mit dem Faktor 1 behafteten geben:

$$\left(\int \mathfrak{E}\mathfrak{H}_\phi\, d\vartheta\right)_m = \tfrac{1}{4} \sum{}^{(\nu)} p_\nu\, in\mu H^2 c_\nu \bar{c}_\nu \left(\frac{J_\nu(kr)}{k J_\nu'(kr)} - \frac{J_\nu(\bar{k}r)}{\bar{k} J_\nu'(\bar{k}r)}\right),$$

wobei $k$, $\bar{c}_\nu$ die zu $k$, $c_\nu$ konjugierten Größen bedeuten. Beachten wir noch, daß nach (4)

$$i n \mu = -\frac{k^2}{4\pi\sigma} \quad \text{und} \quad k^2 = -\,k^2,$$

so können wir auch schreiben:

$$\left(\int \mathfrak{E}\,\mathfrak{H}_\vartheta\, d\vartheta\right)_m = -\frac{H^2}{16\pi\sigma}\sum\nolimits^{(\nu)} p_\nu c_\nu \bar{c}_\nu \left(\frac{k J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)} + k\frac{J_\nu(\bar{k}r)}{J_\nu'(\bar{k}r)}\right).$$

Um zum Falle des Gleichstromes überzugehen, berücksichtige man, daß für $x = 0$ und $\nu > 0$ bzw. $\nu = 0$ wird $x J_\nu(x)/J_\nu'(x)$ gleich 0 bzw. $-2$. Infolgedessen hat man:

$$\left(\int \mathfrak{E}\,\mathfrak{H}_\vartheta\, d\vartheta\right)_{m_0} = -\frac{H^2}{16\pi\sigma}\left(\frac{-4}{r}\right) p_0 c_0 \bar{c}_0 .$$

Der Quotient der beiden letzten Ausdrücke liefert mit Rücksicht auf (24):

$$\frac{w}{w_0} = -\frac{r}{2}\sum\nolimits^{(\nu)} \frac{p_\nu c_\nu \bar{c}_\nu}{p_0 c_0 \bar{c}_0}\,\Re\left\{\frac{k J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)}\right\},$$

oder wegen (15) und der Bedeutung der $p_\nu$:

$$(25)\quad \frac{w}{w_0} = -\frac{r}{2}\left(\Re\left\{\frac{k J_0(kr)}{J_0'(kr)}\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2 \sum_1^\infty c_\nu \bar{c}_\nu\,\Re\left\{\frac{k J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)}\right\}\right),$$

in Übereinstimmung mit einer etwas spezielleren Gleichung von Picciati. Als Sonderfall ergibt sich hieraus der allgemeingültige bekannte Ausdruck für den Widerstand des einzelnen geraden Drahtes, wenn $h \gg r$, nämlich

$$\frac{w}{w_0} = -\frac{r}{2}\,\Re\left(\frac{k J_0(kr)}{J_0'(kr)}\right).$$

### § 3. Langsamer Wechselstrom.

Bei Gleichstrom in nicht magnetisierbarem [1]) Material ($n = 0$, $\mu = 1$) läßt sich das magnetische Feld außerhalb der Leiterquerschnitte in endlicher Form angeben, ähnlich wie es Maxwell [2]) für das elektrostatische Feld des Schutzgitters

1) Wir setzen $\mu = 1$ voraus, weil die Komplikationen, die auch bei Gleichstrom durch induzierte Magnetismen auf der Oberfläche hervorgerufen werden, nichts mit unserem eigentlichen Problem zu tun haben.

2) Treatise I, § 203 und Taf. XIII, der unsere Fig. 1 entnommen ist. Der im Text hervorgehobene Unterschied rührt daher, daß das magnetische Feld eines Gleichstromes hinsichtlich seiner Wirkung nach

getan hat, nur mit dem Unterschiede, daß die Formel für das magnetische Feld in Strenge gilt, die entsprechende für das elektrostatische mit um so besserer Annäherung, je kleiner der Radius gegen den Abstand der Drähte wird. Man findet:

$$V = \frac{h}{2\pi} \Im \mathrm{m} \log\left(e^{\frac{2\pi(x+iy)}{h}} - 1\right), \tag{26}$$

wo $\Im \mathrm{m}$ das Zeichen des imaginären Teiles bedeutet. In der Tat genügt diese Formel den Bedingungen für $x = \pm\infty$, wo bis auf eine additive Konstante $V = y$ bzw. $= 0$ sein muß, sowie der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ und der Forderung, daß beim Umgange um einen Querschnitt das magnetische Potential einen Zuwachs gleich $4\pi$. Gesamtstrom (in unserem Falle $Hh$) erfahren soll.

Entwickelt man den Logarithmus für $x > 0$ bzw. $x < 0$ je in eine Reihe, so erhält man:

$$\text{für } x > 0 \quad V = y + \frac{h}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)} \frac{1}{s} \sin\frac{2\pi s y}{h} e^{-2\pi s \frac{x}{h}},$$

$$\text{für } x < 0 \quad V = \text{Const.} - \frac{h}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)} \frac{1}{s} \sin\frac{2\pi s y}{h} e^{+2\pi s \frac{x}{h}}.$$

Der Vergleich mit (1) und (2) zeigt, daß bei Gleichstrom gilt:

$$\alpha_s = -\beta_s = \frac{1}{s}. \tag{27}$$

Wir überzeugen uns nachträglich, daß diese Werte in der Tat dem unendlichen System linearer Gleichungen (Gleichungen (21), (22), (23) des § 2), sowie den Stetigkeitsbedingungen (Gleichungen (11), (12) des § 1) genügen.

Zunächst sieht man, daß die Gleichungen (22) und (12) identisch erfüllt werden. Dasselbe gilt für die Gleichungen (21) und (23) wegen $\lambda_\nu = 1$. Letzteres folgt aus der Definitionsgleichung (14) für $k = 0$ (Gleichstrom), $\mu = 1$ (nicht magnetisier-

außen in Strenge durch das Feld eines linearen (unendlich dünnen) Drahtes ersetzt werden kann, während die elektrostatische Wirkung eines Gitterdrahtes nur insoweit durch die Wirkung einer geladenen Linie ersetzt werden kann, als man von der gegenseitigen Induktion der Drähte absehen, also den Radius gegen den Abstand vernachlässigen darf.

bares Material) und $\nu > 0$. Es bleibt also nur noch Gleichung (11) zu betrachten, die auf Grund von (27) übergeht in:

$$y + \frac{h}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} \sin \frac{2\pi s y}{h} = V_0 .$$

Letztere Gleichung ist aber nach der Theorie der Fourierschen Reihen ebenfalls eine Identität, da man bei der Entwickelung von $y$ zwischen 0 und $h$ (bzw. zwischen $h$ und $2h$, $2h$ und $3h$, ...) erhält:

$$y = -\frac{h}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} \sin \frac{2\pi s y}{h} + \frac{h}{2} \left( \text{bzw. } \frac{h}{2} + h, \ \frac{h}{2} + 2h \ldots \right).$$

Nebenbei bemerkt zeigt sich, daß die Konstante $V_0$ in den verschiedenen Intervallen zwischen den Drähten verschiedene Werte hat, wie es nach den Umlaufsbedingungen des magnetischen Potentials sein muß.

Somit ist gezeigt, daß unsere Werte der $\alpha$, $\beta$ allen Bedingungen des Problems genügen. Was die Koeffizienten $c$ betrifft, so folgt aus (13) oder (14), daß bei *ungeradem* $\nu > 1$

$$c_\nu = 0 .$$

Im Limes für $\nu = 1$ ergibt sich aus (13) und mit Rücksicht auf $\lambda_1 = 1$ ebenso aus (14):

$$c_1 = \tfrac{1}{2} .$$

Dagegen haben wir nach denselben Gleichungen bei geradem $\nu > 0$ mit Rücksicht auf (19):

$$\begin{aligned} \pi c_\nu &= \frac{2}{\nu^2 - 1} \sin (\nu - 1) \frac{\pi}{2} + 2 \sum \gamma_{s\nu} \\ &= \frac{2\nu}{\nu^2 - 1} \sin (\nu - 1) \frac{\pi}{2} + 2 \sum \delta_{s\nu} \\ &= -\pi (-1)^{\nu/2} \frac{B_\nu}{\nu!} \left( \frac{2\pi r}{h} \right)^{\nu - 1} . \end{aligned}$$

Trägt man die im Anhange II wiedergegebenen Werte der Bernoullischen Zahlen ein, so erhält man als vollständiges Schema der Koeffizienten $c$ dieses:

$$(28) \quad \begin{cases} c_0 = \dfrac{h}{2\pi r}, \quad c_1 = \dfrac{1}{2}, \quad c_2 = \dfrac{1}{12} \dfrac{2\pi r}{h}, \quad c_3 = 0, \\ c_4 = -\dfrac{1}{720} \left( \dfrac{2\pi r}{h} \right)^3, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = \dfrac{1}{30240} \left( \dfrac{2\pi r}{h} \right)^5, \ \ldots \end{cases}$$

Allerdings hat das Auftreten der Koeffizienten $c_1, c_2, c_4 \ldots$ neben $c_0$ für die Verteilung des *Gleichstromes* keine Bedeutung, da dieselben in den Gleichungen (5) und (25) mit Faktoren multipliziert werden, die für $k = 0$ verschwinden. Dementsprechend liefert (25) für $k = 0$, wie es sein muß, $w = w_0$.

Dagegen werden die Verhältnisse bei *langsamem Wechselstrom* wesentlich durch die Werte $c_1, c_2, c_4, \ldots$ bestimmt. Hier wird man statt (27), (28) zunächst setzen können:

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha_s = \frac{1}{s} + \alpha_s', \quad \beta_s = -\frac{1}{s} + \beta_s', \\ c_0 = \frac{h}{2\pi r}, \quad c_1 = \frac{1}{2} + c_1', \quad c_2 = \frac{1}{12}\frac{2\pi r}{h} + c_2', \ldots \end{cases}$$

wo von den Größen $\alpha'$, $\beta'$, $c'$ nur bekannt ist, daß sie mit $k$ verschwinden. Beschränkt man sich auf die niedrigsten Potenzen von $k$, so hat man nach den Potenzreihen der Besselschen Funktionen:

$$-\frac{r}{2}\,\mathfrak{R}\left\{\frac{k J_0(kr)}{J_0'(kr)}\right\} = 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{|k|r}{2}\right)^4,$$

$$-\frac{r}{2}\,\mathfrak{R}\left\{\frac{k J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)}\right\} = \frac{4}{\nu^2(\nu+1)}\left(\frac{|k|r}{2}\right)^4 \ldots \quad \nu > 0.$$

Setzen wir diese und die Ausdrücke (29) in die Widerstandsformel (25) ein, so würden die $c'$ Beiträge liefern, die von höherer Ordnung als $k^4$ verschwinden; infolgedessen ist die Kenntnis der $c'$ nicht erforderlich und wir erhalten aus (25) und (28)

$$\frac{w}{w_0} = 1 + \left(\frac{k r}{2}\right)^4\left\{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2 + \frac{1}{864}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^4 + \frac{1}{20736000}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^8 + \ldots\right\},$$

oder wegen der Bedeutung von $k$ (Gleichung (4)):

$$(30)\quad \begin{cases} \frac{w}{w_0} = 1 + \frac{1}{4}\pi^2 n^2 \sigma^2 r^4\left\{\frac{1}{3} + \left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2 + \frac{1}{216}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^4 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{5184000}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^8 + \ldots\right\}. \end{cases}$$

Dies vergleichen wir mit einem Resultat von M. Wien[1]), das in unserer Bezeichnung lautet:

$$(31)\quad \frac{w}{w_0} = 1 + 0{,}272\,\pi^2 n^2 \sigma^2 r^4\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2.$$

1) M. Wien, Ann. d. Phys. 14. 1904; vgl. speziell p. 16.

Wie man sieht, enthält die Wiensche Formel von den Gliedern unserer { } nur das zweite wesentlichste, und zwar mit einem etwas größeren Koeffizienten 0,272 statt 0,25 in (30); dafür fehlen die Glieder $1/3$ und die höheren Potenzen von $2\pi r/h$. Für kleine Ganghöhen ($h = 2r$ bis $h = 3r$) stimmt die Wiensche Formel mit der meinigen auf 1 Proz. überein, ergibt aber für größere Ganghöhen merklich zu kleine Werte. Man beachte übrigens, daß der Gültigkeitsbereich von (30) ebenso wie von (31) nur ein beschränkter ist, indem bei zunehmender Wechselzahl alsbald auch die höheren Potenzen von $n$, die in (30) vernachlässigt wurden, zur Geltung kommen.

Endlich sei bemerkt, daß die Ganghöhe $h$ in (30) nur in der Verbindung $2\pi r/h$ auftritt, entsprechend dem in Anm. 1, p. 609 Gesagten und ähnlich wie bei Drudes Bestimmung der Eigenschwingung einer Spule.[1]) Dasselbe gilt nach den Formeln des § 2 ganz allgemein, nicht nur bei langsamem Wechselstrom.

### § 4. Sehr schneller Wechselstrom.

Mit $n = \infty$, $k = \infty$ wird wegen des bekannten Verhaltens der Besselschen Funktionen bei großem Argument:

$$\frac{J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)} = -i \quad \text{und für } \varrho < r \quad \frac{J_\nu(k\varrho)}{J_\nu'(kr)} = 0.$$

Die Gleichungen (3) und (5) zeigen daraufhin das Auftreten eines unendlich ausgeprägten Skineffektes: das Innere des Leiterquerschnittes wird stromlos, auf der Oberfläche fließt ein unendlich konzentrierter Strom. Nach (14) wird $\lambda_\nu = 0$ und nach der ersten Gleichung (6) $\mathfrak{H}_\varrho = 0$ an der Drahtperipherie. Diese selbst wird also eine magnetische Kraftlinie. Gleichung (25) ergibt jetzt für den Widerstand (man übersieht leicht, daß für unendlich hohe Frequenzen $c_\nu$ reell, also $c_\nu = \bar{c}_\nu$ wird):

$$(32) \qquad \frac{w}{w_0} = r\sqrt{\frac{\pi\mu n\sigma}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2 \sum_1^\infty c_\nu^2\right).$$

Um die $c$ zu bestimmen, muß man das magnetische Feld kennen. Wir führen dieses auf die Lösung einer Abbildungsaufgabe zurück.

---

1) P. Drude, Ann. d. Phys. **9.** p. 293. 1902.

Dabei stellen wir den Picciatischen Fall sehr dichter Wickelung ($h = 2r$) voran. In diesem läßt sich die Abbildungsaufgabe nach der Theorie der *elliptischen Modulfunktionen* vollständig erledigen, während der allgemeine Fall $h > 2r$ auf die Theorie der sogenannten *automorphen Funktionen* führt, die für unsere Zwecke noch nicht hinreichend entwickelt ist.

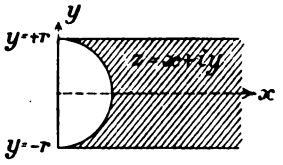



Fig. 2a.

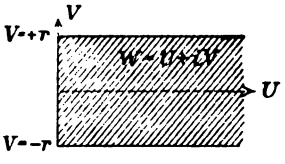



Fig. 2b.

Das schraffierte Gebiet in Fig. 2a stellt einen Ausschnitt aus dem rechten Teile der Fig. 1 für den Fall $h = 2r$ dar; es ist begrenzt durch den Halbkreis $\varrho = r$ und durch die beiden Geraden $y = \pm r$. $ds$ bedeute ein Linienelement der Begrenzung unseres Gebietes, $dn$ das Linienelement der Normalen. Der Halbkreis ist, wie bemerkt, eine magnetische Kraftlinie; daher wird auf ihm $\partial V/\partial n = 0$. Die beiden Geraden werden (vgl. Fig. 1) aus Symmetriegründen von den magnetischen Kraftlinien senkrecht geschnitten; daher ist auf ihnen $\partial V/\partial s = 0$ oder $V =$ const., nämlich bzw. $V = \pm r$ (wegen des Verhaltens im Unendlichen).

Neben $V$ betrachten wir das konjugierte Potential $U$, welches hier nur die Bedeutung einer mathematischen Hilfsgröße hat. Wegen der allgemeinen Beziehung $\partial V/\partial n = -\partial U/\partial s$ ist auf unserem Halbkreise $\partial U/\partial s = 0$, d. h. $U =$ const.; wir können wählen $U = 0$. Infolgedessen durchläuft die komplexe Größe $W = U + iV$ die Begrenzung von Fig. 2b, während die komplexe Größe $z = x + iy$ diejenige von Fig. 2a beschreibt; unsere Aufgabe besteht darin, das eine Gebiet konform auf das andere abzubilden mittels einer analytischen Funktion

$$W = f(z).$$

Hierfür liefert die Theorie der elliptischen Modulfunktionen die folgende Lösung[1]):

$$\frac{W}{r} = i - \frac{4}{\pi} \log \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}. \tag{33}$$

1) Ich verdanke dieselbe zum großen Teile meinem Freunde R. Fricke.

$\vartheta_2$ und $\vartheta_3$, die sogenannten „Theta-Nullwerte", sind Funktionen der von Jacobi mit $q$ bezeichneten Größe, welche in unserem Fall die Bedeutung hat

$$q = -e^{-\pi\frac{s}{r}},$$

und zwar gilt in Produktdarstellung:

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = 2\,q^{1/4}\left(\frac{\Pi(1+q^{2\nu})}{\Pi(1+q^{2\nu-1})}\right)^2.$$

In (33) eingesetzt ergibt sich:

$$\frac{W}{r} = -\frac{4\log 2}{\pi} + \frac{x}{r} - \frac{8}{\pi}\sum\nolimits_{(\nu)}\log\left(1+e^{-2\nu\pi\frac{s}{r}}\right) + \frac{8}{\pi}\sum\nolimits_{(\nu)}\log\left(1-e^{-(2\nu-1)\pi\frac{s}{r}}\right).$$

Ersetzt man die Logarithmen durch ihre Reihen und ordnet die entsprechenden Doppelsummen in eine einfache um, so erhält man folgende definitive Entwickelung:

$$\frac{W}{r} = -\frac{4\log 2}{\pi} + \frac{x}{r} - \frac{1}{\pi}\sum\nolimits_{(s)}\alpha_s\, e^{-\pi s\frac{s}{r}}. \tag{34}$$

Der Koeffizient $\alpha_s$ hat die folgende eigentümliche Bedeutung:

$$\alpha_s = 8\sum(-1)^{s+n+\frac{s}{n}-1}\cdot\frac{1}{n},$$

die Summe erstreckt über alle Teiler $n$ von $s$; z. B.

$$\begin{cases}\alpha_1 = 8, \quad \alpha_2 = 8\left(1+\frac{1}{2}\right) = 12, \quad \alpha_3 = 8\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3},\\ \alpha_4 = 8\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 6, \quad \alpha_5 = 8\left(1+\frac{1}{5}\right) = \frac{48}{5}, \ldots\end{cases} \tag{35}$$

Die $\alpha$ schwanken stark hin und her, ohne sich für $s = \infty$ einer Grenze zu nähern.

Aus (34) folgt:

$$\begin{cases}\frac{U}{r} = -\frac{4\log 2}{\pi} + \frac{x}{r} - \frac{1}{\pi}\sum\nolimits_{(s)}\alpha_s\, e^{-\pi s\frac{x}{r}}\cos\pi s\frac{y}{r},\\ \frac{V}{r} = \frac{y}{r} + \frac{1}{\pi}\sum\nolimits_{(s)}\alpha_s\, e^{-\pi s\frac{x}{r}}\sin\pi s\frac{y}{r}.\end{cases} \tag{36}$$

Der Vergleich der letzten Gleichungen mit Gleichung (1), in welcher $h = 2r$ zu substituieren ist, zeigt unmittelbar, daß unsere jetzigen Koeffizienten $\alpha$ mit denjenigen des § 1 identisch

sind. (Die früheren Koeffizienten $\beta$ sind im vorliegenden Spezialfalle eines unendlich schnellen Wechselstromes und dicht anliegender Windungen gleich Null, indem das Äußere der Spule feldfrei abgeschirmt ist.)

Der Beweis der vorstehenden Angaben kann außer durch die Theorie der Modulfunktionen direkt numerisch erbracht werden, indem wir an den Schlußformeln (36) zeigen, daß sie wirklich die Begrenzung von Fig. 2a in die von Fig. 2b überführen. Was zunächst die horizontalen Begrenzungen $y = \pm r$ betrifft, so zeigt die zweite Gleichung (36) sofort, daß ihnen $V = \pm r$ entspricht. Andererseits ergibt sich aus der ersten Gleichung (36) für den Halbkreis $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$:

$$(37)\quad \frac{\pi}{r} U = -4\log 2 + \pi\cos\vartheta - \sum \alpha_s e^{-\pi s\cos\vartheta}\cos(\pi s\sin\vartheta).$$

In der folgenden Tabelle[1]) sind die Werte der drei Terme, in die sich $U/r$ hiernach zerlegt, für $\vartheta = 0^0, 15^0, \ldots 75^0$ angegeben[2]): sie liefern, wie man sieht, die Summe Null, wie es in Fig. 2b verlangt wird. Der Beweis ist also vollständig.

| | $\frac{\pi}{r} U$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{H}^2$ |
|---|---|---|---|
| $\vartheta = 0$ | $-2{,}773 + 3{,}142 - 0{,}369$ | 1,393 | 1,940 |
| $\vartheta = 15$ | $-2{,}773 + 3{,}084 - 0{,}262$ | 1,301 | 1,693 |
| $\vartheta = 30$ | $-2{,}773 + 2{,}721 + 0{,}052$ | 1,035 | 1,071 |
| $\vartheta = 45$ | $-2{,}773 + 2{,}221 + 0{,}551$ | 0,614 | 0,377 |
| $\vartheta = 60$ | $-2{,}773 + 1{,}571 + 1{,}208$ | 0,136 | 0,018 |
| $\vartheta = 75$ | $-2{,}773 + 0{,}813 + 1{,}961$ | 0,018 | 0,000 |

Aus der zweiten Gleichung (36) berechnen wir ferner für $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ durch Differentiation nach $\vartheta$:

$$\mathfrak{H}_\vartheta = He^{int}\left(\cos\vartheta + \sum s\,\alpha_s e^{-\pi s\cos\vartheta}\cos(\vartheta - \pi s\sin\vartheta)\right).$$

Der Verlauf dieser Größe ist (bis auf den gemeinsamen Faktor $He^{int}$) in der zweiten Kolumne der Tabelle eingetragen und

1) Diese und die Tabelle des Anhanges I ist von Hrn. Dr. Hondros sorgfältig gerechnet, wofür ich ihm herzlich danke.

2) Für $\vartheta = 90^0$ wird diese Reihe divergent. Damit hängt es zusammen, daß die allgemeinen Gleichungen des § 2 [Gleichungen (21) bis (23)], welche durch gliedweise Integration nach $\vartheta$ entstanden sind, hier ebenfalls divergieren.

durch Fig. 3 verdeutlicht; in der dritten Kolumne sowie in Fig. 3 ist ebenso $\mathfrak{H}_\vartheta^2$ dargestellt.

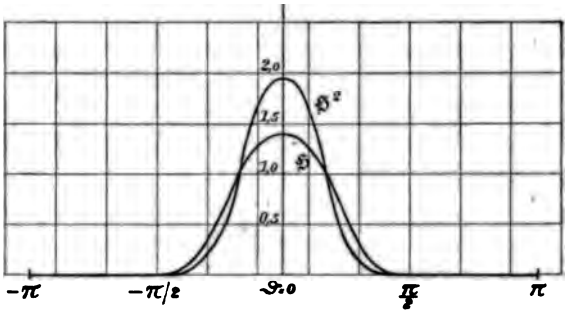



Fig. 3.

Der Verlauf von $\mathfrak{H}_\vartheta$ liefert zugleich vollständigen Aufschluß über die Verteilung der spezifischen Stromstärke über die Peripherie des Leiters. Nach Gleichung (6) ist nämlich

$$\mathfrak{H}_\vartheta = H e^{int} \sum c_\nu \cos \nu \vartheta \tag{38}$$

und hiervon unterscheidet sich nach Gleichung (3) die Stromstärke nur um einen (mit $n$ unendlich groß werdenden) Faktor. Der Strom ist also, wie es zu erwarten war, vornehmlich auf die Mitte der Innenperipherie des Spulendrahtes ($\vartheta = 0$) konzentriert und nimmt von da aus nach den Seiten hin ($\vartheta = \pm \pi/2$) stark ab. Die Außenperipherie ($\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2$) ist in unserem Sonderfalle stromfrei, ebenso wie sie nach obigem von magnetischen Kraftlinien frei ist. Es würde keine Schwierigkeit haben, die Koeffizienten $c_\nu$ durch harmonische Analyse der $\mathfrak{H}$-Kurve zahlenmäßig zu bestimmen. Für das Folgende kommt es aber nur auf eine gewisse Verbindung der $c$ an, die wir leichter auf anderem Wege bestimmen.

Aus (38) folgt, wenn wir wieder den gemeinsamen Faktor $He^{int}$ unterdrücken:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_\vartheta \, d\vartheta = c_0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_\vartheta^2 \, d\vartheta = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty c_\nu^2. \tag{39}$$

Die erste dieser Gleichungen liefert eine erwünschte Kontrolle für unsere Rechnung. Da nämlich $c_0$ nach (15) gleich $1/\pi$ ist, so muß der Mittelwert der Koordinaten der $\mathfrak{H}$-Kurve in Fig. 3 den Wert 0,32 haben, was zutrifft. Die zweite Gleichung (39)

zusammen mit der Planimetrierung der $\mathfrak{H}^2$-Kurve in Fig. 3 liefert als Mittelwert der Koordinaten dieser Kurve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{H}_\phi^2\,d\vartheta = 0{,}378 = \frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{\pi^2}{2}\sum_1^\infty c_\nu^2\right).$$

Nach Gleichung (32) ist nun aber auch der Widerstand sofort bekannt. Es wird nämlich für $h = 2r$:

$$\frac{w}{w_0} = r\sqrt{\frac{\pi\mu n\sigma}{2}}\cdot\pi^2\,.\,0{,}378 = r\sqrt{\frac{\pi\mu n\sigma}{2}}\cdot 3{,}73\,. \tag{40}$$

Damit ist unsere Hauptaufgabe der Widerstandsbestimmung bei hoher Frequenz wenigstens für einen charakteristischen Grenzfall erledigt.

Für den allgemeinen Fall eines beliebigen $h$ schreiben wir Gleichung (32) folgendermaßen:

$$\frac{w}{w_0} = r\sqrt{\frac{\pi\mu n\sigma}{2}}\,\varphi\left(\frac{2\pi r}{h}\right); \tag{41}$$

von der hier eingeführten Funktion

$$\varphi\left(\frac{2\pi r}{h}\right) = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2\sum c_\nu^2 \tag{42}$$

ist bisher nur bekannt, daß sie in dem Grenzfalle $2\pi r/h = \pi$ gleich 3,73 ist. Aber noch in dem entgegengesetzten Grenzfall sehr weiter Wickelung, $2\pi r/h = 0$, ist der Wert von $\varphi$ bekannt, nämlich nach (42) gleich 1. Dies stimmt mit der Schlußbemerkung von § 2 überein, nach der sich unsere Formel hier auf die Rayleighsche Grenzformel für den Widerstand eines geraden Drahtes reduzieren muß. In Fig. 4 sind die beiden Endpunkte der $\varphi$-Kurve für $2\pi r/h = 0$ und $= \pi$ durch $\times$ markiert.

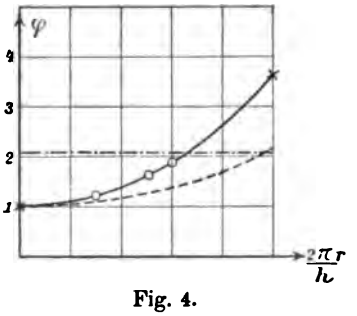


Fig. 4.

Wir behaupten aber weiter, daß wir auch noch den Verlauf der $\varphi$-Kurve in der Nähe des Punktes $2\pi r/h = 0$, $\varphi = 1$ angeben können. Hierbei kommt es zunächst auf das magnetische Feld an, welches durch die Koeffizienten $\alpha$, $\beta$ bestimmt

wird. Von den allgemeinen Gleichungen (11), (12) und (21), (22), (23), denen dieselben zu genügen haben, sind jetzt nur die ersteren von Belang, da sich die letzteren auf die nach Voraussetzung verschwindend kleine Peripherie der Drähte beziehen. Die Gleichungen (11), (12) aber werden durch den aus der Maxwellschen Gitterlösung fließenden Ansatz des § 3

$$\alpha_s = -\beta_s = \frac{1}{s},$$

erfüllt[1]), wie wir in § 3 sahen. Deshalb haben auch die Koeffizienten $c$ die in § 3 Gleichung (28) angegebenen Werte. Unter Beschränkung auf die niedrigste Potenz von $2\pi r/h$ ergibt sich also aus (28) und (42) für hinreichend kleine Werte von $2\pi r/h$:

$$\varphi\left(\frac{2\pi r}{h}\right) = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2. \tag{43}$$

Der Verlauf dieser Näherungskurve ist in Fig. 4 punktiert eingezeichnet, der mutmaßliche Verlauf der $\varphi$-Kurve selbst ist ausgezogen, so zwar, daß sie sich den mit o bezeichneten, sogleich zu nennenden Messungen von Black anpaßt.

Die physikalische Bedeutung der Ordinaten unserer $\varphi$-Kurve ist diejenige des festen Grenzwertes, dem sich bei gegebener Ganghöhe das Verhältnis Spulenwiderstand : Widerstand des geraden Drahtes bei unendlich wachsender Frequenz nähert (vgl. Einleitung unter c). Auf eben dieses Verhältnis beziehen sich die benutzten Messungen von Black, die für die Abszissenwerte $2\pi r/h = 3\pi/10$, $\pi/2$ und $3\pi/5$ ausgeführt sind bei den Wechselzahlen[2]) $1.10^6$ und $5.10^6$ und bei verschiedenen äußeren

1) Übrigens befriedigt derselbe Ansatz auch die Gleichungen (21), (22); daß (23) auf dem (unendlich kleinen) Kreise vom Radius $r$ nicht erfüllt ist, liegt daran, daß die Maxwellsche Gitterlösung (vgl. den Anfang von § 3) sich strenge genommen nicht auf Gitterstäbe von kreisförmigem Querschnitte, sondern auf solche von einer gewissen komplizierteren Form bezieht. Für einen Spulendraht derselben Form würde auch unsere Gleichung (23) erfüllt werden.

2) Von den Blackschen Messungen habe ich [vgl. oben Einleitung p. 610 unter c)] nur diejenigen benutzt, für welche $\varkappa > 6$ ist. Die anderen bei $10^6$ Wechseln ausgeführten Messungen entsprechen noch nicht völlig unserer Annahme einer „unendlich großen" Frequenz. Die hiernach direkt in Frage kommenden Messungen geben für die im Text genannten Werte von $2\pi r/h$ als zugehörige Verhältniszahlen $\varphi$ bzw. die Werte 1,29, 1,72, 1,86 mit einer Genauigkeit von etwa 3 Proz.

Durchmessern der Spule. Daß sich diese Ordinaten so vollständig dem interpolierten Verlauf unserer $\varphi$-Kurve anpassen, bzw. daß sich diese Kurve so zwanglos jenen Ordinaten anpassen ließ, ist eine vollständige Bestätigung unserer Interpolation und der ihr zugrunde liegenden Theorie.

Die folgende Tabelle gibt die aus einer vergrößerten Widerholung der Fig. 4 bei möglichst glattem Kurvenverlauf abgegriffenen $\varphi$-Ordinaten:

$$(44)\quad \begin{cases} \frac{2r}{h} = 0, \ \frac{1}{10}, \ \frac{2}{10}, \ \frac{3}{10}, \ \frac{4}{10}, \ \frac{5}{10}, \ \frac{6}{10}, \ \frac{7}{10}, \ \frac{8}{10}, \ \frac{9}{10}, \ 1, \\ \varphi = 1, \ 1{,}0, \ 1{,}1, \ 1{,}27, \ 1{,}45, \ 1{,}67, \ 1{,}92, \ 2{,}2, \ 2{,}6, \ 3{,}1, \ 3{,}73. \end{cases}$$

Die Abweichung der hier mitgeteilten Zahlen von den Blackschen Meßwerten liegt innerhalb der Genauigkeitsgrenze der letzteren (vgl. die vorige Anm.).

Mit meiner früheren, eingangs zitierten Arbeit sind diese Ergebnisse in vollem Einklang. Als Spulenwiderstand bei unendlich hoher Frequenz ergab[1]) sich dort (vgl. die Gleichungen (22) und (18′) l. c.) zunächst:

$$\frac{w}{w_0} = r\sqrt{\frac{\pi\mu n\sigma}{2}} \cdot 2\sqrt{\pi}.$$

Hierzu sollte ein Erfahrungsfaktor $\gamma$ von der ungefähren Größe 0,6 gefügt werden, so daß

$$\frac{w}{w_0} = r\sqrt{\frac{\pi\mu n\sigma}{2}} \cdot 2{,}1.$$

Die frühere Berechnung, in der auf die Ganghöhe nicht Rücksicht genommen war, lieferte also statt der Kurve $\varphi$ den Mittelwert 2,1, der sich (vgl. die strich-punktierte Horizontale der Fig. 4) gut in den jetzt bekannten Verlauf von $\varphi$ einfügt.

**Anhang I. Tabelle der Koeffizienten $\gamma$ und $\delta$ für $h = 2r$.**

| $\gamma_{s,\nu}$ | $\nu = 1$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $s = 1$ | 0,0370 | 0,0865 | 0,0589 | −0,0165 |
| 2 | −0,0074 | −0,0002 | −0,0239 | +0,085 |
| 3 | 0,0022 | 0,0028 | −0,0057 | −0,0009 |
| 4 | −0,0003 | −0,0008 | 0,0022 | 0,0031 |
| 5 | 0,0005 | 0,0003 | −0,0012 | −0,0012 |

1) Ich habe des bequemeren Vergleichs wegen den Faktor $\mu$ hinzugefügt, der dort gleich 1 gesetzt war, und $r$ statt $\varrho$ geschrieben.

| $\delta_{s\nu}$ | $\nu = 1$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $s = 1$ | −0,5996 | −0,3191 | +0,3070 | +0,3005 |
| 2 | 0,3109 | 0,1013 | −0,2937 | −0,087 |
| 3 | −0,3100 | −0,0424 | 0,1921 | 0,0831 |
| 4 | 0,1589 | 0,0246 | −0,1509 | −0,0457 |
| 5 | −0,1268 | −0,0159 | 0,1230 | 0,0304 |

**Anhang II. Ableitung der Summenformeln (18).**

Mit den Abkürzungen

$$X = 2i \sum_{1}^{\infty}{}^{(s)}\, g_{s\nu}, \qquad \alpha = \frac{2\pi r}{h} \tag{45}$$

ergibt sich aus der Darstellung (17)

$$X = \int_{-i}^{+i} \sum{}^{(s)}\, e^{-\alpha s x} x^{\nu}\, dx = \int_{-i}^{+i} \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} x^{\nu}\, dx; \tag{46}$$

wegen der Bedeutung von $x = e^{i\phi}$ ist die Integration über die rechte Hälfte des Einheitskreises der Fig. 5 im positiven Sinne

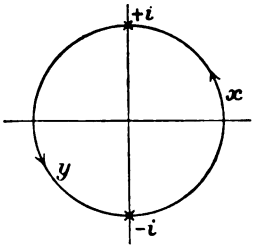



Fig. 5.

zu erstrecken. Multiplizieren wir Zähler und Nenner im letzten Integral mit $e^{+\alpha x}$, so haben wir auch:

$$X = -\int_{-i}^{+i} \frac{1}{1 - e^{\alpha x}} x^{\nu}\, dx = -\int_{-i}^{+i} \left(1 + \frac{e^{\alpha x}}{1 - e^{\alpha x}}\right) x^{\nu}\, dx$$

$$= -\int_{-i}^{+i} x^{\nu}\, dx - Y, \quad Y = \int_{-i}^{+i} \frac{e^{\alpha x}}{1 - e^{\alpha x}} x^{\nu}\, dx,$$

also

$$X + Y = -\int_{-i}^{+i} x^{\nu}\, dx = 2i \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\nu - 1)}{\nu + 1}. \tag{47}$$

Machen wir in $Y$ die Substitution $y = -x$, so wird

$$Y = (-1)^{\nu+1} \int_{+i}^{-i} \frac{e^{-ay}}{1-e^{-ay}} y^{\nu} dy, \tag{48}$$

wo sich die Integration über die linke Hälfte des Einheitskreises in Fig. 2 im positiven Sinne erstreckt. Daher folgt aus (46) und (48)

$$X + (-1)^{\nu+1} Y = \int \frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} x^{\nu} dx.$$

Die Integration ist jetzt über den ganzen Einheitskreis zu erstrecken und kann nach dem Cauchyschen Satze der Funktionentheorie auf den Nullpunkt zusammengezogen werden. Dabei ergibt sich, wenn $\nu > 0$:

$$X + (-1)^{\nu+1} Y = 0. \tag{49}$$

Bei ungeradem $\nu$ werden die Gleichungen (47) und (49) identisch und lassen keinen Schluß auf $X$ zu; bei geradem $\nu$ dagegen liefern sie durch Summation:

$$2X = 2i \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\nu-1)}{\nu+1} \quad \text{oder} \quad 2\sum g_{\sigma\nu} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\nu-1)}{\nu+1}, \tag{50}$$

wie in (18) angegeben.

Sodann sei nach (17) bei abgeänderter Bedeutung von $X$:

$$X = 2i \sum_{1}^{\infty}{}^{(\sigma)} d_{\sigma\nu} = \int_{-i}^{+i} \sum{}^{(\sigma)} e^{-a\sigma x} x^{-\nu} dx = \int_{-i}^{+i} \frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} \cdot x^{-\nu} dx, \tag{51}$$

das Integral wie oben über die rechte Hälfte des Einheitskreises erstreckt. Dieselbe Umrechnung wie oben liefert:

$$X = -\int_{-i}^{+i} x^{-\nu} dx - Y, \quad Y = \int_{-i}^{+i} \frac{e^{ax}}{1-e^{ax}} x^{-\nu} dx,$$

$$X + Y = -\int_{-i}^{+i} x^{-\nu} dx = 2i \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\nu-1)}{\nu-1}. \tag{52}$$

Die Substitution $y = -x$ führt $Y$ über in das über die linke Hälfte des Einheitskreises genommene Integral:

$$Y = (-1)^{\nu+1} \int_{-i}^{+i} \frac{e^{-ay}}{1-e^{-ay}} y^{-\nu} dy. \tag{53}$$

Aus (51) und (53) folgt:

$$X + (-1)^{\nu+1} Y = \int \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} x^{-\nu} dx,$$

das Integral über den ganzen Einheitskreis erstreckt. Dasselbe ist nach dem Cauchyschen Satze nicht Null, sondern $2\pi i C_\nu$, wenn wir mit $C_\nu$ die Koeffizienten der Entwickelung von

$$(54) \qquad \psi(x) = \frac{x e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} = C_0 + C_1 x + \ldots C_\nu x^\nu + \ldots$$

bezeichnen. Mithin wird

$$(55) \qquad X + (-1)^{\nu+1} Y = 2\pi i C_\nu.$$

Unsere Koeffizienten $C$ hängen mit den sog. Bernoullischen Zahlen, d. i. mit den Größen

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

zusammen. Man kann letztere nämlich definieren[1]) durch die Entwickelung:

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \frac{B_6 x^6}{6!} - \ldots.$$

Für unsere Funktion $\psi$ folgt hieraus:

$$(56) \qquad \psi(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha x + \frac{B_2 (\alpha x)^2}{2!} - \frac{B_4 (\alpha x)^4}{4!} + \ldots\right).$$

Der Vergleich von (54) und (56) zeigt nun:

$$(57) \qquad C_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad C_3 = C_5 = \ldots = 0,$$

$$(58) \qquad C_\nu = -(-1)^{\nu/2} \frac{B_\nu}{\nu!} \alpha^{\nu-1} \text{ bei geradem } \nu > 0.$$

Betrachten wir schließlich die Gleichungen (52) und (55). Diese werden bei ungeradem $\nu$ vermöge (57) identisch. Bei geradem $\nu$ ergeben sie durch Addition mit Rücksicht auf (58):

$$2X = 2i \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\nu+1)}{\nu - 1} - 2\pi i (-1)^{\nu/2} \frac{B_\nu}{\nu!} \alpha^{\nu-1},$$

oder

$$2 \sum d_{s\nu} = -\frac{\sin \frac{\pi}{2}(\nu+1)}{\nu - 1} - \pi (-1)^{\nu/2} \frac{B_\nu}{\nu!} \alpha^{\nu-1},$$

in Übereinstimmung mit unserer früheren Angabe in Gleichung (18).

1) Vgl. z. B. Pascal, Repertorium d. höheren Mathematik, deutsche Ausgabe, Leipzig 1900, Bd. I, p. 471.

**Zusammenfassung.**

Das Problem, Stromverteilung, magnetisches Feld und Widerstand für eine Wechselstrom führende Spule von kreisförmigem Querschnitt und beliebiger Ganghöhe zu ermitteln, wird in Strenge behandelt unter folgenden Vereinfachungen:

1. Die Spule wird als unendlich lang angesehen.
2. Die Verschiebungsströme werden vernachlässigt.
3. Der Spulendurchmesser wird gleich unendlich gesetzt (hierzu vgl. Einleitung a)).

Im allgemeinen führt das Problem auf ein unendliches System linearer Gleichungen, deren Unbekannten die Koeffizienten des magnetischen Feldes sind.

Die Spezialisierung auf langsamen Wechselstrom gibt die Widerstandsformel (30). Die Abhängigkeit von der Schwingungszahl ist die aus meiner früheren und einer M. Wienschen Arbeit bekannte; die Abhängigkeit von dem Verhältnis Drahtradius : Ganghöhe wird durch eine Reihe dargestellt, deren Koeffizienten mit den Bernoullischen Zahlen gebildet sind.

Der entgegengesetzte Spezialfall sehr schnellen Wechselstromes wird bei dichter Wickelung mittels einer Abbildungsaufgabe aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen erledigt. Den in diesem Falle auftretenden einseitigen Skineffekt stellt Fig. 3 dar. Die Abhängigkeit von der Frequenz $n$ ist allemal die vom geraden Draht her bekannte, nämlich $\sqrt{n}$. Die Abhängigkeit von der Ganghöhe interpoliert Fig. 4 oder Tabelle (44) zwischen dem Fall sehr dichter und dem leicht direkt zu behandelnden Fall sehr weiter Wickelung.

Die Ergebnisse meiner früheren vereinfachten Behandlung desselben Problems werden überall bestätigt, so zwar, daß der früher als Erfahrungskoeffizient eingeführte Reduktionsfaktor jetzt theoretisch festgestellt wird.

(Eingegangen 29. Oktober 1907.)

## 2. *Über die Strahlung von Elektronengruppen; von G. A. Schott.*

§ 1. *Umformung der Lorentzschen Potentiale.* Wir gehen von den bekannten Lorentzschen Potentialen $\varphi$ und $\mathfrak{a}$ aus, wo

$$(1) \quad \varphi = \iiint [\varrho] \frac{dx'dy'dz'}{R}, \quad \mathfrak{a} = \iiint \left[\varrho \frac{\mathfrak{v}}{c}\right] \frac{dx'dy'dz'}{R}.$$

Hier ist $(x, y, z)$ der Aufpunkt, $dx'\,dy'\,dz'$ ein im Punkte $(x', y', z')$ gelegenes festes Volumelement,

$$R = + \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

und $\varrho$ die Ladungsdichte, $\mathfrak{v}$ die Ladungsgeschwindigkeit im Punkte $(x', y', z')$ zur Zeit $t - R/c$. Es sind also $\varrho$, $\mathfrak{v}$ implizite Funktionen von $t, x, y, z$; wir wollen nun die Ausdrücke (1) umformen, so daß $t$ als explizite Variable erscheint.

Mittels des Fourierschen Lehrsatzes bekommen wir z. B.

$$(2) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{dx'dy'dz'}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho \cos v(t - R/c - \tau)\, d\tau\, dv,$$

wo $v$ eine Hilfsvariable, und $\tau$ als Zeit aufzufassen sind. Hier ist $\varrho$ als explizite Variable von $x', y', z', \tau$ für alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gegeben, und ebenso $\mathfrak{v}$. Für $\mathfrak{a}$ gilt ein entsprechender Ausdruck.

Die Ausdrücke (2) wollen wir jetzt auf bewegte Ladungselemente statt auf feste Volumelemente beziehen, da ja in erster Instanz die Koordinaten und Geschwindigkeiten eines jeden Ladungselementes gegeben sind.

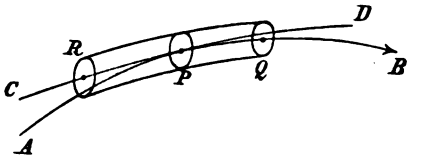
Es sei $APQB$ die Bahn desjenigen Ladungselementes, welches sich zur Zeit $\tau$ im Punkte $(x', y', z')$, $P$ befindet, $Q$, dessen Lage zur Zeit $\tau + d\tau$.

Wir nehmen nun um $P$ herum ein Flächenelement $\sigma$ und ziehen die seiner Begrenzung entsprechenden Bahnlinien, welche zusammen eine unendlich dünne Röhre aus dem Raume heraus-

schneiden. Wir nehmen das Element $PQ$ dieser Röhre zum Volumelement der Integrale (2), so daß

$$dx'dy'dz' = v\sigma d\tau.$$

Ferner sei $CRPD$ die Bahn des festen Punktes $P$ relativ zur bewegten Gesamtladung, als substanzielles Gebilde betrachtet;




die der Begrenzung von $\sigma$ entsprechenden Relativbahnen schneiden aus ihr eine unendlich dünne Röhre heraus, welche die erste Röhre in $P$ berührt. Die zur Zeit $\tau + d\tau$ im festen Volumelemente $PQ$ enthaltenen Ladungen füllten zur Zeit $\tau$ das Volumelement $RP$ der Gesamtladung aus, wobei offenbar $RP = PQ = v d\tau$ ist. Die Summe dieser Ladungen nehmen wir zum Ladungselemente $de$ des neuen Integrales, so daß $de = \varrho v \sigma d\tau$. Also ist auch

$$de = \varrho\, dx'dy'dz'.$$

Dem Zeitelement $d\tau$, welches das Ladungselement $de$ braucht, um die Strecke $RP$ oder $PQ$ ihrer Bahn zurückzulegen, entspricht genau demselben Zeitelement $d\tau$, welches der feste Punkt $P$ braucht, um relativ zur bewegten Ladung die Strecke $RP$ zurückzulegen, und die Integrationsgrenzen sind offenbar dieselben.

Wir bekommen also identisch

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2\pi}\int de \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos v(t - R/c - \tau)}{R} d\tau\, dv, \\ \mathfrak{a} = \frac{1}{2\pi}\int de \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos v(t - R/c - \tau)}{R} \left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) d\tau\, dv. \end{cases}$$

Die Integrationen sind über alle Ladungselemente und für jedes für die ganze Zeit von $-\infty$ bis $\infty$ zu erstrecken; dabei sind die Koordinaten, sowie auch $\varrho$ und $\mathfrak{v}$, als Funktionen

von $\tau$ und irgendwelchen das Ladungselement $de$ bestimmenden Parametern anzusehen.

In allen Fällen, wo das Feld eines Elektrons für gegen dessen Dimensionen große Entfernungen gesucht wird, kann die Integration in bezug auf $de$ durch eine Summation in bezug auf die Ladungen $e$ der Elektronen ersetzt werden, wobei $R$ von irgend einem Punkte des Elektrons gemessen werden kann. Insbesondere gilt dieses für alle Strahlungsprobleme.

§ 2. Es sei nun ein System von Elektronen gegeben, welches sich in Bahnen von endlichen Dimensionen bewegt; wir fragen nach dem Felde für im Vergleiche dazu als unendlich anzusehenden Entfernungen.

Wir können setzen

$$R = r - \frac{x x' + y y' + z z'}{r} = r - p, \tag{4}$$

wo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die Entfernung des Aufpunktes vom irgendwie in der Nachbarschaft der Elektronen gedachten Anfangspunkt, und $p$ die Projektion des Radiusvektors eines Elekrons auf $r$ bedeuten. Im Kosinus müssen wir das Glied $p$ in (4) beibehalten, eben weil derselbe für unendliche Werte von $r$ endlich bleibt; dagegen können wir in den Nennern von (3) $R = r$ setzen. So bekommen wir für ein jedes Elektron

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{2\pi r}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos v(t - r/c + p/c - \tau)\, d\tau\, dv, \\ \mathfrak{a} &= \frac{e}{2\pi r}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos v(t - r/c + p/c - \tau)\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) d\tau\, dv. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

§ 3. *Einfach periodische Bewegung eines Elektrons.* Es sei die Periode $= T$; wir setzen $T = 2\pi/\omega$, $\tau = \chi/\omega$ und $x' = f(\chi)$, $y' = g(\chi)$, $z' = h(\chi)$, wo $f$, $g$, $h$ Funktionen mit der Periode $2\pi$ sind, so daß das Intervall von $\chi = 0$ bis $\chi = 2\pi$ einem Umlauf des Elektrons entspricht.

Wir teilen das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau$ in unendlich viele Teilintegrale der Form

$$\int_{jT}^{(j+1)T} d\tau = \frac{1}{\omega}\int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} d\chi,$$

wo $j$ eine ganze Zahl bedeutet; dabei können wir annehmen, daß $j$ nacheinander alle Werte von $-N$ bis $+N$ annimmt, wo schließlich $N$ unendlich groß zu nehmen ist. Im Teilintegrale ersetzen wir $\chi$ durch $\chi + 2\pi j$, was auf die Werte von $p$ und $\mathfrak{v}$ offenbar ohne Einfluß ist, und bekommen so aus (5)

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi &= -\frac{e}{2\pi r\omega}\int_0^{2\pi} d\chi \,.\, \operatorname*{Lim}_{N=\infty} \sum_{j=-N}^{j=N} \int_{-\infty}^{\infty} \cos v\left(t - r/c - \frac{2\pi j}{\omega} \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{p}{c} - \frac{\chi}{\omega}\right) dv\\
&= \frac{e}{2\pi r\omega}\int_0^{2\pi} d\chi \,.\, \operatorname*{Lim}_{N=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2N+1)\frac{v\pi}{\omega}}{\sin\frac{v\pi}{\omega}} \cos v(t - r/c\\
&\qquad\qquad + p/c - \chi/\omega)\, dv\\
&= \frac{e}{\pi r}\sum_{j=0}^{j=\infty}{}' \int_0^{2\pi} \cos j\{\omega(t - r/c) + \omega p/c - \chi\}\, d\chi\\
\mathfrak{a} &= \frac{e}{\pi r}\sum_{j=0}^{j=\infty}{}' \int_0^{2\pi} \cos j\{\omega(t - r/c) + \omega p/c - \chi\}\frac{\mathfrak{v}}{c}\, d\chi\,.
\end{aligned}\right.$$

§ 4. *Elektronengruppe.* Es seien $n$ Elektronen gegeben, welche dieselbe Bahn mit derselben Periode und gleichen Intervallen hintereinander beschreiben, so zwar, daß für das $i^{te}$ Elektron

$$(7)\quad x' = f\left(\chi + \frac{2\pi i}{n}\right),\quad y' = g\left(\chi + \frac{2\pi i}{n}\right),\quad z' = h\left(\chi + \frac{2\pi i}{n}\right).$$

Solch ein System wollen wir eine Gruppe nennen; ihre hauptsächliche Eigenschaft ist die, daß durch Interferenz der von den verschiedenen Elektronen ausgesandten Wellen eine große Anzahl der harmonischen Glieder der Reihen (6) zerstört werden, und die Gesamtstrahlung der Gruppe dementsprechend klein wird.

In den dem $i^{ten}$ Elektrone entsprechenden Integralen von (6) ersetzen wir $\chi$ durch $\chi + 2\pi i/n$, wobei dann für alle Elektronen dieselben Funktionen $f(\chi)$, $g(\chi)$ und $h(\chi)$ eingeführt werden. Die Grenzen ändern sich in $+ 2\pi i/n$ und

$2\pi + 2\pi i/n$ ab, können aber wegen der Periodizität wieder zu 0 und $2\pi$ gemacht werden. Summieren wir nun für alle Elektronen, d. h. für alle Werte von $i$ von 0 bis $n-1$, so bekommen wir für die ganze Elektronengruppe aus (6)

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{n e}{\pi r} \sum\limits_{s=0}^{s=\infty}{}' \int\limits_0^{2\pi} \cos s n \{\omega(t - r/c) + \omega p/c - \chi\} d\chi, \\ \mathfrak{a} = \dfrac{n e}{\pi r} \sum\limits_{s=0}^{s=\infty}{}' \int\limits_0^{2\pi} \cos s n \{\omega(t - r/c) + \omega p/c - \chi\} \dfrac{\mathfrak{v}}{c} d\chi. \end{cases}$$

§ 5. *Elektrische und magnetische Kräfte.* Mittels der Gleichungen

$$\mathfrak{d} = -\operatorname{grad}.\varphi - \frac{\dot{\mathfrak{a}}}{c},$$

$$\mathfrak{h} = \operatorname{rot}.\mathfrak{a}$$

bekommen wir aus (7) sofort

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{d} = \dfrac{n e \omega}{\pi c^2 r} \sum\limits_{s=1}^{s=\infty} s n \int\limits_0^{2\pi} \sin s n \left\{\omega\left(t - \dfrac{r}{c}\right) + \omega p/c - \chi\right\} (\mathfrak{v} - c\mathfrak{r}_1) d\chi, \\ \mathfrak{h} = \dfrac{n e \omega}{\pi c^2 r} \sum\limits_{s=1}^{s=\infty} s n \int\limits_0^{2\pi} \sin s n \left\{\omega\left(t - \dfrac{r}{c}\right) + \omega p/c - \chi\right\} [\mathfrak{r}_1 . \mathfrak{v}] d\chi, \end{cases}$$

wobei Größen höherer Ordnung als $1/r$ vernachlässigt worden sind.

Führen wir Polarkoordinaten $(r, \theta, \psi)$ ein, wobei $\theta$ Polardistanz und $\psi$ Länge bedeuten, und bilden die radialen Komponenten $\mathfrak{d}_r$, $\mathfrak{h}_r$, so verschwindet $\mathfrak{h}_r$ offenbar; das Integral für $\mathfrak{d}_r$ dagegen besitzt den Faktor

$$\mathfrak{v}_r - c = c \frac{d}{d\chi}(\omega p/c - \chi),$$

so daß der Integrand ein vollständiges Differenzial ist, und das Integral wegen der Periodizität identisch verschwindet. Das entfernte Feld ist also rein transversal. Ferner haben wir

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{d}_\theta = \quad h_\psi = \dfrac{n e \omega}{\pi c^2 r} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} s n \int_0^{2\pi} \sin s n \left\{ \omega \left( t - \dfrac{r}{c} \right) + \omega p/c - \chi \right\} v_\theta \, d\chi , \\ \mathfrak{d}_\psi = - h_\theta = \dfrac{n e \omega}{\pi c^2 r} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=-\infty} s n \int_0^{2\pi} \sin s n \left\{ \omega \left( t - \dfrac{r}{c} \right) + \omega p/c - \chi \right\} v_\psi \, d\chi . \end{cases}$$

Die elektrische und magnetische Kraft sind also einander gleich und stehen aufeinander senkrecht.

Das Feld ist gemäß (9) durch die Größen $p$, $v_\theta$, $v_\psi$ vollständig bestimmt.

Der Kürze halber setzen wir

$$(10)\quad \begin{cases} A_{sn} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos s n (\omega p/c - \chi) v_\theta \, d\chi , \\ B_{sn} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin s n (\omega p/c - \chi) v_\theta \, d\chi , \\ C_{sn} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos s n (\omega p/c - \chi) v_\psi \, d\chi , \\ D_{sn} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin s n (\omega p/c - \chi) v_\psi \, d\chi . \end{cases}$$

Es sind also die $A, \ldots$ gewissermaßen Normalfunktionen der betrachteten Elektronengruppe; wir können wegen (10) schreiben

$$(11)\quad \begin{cases} \mathfrak{d}_\theta = \quad h_\psi = \dfrac{2 n e \omega}{c^2 r} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} s n \{ A_{sn} \sin s n \omega (t - r/c) \\ \qquad\qquad + B_{sn} \cos s n \omega (t - r/c) \}, \\ \mathfrak{d}_\varphi = - h_\theta = \dfrac{2 n e \omega}{c^2 r} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} s n \{ C_{sn} \sin s n \omega (t - r/c) \\ \qquad\qquad + D_{sn} \cos s n \omega (t - r/c) \}, \end{cases}$$

wo also die Kräfte des Feldes in ihre harmonischen Komponenten zerlegt erscheinen.

§ 6. *Strahlung.* Der Poyntingsche Vektor $c/4\pi\,[\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{h}]$ ist offenbar radial nach außen gerichtet und gemäß (9) oder (11) gleich $c/4\pi(\mathfrak{b}_\vartheta^2 + \mathfrak{b}_\psi^2)$. Um die Strahlung zu finden, multiplizieren wir mit $dt/T$ und integrieren über eine Periode, wobei alle Produkte verschiedener harmonischer Komponenten verschwinden; sodann multiplizieren wir mit dem Oberflächenelement $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ und integrieren über die Einheitskugel; so bekommen wir aus (11) für die Gesamtstrahlung $S$ der Elektronengruppe

$$(12)\quad S = \frac{n^2 e^2 \omega^2}{2\pi c^3} \sum_{s=1}^{s=\infty} s^2 n^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (A_{sn}^2 + B_{sn}^2 + C_{sn}^2 + D_{sn}^2) \sin\theta\, d\theta\, d\chi .$$

Die Gleichung (12) liefert den Beweis von der Verminderung der Strahlung durch die Gruppierung, wovon schon im § 5 die Rede war; denn aus ihr folgt, da die Strahlung eines einzelnen Elektrons durch (12) mit $s = 1$ gegeben wird, daß die $n$ ersten Glieder derselben bei der Gruppe durch das $n^2$-fache ihres $n^{\text{ten}}$ Gliedes ersetzt sind usw. Da nun die Größen $A \ldots$ im allgemeinen mit wachsender Ordnungszahl rasch abnehmen, so ist das $n$-fache der $n$ ersten Glieder der Strahlung des einzelnen Elektrons vielmals größer als das $n^2$-fache ihres $n^{\text{ten}}$ Gliedes, welches zugleich auch das Hauptglied der Strahlung der Elektronengruppe ist usw., und deswegen auch die Strahlung $n$ einzelner Elektronen vielmals größer als diejenige der entsprechenden Elektronengruppe.

Die Bedingungen für diese Verminderung der Strahlung durch Interferenz sind in allgemeinster Weise durch die Gleichungen (7) gegeben.

§ 7. *Rotierender Kreisring.* Als einfachstes Beispiel wollen wir diesen Fall eingehend behandeln; wir betrachten also ein System von $n$ Elektronen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Kreise vom Radius $\varrho$ bewegen. Sind sie gleichmäßig verteilt, so bilden sie eine Gruppe, und dementsprechend setzen wir

$$x' = f'(\chi) = \varrho\cos\chi, \quad y' = g(\chi) = \varrho\sin\chi,$$
$$z' = h(\chi) = 0.$$

Daraus folgt

$$p = (x' \cos\psi + y' \sin\psi)\sin\theta + z'\cos\theta = \varrho \sin\theta \cos(\chi - \psi),$$
$$v_\theta = (\dot{x}' \cos\psi + \dot{y}' \sin\psi)\cos\theta - \dot{z}' \sin\theta = -\omega\varrho\cos\theta\sin(\chi - \psi),$$
$$v_\psi = -\dot{x}' \sin\psi + \dot{y}' \cos\psi = \omega\varrho\cos(\chi - \psi).$$

Wir setzen

$$\chi = u + \psi - \frac{\pi}{2}, \quad \omega\varrho/c = \beta;$$

dann folgt aus (18), in der üblichen Bezeichnung der Besselschen Funktionen,

$$A_{sn} = c\cot\theta J_{sn}(sn\beta\sin\theta)\cos sn\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$B_{sn} = -c\cot\theta J_{sn}(sn\beta\sin\theta)\sin sn\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$C_{sn} = -c\beta J'_{sn}(sn\beta\sin\theta)\sin sn\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$D_{sn} = -c\beta J'_{sn}(sn\beta\sin\theta)\cos sn\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$

und daraus mittels (11)

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{d}_\theta = h_\psi = \dfrac{2e\beta}{r\varrho} n^2 \cot\theta \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} s J_{sn}(sn\beta\sin\theta) \\ \qquad\qquad \sin sn\left[\omega(t - r/c) + \dfrac{\pi}{2} - \psi\right], \\ \mathfrak{d}_\psi = -h_\theta = -\dfrac{2e\beta^2}{r\varrho} n^2 \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} s J'_{sn}(sn\beta\sin\theta) \\ \qquad\qquad \cos sn\left[\omega(t - r/c) + \dfrac{\pi}{2} - \psi\right] \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit den anderwärts von mir angegebenen Ausdrücken.[1]) Ferner gibt die Gleichung (12)

$$(14)\quad \begin{cases} S = \dfrac{2ce^2\beta^2}{\varrho^2} n^4 \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} s^2 \int_0^{\pi/2} [\cot^2\theta \,.\, \{J_{sn}(sn\beta\sin\theta)\}^2 \\ \qquad\qquad + \beta^2 \{J'_{sn}(sn\beta\sin\theta)\}^2] \sin\theta\, d\theta. \end{cases}$$

§ 8. Dieser Ausdruck kann mittels des Neumannschen Additionstheorems vereinfacht werden; es ist

$$\{J_{sn}(x)\}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0(2x\sin\varphi)\cos 2sn\varphi\, d\varphi,$$

1) G. A. Schott, Phil. Mag. [6] 13. p. 194.

woraus folgt

$$\{J'_{sn}(x)\}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0(2x\sin\varphi)\left(\cos 2\varphi - \frac{s^2n^2}{x^2}\right)\cos 2sn\varphi\, d\varphi.$$

Setzen wir $x = sn\beta\sin\theta$, so ist daher

$$\cot^2\theta\,.\,\{J_{sn}(sn\beta\sin\theta)\}^2 + \beta^2\{J'_{sn}(sn\beta\sin\theta)\}^2$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0(2sn\beta\sin\theta\sin\varphi)(\beta^2\cos 2\varphi - 1)\cos 2sn\varphi\, d\varphi.$$

Dieses benutzen wir in Gleichung (14), kehren die Reihenfolge der Integrationen um, und beachten, daß

$$\int_0^{\pi/2} J_0(2sn\beta\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\, d\theta = \frac{\sin(2sn\beta\sin\varphi)}{2sn\beta\sin\varphi}$$
$$= \frac{1}{\beta}\int_0^\beta \cos(2snx\sin\varphi)\, dx.$$

Mittels der Definitionsgleichung

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi$$

bekommen wir dann

$$(15)\quad \left\{ S = \frac{2ce^2\beta}{\varrho^2}n^2\sum_{s=1}^{s=\infty}\left[sn\beta^2 J'_{2sn}(2sn\beta) - s^2n^2(1-\beta^2)\int_0^\beta J_{2sn}(2snx)\, dx\right]\right.$$

in Übereinstimmung mit dem früher angegebenen Werte (l. c. p. 194).

Dem Ursprunge nach ist jedes Glied der Summe positiv, also die Summe selbst jedenfalls kleiner als der Wert, den sie für $n = 1$ annimmt; in diesem Spezialfall kann man sie aber berechnen. Man hat nämlich

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{J_{2s}(2sx)}{(2s)^2} = \frac{x^2}{8}\,^{1}),$$

1) N. Nielsen, Zylinderfunktionen p. 303, (5).

woraus mittels der Besselschen Differentialgleichung nacheinander folgen

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} J_{2s}(2sx) = \frac{x^2}{2(1-x^2)}, \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} 2s J'_{2s}(2sx) = \frac{x}{(1-x^2)^2},$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (2s)^2 J_{2s}(2sx) = \frac{2x^2(1+x^2)}{(1-x^2)^4}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (15) ein, wobei $n=1$, so bekommt man für das einzelne Elektron

$$S = \frac{2ce^2\beta^4}{3\varrho^2(1-\beta^2)^2},$$

was mit der bekannten Liénardschen Formel übereinstimmt, und zugleich als Bestätigung der Formel (15) und Beweis ihrer Konvergenz dienen mag.

§ 9. *Mehrfach periodische Bewegung — Störungen einer Elektronengruppe.* Es sind die Koordinaten bestimmt durch Ausdrücke der Form $x' = \Sigma f(\chi)$ usw., wo die Funktionen $f$ usw. periodisch sind, aber inkommensurabele Perioden besitzen. Der allgemeine Fall ist zu kompliziert, als daß es sich lohnen würde ihn eingehend zu behandeln; wir beschränken uns deswegen auf Bewegungen dieser Art, wo die einer Periode entsprechenden Amplituden so stark überwiegen, daß die übrigen nur bis zur ersten Potenz berücksichtigt zu werden brauchen. Mit anderen Worten, wir betrachten eine durch die vorwiegenden Amplituden gekennzeichnete Hauptbewegung, welche kleinen Störungen ausgesetzt ist.

Wir gehen auf die Gleichungen (5) zurück und setzen darin $p + \delta p$ statt $p$, und $\mathfrak{v} + \delta\mathfrak{v}$ statt $\mathfrak{v}$, wo sich $p$ und $\mathfrak{v}$ auf die Hauptbewegung, $\delta p$ und $\delta\mathfrak{v}$ aber auf die Störungen beziehen sollen. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber Bewegungen an, die seit so langer, praktisch unendlicher Zeit bestanden haben, daß der Einfluß der Anfangsbedingungen vernachlässigt werden kann, und vernachlässigen dabei auch die Dämpfung. Wollte man letztere berücksichtigen, so müßte man die Art der Erregung in Betracht ziehen, weil ja die Integration nach der Zeit $\tau$ in (5) sich bis ins negative Unendliche erstreckt und die Integrale sonst nicht konvergieren

würden. Da wir nur die ersten Potenzen der Störungen beibehalten werden, so können wir uns auf je ein einziges Glied von $\delta p$ und $\delta \mathfrak{v}$ beschränken.

§ 10. *Kinematik der Störungen.* $(x', y', z')$ seien die Koordinaten des $i^{\text{ten}}$ Elektrons in der ungestörten Hauptbewegung; sie werden durch Gleichungen der Form (7) definiert, wodurch natürlich auch das durch die Bahntangente, Hauptnormale und Binormale gebildete Triëder für jedes Elektron zu jeder Zeit vollständig bestimmt ist. Es seien $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(l, m, n)$ und $(\lambda, \mu, \nu)$ die Direktionskosinus seiner drei Achsen; dieselben sind also ganz bestimmte Funktionen von $\chi + 2\pi i/n$.

In der gestörten Bewegung ist das Elektron eine kleine Strecke weit aus der Lage, die derselben Zeit in der Hauptbewegung entsprechen würde, verschoben; die Komponenten der Verschiebung in Richtung der Triëderachsen seien $(\xi, \eta, \zeta)$, so daß also $(\xi, \eta, \zeta)$ die Störung vollständig bestimmen.

Ein Punkt, der die Hauptbewegung der Gruppe mitmacht, ist allgemein durch eine Größe $\sigma$ bestimmt, wobei seine Koordinaten durch $x' = f(\chi + \sigma)$ usw. gegeben sind; so ist z. B. $\sigma = 2\pi i/n$ für das $i^{\text{te}}$ Elektron der Gruppe. Die Störung $(\xi, \eta, \zeta)$ läßt sich mittels des Fourierschen Lehrsatzes für diesen Punkt in eine Summe periodischer Funktionen zerlegen, wobei ein jedes Glied von der Form $\xi = A \cos q\tau$ usw. ist. Es ändert sich im allgemeinen $A$ von Punkt zu Punkt, ist also eine Funktion von $\sigma$, und zwar notwendigerweise periodisch mit der Periode $2\pi$. Daraus folgt für die Gesamtheit der Punkte der Elektronengruppe mittels des Fourierschen Lehrsatzes als allgemeinster Ausdruck für $\xi$ eine Summe der Form

$$(16)\quad \begin{cases} \xi = \sum\{A\cos(q\tau - k\sigma) + A_1 \sin(q\tau - k\sigma)\}, \\ \text{und ebenso} \\ \eta = \sum\{B\cos(q\tau - k\sigma) + B_1 \sin(q\tau - k\sigma)\}, \\ \zeta = \sum\{C\cos(q\tau - k\sigma) + C_1 \sin(q\tau - k\sigma)\}, \\ \delta p = \sum\{P\cos(q\tau - k\sigma) + P_1 \sin(q\tau - k\sigma)\}, \\ \delta \mathfrak{v} = \sum\{V\cos(q\tau - k\sigma) + V_1 \sin(q\tau - k\sigma)\}. \end{cases}$$

Hierin ist $q$ eine inkommensurabele Zahl, $k$ dagegen ganzzahlig, und zwar ohne Beschränkung der Allgemeinheit als

zwischen $\pm n/2$ liegend zu betrachten. $A$, $A_1$, $B$, $B_1$, $C$ und $C_1$ sind Konstanten, $P$, $P_1$, $V$ und $V_1$ aber Funktionen von $\omega\tau+\sigma$ mit der Periode $2\pi$; wir haben nämlich

$$\delta x' = \alpha\xi + l\eta + \lambda\zeta, \quad \delta y' = \beta\xi + m\eta + \mu\zeta, \quad dz' = \gamma\xi + n\eta + \nu\zeta,$$

daher auch

$$P = \frac{x}{r}(\alpha A + lB + \lambda C) + \frac{y}{r}(\beta A + mB + \mu C) + \frac{z}{r}(\gamma A + nB + \nu C) \text{ usw.}$$

Für einen bestimmten Punkt bzw. Elektron der Gruppe, also für ein gegebenes $\sigma$, sind $\xi, \ldots$ periodische Funktionen mit der Schwingungszahl $q$, wobei aber man sich hüten muß, $q$ mit der Schwingungszahl der durch die Störung verursachten ausgesandten Wellen zu verwechseln, welche nur aus den zu bestimmenden Ausdrücken für die Feldintensitäten gefolgert werden kann.

Für eine bestimmte Schwingungsphase ist $q\tau - k\sigma$ gegeben; also ist $q\omega/k$ die Geschwindigkeit der Phase relativ zur bewegten Elektronengruppe, und die Ausdrücke (16) entsprechen Wellen, die mit eben dieser Geschwindigkeit in der Gruppe fortschreiten.

Schließlich bestimmt die Zahl $k$ den Typus der Störung; es gibt nämlich bei derselben $2k$ Schwingungsknoten und ebensoviel Bäuche, alle mit dem gleichen Abstand $2\pi/k$.

§ 11. *Potentiale der Störung.* Um das Feld der Störung zu finden, setzten wir die durch (16) gegebenen Ausdrücke für $\delta p$ und $\delta \mathfrak{v}$ in die Gleichungen (5) ein; so bekommen wir für die Störungspotentiale

$$(17)\quad \begin{cases} \delta\varphi = -\dfrac{e}{2\pi r}\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos v(t-r/c+p/c-\tau)\,\delta p\,.\,d\tau\,dv, \\ \delta\mathfrak{a} = -\dfrac{e}{2\pi r}\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos v(t-r/c+p/c-\tau)\left(\dfrac{\mathfrak{v}}{c}\right)\cdot\delta p\,d\tau\,dv \\ \qquad\qquad + \dfrac{e}{2\pi r}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos v(t-r/c+p/c-\tau)\left(\dfrac{\delta\mathfrak{v}}{c}\right)d\tau\,dv. \end{cases}$$

Wir verfahren jetzt gerade wie in dem § 4, teilen nämlich das Integrationsintervall für $\tau$, oder das entsprechende für $\chi = \tau/\omega$, in Teilintegrale von $\chi = 2\pi j$ bis $\chi = 2\pi(j+1)$, und setzen $2\pi j + \chi$ statt $\chi$, wodurch die Funktionen $p$, $\mathfrak{v}$, $P$, $V$ usw. nicht verändert werden, und summieren schließlich über sämtliche Teilintegrale; so bekommen wir z. B.

$$
(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos v(t-r/c+p/c-\chi/\omega)\cos\left(\frac{q}{\omega}\chi - k\sigma\right)P\,d\chi\,dv\\
&\quad=\frac{1}{\omega}\operatorname*{Lim}_{N=\infty}\sum_{j=-N}^{j=N}\int_{-\infty}^{\infty}{}'\int_{0}^{2\pi}\cos v(t-r/c+p/c-\chi/\omega+2\pi j/\omega)\\
&\qquad\qquad\cos\left(\frac{q}{\omega}\chi - k\sigma - 2\pi q j\right)P\,d\chi\,dv\\
&\quad=\frac{1}{\omega}\int_{0}^{2\pi}P\,d\chi\operatorname*{Lim}_{N=\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi(v-q)}{\omega}}{\sin\frac{\pi(v-q)}{\omega}}\\
&\qquad\qquad\cos\left\{v(t-r/c+p/c-\chi/\omega)+\frac{q}{\omega}\chi - k\sigma\right\}dv\\
&=\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\int_{0}^{2\pi}\cos\{q+j\omega)(t-r/c+p/c)-j\chi-k\sigma\}P\,d\chi.
\end{aligned}\right.
$$

Nun verfahren wir wie im § 5, um den Beitrag aller Elektronen der Gruppe zu dem betrachteten Gliede zu finden; in (18) sind $p$ und $P$ für das betrachtete, nullte, Elektron Funktionen von $\chi$, und $\sigma$ ist gleich Null, dagegen sind $p$ und $P$ für das $i^{te}$ Elektron dieselben Funktionen von $\chi + 2\pi i/n$, während $\sigma$ gleich $2\pi i/n$ ist. Um nun für jedes Elektron dieselben Funktionen $p$ und $P$ einzuführen, müssen wir für das $i^{te}$ Elektron überall im Integrale $\chi$ durch $\chi - 2\pi i/n$ ersetzen, also auch im Kosinus, so daß dessen Argument jetzt zu

$$(q+j\omega)(t-r/c+p/c)-j\chi+(j-k)\frac{2\pi i}{n}$$

wird. Dabei ändern sich die Grenzen des Integrals in $2\pi i/n$ und $2\pi + 2\pi i/n$ ab, dürfen aber wegen der Periodizität aller Funktionen von $\chi$ in 0 und $2\pi$ umgeändert werden. Summieren wir jetzt alle Ausdrücke (18) für alle Elektronen der

Gruppe, indem wir nacheinander $i$ gleich $0,1,\ldots n-1$ setzen, so bekommen wir die Summe

$$\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\sum_{i=0}^{i=n-1}\int_0^{2\pi}\cos\left\{(q+j\omega)(t-r/c+p/c)-j\chi+(j-k)\frac{2\pi i}{n}\right\}P\,d\chi$$
$$=n\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}\int_0^{2\pi}\cos\left[\{q+(k+sn)\omega\}(t-r/c+p/c)-(k+sn)\chi\right]P\,d\chi.$$

Setzen wir noch der Kürze halber

$$m=k+sn,\quad l=\frac{q}{\omega}+k+sn, \tag{19}$$

so bekommen wir aus (16) und (17)

$$\left\{\begin{aligned}\delta\varphi&=\frac{ne}{2\pi r}\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}\frac{l\omega}{c}\int_0^{2\pi}\left[-P\sin\{l\omega(t-r/c+p/c)-m\chi\}\right.\\&\qquad\left.+P_1\cos\{l\omega(t-r/c+p/c)-m\chi\}\right]d\chi,\\ \delta\mathfrak{a}&=\frac{ne}{2\pi cr}\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}\int_0^{2\pi}\left[\left(V_1-\frac{l\omega}{c}P\mathfrak{v}\right)\sin\{l\omega(t-r/c+p/c)-m\chi\}\right.\\&\qquad\left.+\left(V+\frac{l\omega}{c}P_1\mathfrak{v}\right)\cos\{l\omega(t-r/c+p/c)-m\chi\}\right]d\chi.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

§ 12. *Die Feldintensitäten der Störung.* Aus (20) lassen sich, gerade wie im § 5, die Feldintensitäten ableiten; dabei brauchen wir nicht wieder auf alle Details einzugehen. Wir finden, bis zur Ordnung $1/r$,

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{d}&=\frac{ne\omega}{2\pi c^2 r}\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}l\int_0^{2\pi}\left[\left\{l\omega P\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}-\mathfrak{r}_1\right)-V_1\right\}\right.\\&\qquad\cos\{l\omega(t-r/c+p/c)-m\chi\}\\&\quad\left.+\left\{l\omega P_1\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}-\mathfrak{r}_1\right)+V\right\}\sin\{l\omega(t-r/c+p/c)-m\chi\}\right]d\chi,\\ \mathfrak{h}&=\frac{ne\omega}{2\pi c^2 r}\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}l\int_0^{2\pi}\left[\left\{l\omega P\left[\mathfrak{r}_1\cdot\frac{\mathfrak{v}}{c}\right]-[\mathfrak{r}_1\cdot V_1]\right\}\right.\\&\qquad\cos\{l\omega(t-r/c+p/c-m\chi\}\\&\quad\left.+\left\{l\omega P_1\left[\mathfrak{r}_1\cdot\frac{\mathfrak{v}}{c}\right]+[\mathfrak{r}_1\cdot V]\right\}\sin\{l\omega(t-r/c+p/c)-m\chi\}\right]d\chi.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

Daraus lassen sich, wie früher, folgende Schlüsse ziehen:

1. Die elektrischen und magnetischen Kräfte sind senkrecht zum Radiusvektor.

2. Sie sind auch senkrecht zueinander und einander gleich.

3. Der Poyntingsche Vektor ist radial nach außen gerichtet.

Der Beweis von 1, was die elektrische Kraft anbelangt, läßt sich leicht führen, wenn man die Definitionsgleichungen (16) berücksichtigt, und bedenkt, daß

$$\frac{dp}{d\tau} = (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{v}), \quad \frac{d\delta p}{d\tau} = (\mathfrak{r}_1 \delta \mathfrak{v}).$$

Wir führen nun folgende Normalfunktionen ein:

$$(22)\quad \begin{cases} \delta A_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\left(l\omega P \frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta}\right)\sin\left(m\chi - l\frac{\omega p}{c}\right) \right. \\ \qquad \left. + \left(l\omega P_1 \frac{v_\theta}{c} + V_\theta\right)\cos\left(m\chi - l\frac{\omega p}{c}\right)\right] d\chi, \\ \delta B_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\left(l\omega P \frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta}\right)\cos\left(m\chi - l\frac{\omega p}{c}\right) \right. \\ \qquad \left. - \left(l\omega P_1 \frac{v_\theta}{c} + V_\theta\right)\sin\left(m\chi - l\frac{\omega p}{c}\right)\right] d\chi, \\ \delta C_m,\ \delta D_m = \text{dieselben Funktionen mit } v_\psi,\ V_\psi,\ V_{1\psi} \\ \qquad\qquad \text{statt } v_\theta,\ V_\theta,\ V_{1\theta}, \end{cases}$$

wo $v_\theta$ und $v_\psi$ die Komponenten von $\mathfrak{v}$ in den Richtungen $\theta$ und $\psi$ bedeuten, und ebenso für $V_\theta$, $V_\psi$, $V_{1\theta}$ und $V_{1\psi}$, und $l = m + q/\omega$. Dann bekommen wir

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{d}_\theta = \quad h_\psi = \frac{ne\omega}{c^2 r}\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\{\delta A_m \sin l\omega(t - r/c) \\ \qquad\qquad + \delta B_m \cos l\omega(t - r/c)\}, \\ \mathfrak{d}_\psi = -\, h_\theta = \frac{ne\omega}{c^2 r}\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\{\delta C_m \sin l\omega(t - r/c) \\ \qquad\qquad + \delta D_m \cos l\omega(t - r/c)\}, \\ \qquad (m = k + sn). \end{cases}$$

§ 13. *Strahlung der Störung.* Wir bekommen aus (23), genau wie im § 6

$$(24) \qquad S = \frac{n^2 e^2 \omega^2}{8\pi c^3} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \{(\delta A_m)^2 + (\delta B_m)^2 + (\delta C_m)^2 + (\delta D_m)^2\} \sin\theta \, d\theta \, d\psi .$$

Aus (23) und (24) ziehen wir folgende Schlüsse:

Die Störung der relativen Schwingungszahl $q$, welche mit der Umlaufszahl $\omega$ der Hauptbewegung inkommensurabel ist, verursacht Wellen mit den Schwingungszahlen $l\omega = q + (k + sn)\omega$; dieselben lassen sich in zwei Reihen zusammenfassen, je nachdem $l$ positiv oder negativ ist. Die Strahlung besteht gemäß (24) aus einer entsprechenden Anzahl von Gliedern, von denen das $s = 0$, $m = k$, $l = q/\omega + k$ entsprechende vorherrscht, während die übrigen mit wachsendem $s$ immer kleiner werden. Ist $k$ groß, d. h. mit $n$ vergleichbar, so ist die Strahlung klein, von derselben Ordnung wie diejenige der Hauptbewegung, also in einem permanenten Systeme ganz zu vernachlässigen; ist $k$ dagegen klein, gleich $0, \pm 1, \ldots$, so ist die Strahlung relativ groß. Im allgemeinen können also nur Störungen letzter Art, also kleinen Werten von $k$ entsprechend, starke Wellen verursachen; die Energie dieser Strahlungen kann offenbar nicht dem Eigenvorrat des Systems entstammen, sondern muß ihm von außen zugeführt werden.

Wir wollen wieder unsere Gleichungen am Beispiele des rotierenden Kreisringes erläutern.

§ 14. *Störungen des rotierenden Kreisringes.* Mit den Bezeichnungen des § 7 setzen wir für das $0^{te}$ Elektron

$$\delta x' = -\xi \sin\chi - \eta \cos\chi , \quad \delta y' = \xi \cos\chi - \eta \sin\chi , \quad \delta z' = \zeta ,$$

woraus folgt, da $\chi = \omega\tau$,

$$\delta \dot{x}' = -(\dot{\xi} - \omega\eta)\sin\chi - (\dot{\eta} + \omega\xi)\cos\chi ,$$
$$\delta \dot{y}' = (\dot{\xi} - \omega\eta)\cos\chi - (\dot{\eta} + \omega\xi)\sin\chi , \quad \delta \dot{z}' = \dot{\zeta} ,$$

also auch

$$\delta p = -\{\xi \sin(\chi - \psi) + \eta \cos(\chi - \psi)\sin\theta + \zeta\cos\theta ,$$
$$\delta v_\theta = -\{(\dot{\xi} - \omega\eta)\sin(\chi - \psi) + (\dot{\eta} + \omega\xi)\cos(\chi - \psi)\}\cos\theta - \dot{\zeta}\sin\theta ,$$
$$\delta v_\psi = (\dot{\xi} - \omega\eta)\cos(\chi - \psi) - (\dot{\eta} + \omega\xi)\sin(\chi - \psi) .$$

Beachten wir nun die Gleichungen (16), in denen $\sigma = 0$ ist, und die Werte

$$p = \varrho \sin\theta \cos(\chi - \psi), \quad v_\theta = -\omega\varrho\cos\theta\sin(\chi-\psi),$$
$$v_\psi = \omega\varrho\cos(\chi-\psi), \quad \beta = \omega\varrho/c,$$

so bekommen wir

$$l\omega P\frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta} = \beta\sin\theta\cos\theta\, l\omega\{A\sin^2(\chi-\psi) + B\sin(\chi-\psi)\cos(\chi-\psi)\}$$
$$-\beta\cos^2\theta\, l\omega C\sin(\chi-\psi) - \cos\theta\{(qA+\omega B_1)\sin(\chi-\psi) + (qB-\omega A_1)\cos(\chi-\psi)\} - qC\sin\theta,$$

$$l\omega P\frac{v_\psi}{c} - V_{1\psi} = -\beta\sin\theta\, l\omega\{A\sin(\chi-\psi)\cos(\chi-\psi) + B\cos^2(\chi-\psi)\}$$
$$+\beta\cos\theta\, l\omega C\cos(\chi-\psi) + (qA+\omega B_1)\cos(\chi-\psi) - (qB-\omega A_1)\sin(\chi-\psi),$$

während wir die Werte von

$$l\omega P_1\frac{v_\theta}{c} + V_\theta \quad \text{und} \quad l\omega P_1\frac{v_\psi}{c} + V_\psi$$

aus den angegebenen dadurch erhalten, daß wir $A, B, C, A_1, B_1$ der Reihe nach durch $A_1, B_1, C_1, -A, -B$ ersetzen.

Wir setzen nun in den Integralen (22) wie früher $\chi + \psi - \pi/2$ statt $\chi$, also auch $\sin\chi$, $-\cos\chi$ statt $\cos(\chi-\psi)$, $\sin(\chi-\psi)$; dadurch bekommen wir auch

$$\delta A_m = c\cos m\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + s\sin m\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\delta B_m = c\cos m\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right) - s\sin m\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\delta A_m)^2 + (\delta B_m)^2 = c^2 + s^2,$$

wo wir für den Moment

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(l\omega P\frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta}\right)\sin(m\chi - l\beta\sin\theta\sin\chi) + \left(l\omega P_1\frac{v_\theta}{c} + V_\theta\right)\cos(m\chi - l\beta\sin\theta\sin\chi)\right]d\chi,$$

$$s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(l\omega P\frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta}\right)\cos(m\chi - l\beta\sin\theta\sin\chi)\right.$$
$$\left. - \left(l\omega P_1\frac{v_\theta}{c} + V_\theta\right)\sin(m\chi - l\beta\sin\theta\sin\chi)\right]d\chi$$

gesetzt haben; ähnliche Ausdrücke gelten auch für $\delta C_m$ und $\delta D_m$, nur daß überall $v_\psi$, $V_\psi$, $V_{1\psi}$ anstatt von $v_\theta$, $V_\theta$, $V_{1\theta}$ stehen.

Beachten wir nun, daß wegen der Grenzen von $\chi$ alle ungeraden Funktionen von $\chi$ herausfallen, und ferner daß vermöge der Definitionsgleichung der Besselschen Funktion

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(m\chi - z\sin\chi)\,d\chi = J_m(z),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(m\chi - z\sin\chi)\cos\chi\,d\chi = \frac{m}{z}J_m(z),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(m\chi - z\sin\chi)\sin\chi\,d\chi = J_m'(z),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(m\chi - z\sin\chi)\cos^2\chi\,d\chi = -\tfrac{1}{2}J_m'(z) + \frac{m^2}{z^2}J_m(z),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(m\chi - z\sin\chi)\sin^2\chi\,d\chi = \tfrac{1}{2}J_m'(z) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)J_m(z),$$

so bekommen wir, mit $z = l\beta\sin\theta$, $l = m + q/\omega$

$$c = \omega\left\{A_1\cot\theta\frac{m}{\beta}J_m(l\beta\sin\theta) - B\cos\theta\, l J_m'(l\beta\sin\theta)\right.$$
$$\left. + C_1\left(\frac{m}{\sin\theta} - l\sin\theta\right)J_m(l\beta\sin\theta)\right\},$$
$$s = \omega\left\{A\cot\theta\frac{m}{\beta}J_m(l\beta\sin\theta) + B_1\cos\theta\, l J_m'(l\beta\sin\theta)\right.$$
$$\left. + C\left(\frac{m}{\sin\theta} - l\sin\theta\right)J_m(l\beta\sin\theta)\right\}.$$

Setzen wir die daraus folgenden Ausdrücke für $\delta A_m$ und $\delta B_m$ in (23) ein und beachten, daß $\beta = \omega\varrho/c$, so bekommen wir

$$(25)\quad \begin{cases} \mathfrak{b}_\theta = h_\psi = \dfrac{n\,e\cot\theta}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} m\,l\beta\,J_m(l\beta\sin\theta)(A\cos\Theta + A_1\sin\Theta) \\ \qquad + \dfrac{n\,e\cos\theta}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2\beta^2 J_m'(l\beta\sin\theta)(-B\sin\Theta + B_1\cos\Theta) \\ \qquad + \dfrac{n\,e}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}\left(\dfrac{m\beta}{\sin\theta} - l\beta\sin\theta\right) l\beta\,J_m(l\beta\sin\theta) \\ \qquad\qquad (C\cos\Theta + C_1\sin\Theta), \end{cases}$$

wo

$$\Theta = (q + m\,\omega)(t - r/c) - m\,\psi + m\,\frac{\pi}{2}.$$

Ebenso ist

$$(26)\quad \begin{cases} \mathfrak{b}_\psi = -h_\theta = \dfrac{n\,e}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2\beta^2 J_m'(l\beta\sin\theta)(A\sin\Theta - A_1\cos\Theta) \\ \qquad + \dfrac{n\,e}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}\left(\dfrac{m}{\sin\theta} - l\beta^2\sin\theta\right) l\beta\,J_m(l\beta\sin\theta) \\ \qquad\qquad (B\cos\Theta + B_1\sin\Theta) \\ \qquad + \dfrac{n\,e\,\beta\cos\theta}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2\beta^2 J_m'(l\beta\sin\theta)(C\sin\Theta - C_1\cos\Theta). \end{cases}$$

Die Formeln (25) und (26) stimmen mit den früher gegebenen bis auf eine etwas verschiedene Bezeichnung überein (l. c., p. 197 — übrigens ist daselbst im Faktor von $B$ im Ausdrucke für $\Pi$ fälschlich $m\beta/\sin\theta - l\beta^2\sin\theta$ statt $m/\sin\theta - l\beta^2\sin\theta$ angegeben).

Für die Strahlung bekommen wir aus (24) bis (26)

$$(27)\quad \begin{cases} S = \dfrac{c\,e^2 n^2}{2\,\varrho^4}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2\beta^2\int_0^{\pi/2}\Big\{(A^2 + A_1^2)\,[m^2\cot^2\theta\,\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2 \\ \qquad\qquad + l^2\beta^2\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2] \\ \quad + (B^2 + B_1^2)\left[\left(\dfrac{m}{\sin\theta} - l\beta^2\sin\theta\right)^2\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2\right. \\ \qquad\qquad \left. + l^2\beta^2\cos^2\theta\,\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2\right] \\ \quad + (C^2 + C_1^2)\left[\left(\dfrac{m\beta}{\sin\theta} - l\beta\sin\theta\right)^2\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2\right. \\ \qquad\qquad \left. + l^2\beta^4\cos^2\theta\,\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2\right] \\ \quad + 2\,(A\,B_1 - A_1\,B)\left(\dfrac{m\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{m}{\sin\theta} - l\beta^2\sin\theta\right) l\beta \\ \qquad\qquad J_m(l\beta\sin\theta)\,J_m'(l\beta\sin\theta)\Big]\sin\theta\,d\theta\Big\}. \end{cases}$$

Die Faktoren der Glieder $AC + A_1 C_1$ und $BC + B_1 C_1$ enthalten unter dem Integrale $\int_0^\pi d\theta$ eine Funktion von $\sin\theta$ allein, multipliziert mit $\cos\theta$, und verschwinden daher identisch; es strahlen daher die Störungen in und senkrecht zur Bahnebene ganz unabhängig voneinander aus.

§ 15. Die Auswertung des Integrals (27) vollzieht sich genau wie im § 8; dazu brauchen wir folgende Gleichungen:

(a) $$\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\cos 2m\varphi\, d\varphi,$$

(b) $$\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\left(1 - \frac{m^2}{l^2\beta^2\sin^2\theta} - 2\sin^2\varphi\right)\cos 2m\varphi\, d\varphi,$$

(c) $$J_m(l\beta\sin\theta)\,J_m'(l\beta\sin\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0'(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi\cos 2m\varphi\, d\varphi,$$

(d) $$\int_0^{\pi/2} J_0(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\, d\theta = \frac{\sin(2l\beta\sin\varphi)}{2l\beta\sin\varphi} = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta \cos(2lx\sin\varphi)\, dx,$$

(e) $$\int_0^{\pi/2} J_0(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{\sin(2l\beta\sin\varphi)}{(2l\beta\sin\varphi)^3} - \frac{\cos(2l\beta\sin\varphi)}{(2l\beta\sin\varphi)^2} = \frac{1}{2\beta^3}\int_0^\beta \cos(2lx\sin\varphi)(\beta^2 - x^2)\, dx,$$

(f) $$\int_0^{\pi/2} J_0'(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\, d\theta = \frac{\cos(2l\beta\sin\varphi)}{2l\beta\sin\varphi} - \frac{1}{2l\beta\sin\varphi} = -\frac{1}{\beta}\int_0^\beta \sin(2lx\sin\varphi)\, dx,$$

$$(g)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi/2} J_0'(2\,l\beta\sin\theta\sin\varphi)\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2\,l\beta\sin\varphi} - \frac{\sin(2\,l\beta\sin\varphi)}{(2\,l\beta\sin\varphi)^2} \\ \qquad\qquad = -\frac{1}{\beta^2}\displaystyle\int_0^{\beta}\sin(2\,lx\sin\varphi)(\beta - x)\,dx\,. \end{cases}$$

Weiter haben wir

$$(h)\quad \frac{1}{\pi\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\beta}\cos(2\,lx\sin\varphi)\cos 2\,m\varphi\,dx\,d\varphi = \frac{1}{\beta}\int_0^{\beta} J_{2m}(2\,lx)\,dx$$

und wegen der Differentialgleichung der Besselschen Funktion

$$(i)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\beta^2}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\beta}\cos(2\,lx\sin\varphi)\cos 2m\varphi\,.\,x^2\,dx\,d\varphi = \frac{1}{2\beta^2}\int_0^{\beta} J_{2m}(2lx)x^2\,dx \\ \qquad = -\dfrac{1}{4\,l\beta}J_{2m}'(2\,l\beta) + \dfrac{1}{8\,l^2\beta^2}J_{2m}(2\,l\beta) \\ \qquad\qquad + \dfrac{4\,m^2-1}{8\,l^2\beta^2}\displaystyle\int_0^{\beta} J_{2m}(2\,lx)\,dx\,. \end{cases}$$

$$(k)\quad -\frac{1}{\pi\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\beta}\sin(2\,lx\sin\varphi)\sin\varphi\cos 2m\varphi\,dx\,d\varphi = \frac{1}{2\,l\beta}J_{2m}(2\,l\beta),$$

$$(l)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\beta^2}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\beta}\sin(2\,lx\sin\varphi)\sin\varphi\cos 2\,m\varphi\,.\,x\,dx\,d\varphi \\ \qquad = -\dfrac{1}{2\,l\beta}J_{2m}(2\,l\beta) + \dfrac{1}{2\,l\beta^2}\displaystyle\int_0^{\beta} J_{2m}(2\,lx)\,dx\,. \end{cases}$$

Wir bekommen erstens mittels (a), (b), (d) und (h)

$$\int_0^{\pi/2}[m^2\cot^2\theta\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2 + l^2\beta^2\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2]\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} J_0(2\,l\beta\sin\theta\sin\varphi)\{l^2\beta^2 - m^2 - 2\,l^2\beta^2\sin^2\varphi\}$$
$$\cos 2\,m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= l\beta\,J_{2m}'(2\,l\beta) - \frac{m^2 - l^2\beta^2}{\beta}\int_0^{\beta} J_{2m}(2\,lx)\,dx\,.$$

Zweitens mittels (a), (b), (d), (e), (h) und (i)

$$\int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{m}{\sin\theta}-l\beta^2\sin\theta\right)^2\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2 + l^2\beta^2\cos^2\theta\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}J_0(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\{(m-l\beta^2)^2 + l^2\beta^2\cos^2\theta(1-\beta^2-2\sin^2\varphi)\}\cos 2m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{1-\beta^2}{4}l\beta J_{2m}'(2l\beta)+\frac{3+\beta^2}{8}J_{2m}(2l\beta) + \left\{\frac{1+\beta^2}{2}(m^2+l^2\beta^2)-2ml\beta^2-\frac{3+\beta^2}{8}\right\}\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta}J_{2m}(2lx)\,dx.$$

Drittens mittels (c), (f), (g), (k) und (l)

$$l\beta\int_0^{\pi/2}\left[\frac{m\cos^2\theta}{\sin\theta}+\frac{m}{\sin\theta}-l\beta^2\sin\theta\right]J_m(l\beta\sin\theta)J_m'(l\beta\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{l\beta}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}J_0'(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\{m-l\beta^2+(m+l\beta^2)\cos^2\theta\}\sin\varphi\cos 2m\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{m-l\beta^2}{2}J_{2m}(2l\beta)+\frac{m+l\beta^2}{2\beta}\int_0^{\beta}J_{2m}(2lx)\,dx.$$

Schließlich mittels (a), (b), (d), (e), (h) und (i)

$$\int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{m\beta}{\sin\theta}-l\beta\sin\theta\right)^2\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2 + l^2\beta^4\cos^2\theta\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\beta^2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}J_0(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\{(m-l)^2 + l^2\cos^2\theta.(\beta^2-1-2\beta^2\sin^2\varphi)\}\cos 2m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=-\frac{1-\beta^2}{4}l\beta J_{2m}'(2l\beta)+\frac{1+3\beta^2}{8}J_{2m}(2l\beta) + \left\{\frac{1+\beta^2}{2}(m^2+l^2\beta^2)-2ml\beta^2-\frac{1+3\beta^2}{8}\right\}\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta}J_{2m}(2lx)\,dx.$$

Alles zusammengenommen bekommen wir also aus (27)

$$
28)\quad \left\{\begin{aligned}
S = \frac{e^2 n^2}{2\varrho^4}\Big\{ & (A^2 + A_1^2)\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\beta\Big[l^2\beta^2 J'_{2m}(2l\beta) - (m^2 - l^2\beta^2) l\int_0^\beta J_{2m}(2lx)\,dx\Big] \\
& + (B^2 + B_1^2)\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\beta\Big[\frac{1-\beta^2}{4} l^2\beta^2 J'_{2m}(2l\beta) + \frac{3+\beta^2}{8} l\beta J_{2m}(2l\beta) \\
& \qquad + \Big\{\frac{1+\beta^2}{2}(m^2 + l^2\beta^2) - 2ml\beta^2 - \frac{3+\beta^2}{8}\Big\} l\int_0^\beta J_{2m}(2lx)\,dx\Big] \\
& + 2(AB_1 - A_1B)\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\beta\Big[\frac{m-l\beta^2}{2} l\beta J_{2m}(2l\beta) + \frac{m+l\beta^2}{2} l\int_0^\beta J_{2m}(2lx)\,dx\Big] \\
& + (C^2 + C_1^2)\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\beta\Big[-\frac{1-\beta^2}{4} l^2\beta^2 J'_{2m}(2l\beta) + \frac{1+3\beta^2}{8} l\beta J_{2m}(2l\beta) \\
& \qquad + \Big\{\frac{1+\beta^2}{2}(m^2 + l^2\beta^2) - 2ml\beta^2 - \frac{1+3\beta^2}{8}\Big\} l\int_0^\beta J_{2m}(2lx)\,dx\Big]\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

in Übereinstimmung mit dem schon früher angegebenen Resultat (l. c. p. 198).

§ 16. *Erklärung der Spektrallinien.* Offenbar entspricht jedem Gliede von (28) je ein Glied von (25) und (26) mit denselben Werten von $m$ und $l$; die Schwingungsperiode der zu $m$ und $l$ gehörigen Welle ist nach (25) und (26) gleich $2\pi/l\omega$, wobei

$$l = \frac{q}{\omega} + m = \frac{q}{\omega} + k + sn.$$

Soll nun diese Welle einer Spektrallinie der Wellenlänge $\lambda$ entsprechen, so ist $\lambda = 2\pi c/l\omega$, also wegen $\beta = \omega\varrho/c$, $l\beta = 2\pi\varrho/\lambda$. Nehmen wir an, daß $\varrho$ von der Dimension des Radius eines Atoms ($10^{-8}$ cm) ist, so ist $l\beta$ sehr klein.

Nun haben wir für kleine Werte von $l\beta$ annähernd

$$J_{2m}(2l\beta) = \frac{(l\beta)^{2m}}{2m!},$$

woraus folgt:

1. Für einen gegebenen Schwingungstypus, d. h. gegebenes $k$, ist das Glied $s = 0$ in (28) stark überwiegend, indem die nächsten Glieder, $s = \pm 1$, relativ dazu von den Ordnungen

$$\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^{2n}, \quad \left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^{2n-2k}$$

sind. Dabei ist zu beachten, daß für negative $m$ der absolute Wert genommen werden muß.

2. Vergleichen wir die Hauptglieder ($s = 0$) verschiedener Schwingungstypen miteinander, so sind deren relative Ordnungen

$$\text{für } k = 0 \left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^0, \quad \text{für } k > 0 \left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^{2k}.$$

Ich habe nun an anderen Orten gezeigt, daß die von E. Wiedemann und auch von W. Wien gemessenen Intensitäten gewisser starker Spektrallinien der Größenordnung nach mit der berechneten Intensität für $k = 0$, $k = \pm 1$ übereinstimmen, wenn wir $\varrho = 10^{-8}$ setzen, also $2\pi\varrho/\lambda$ von der Ordnung $^1/_{1000}$ annehmen. Daraus folgt, daß die den Werten $k = \pm 2$, $\pm 3, \ldots$ entsprechenden Schwingungstypen unmöglich beobachtbare Linien ergeben, sollen nicht die Amplituden jedes mit dem Zusammenhang des Elektronensystems verträgliche Maß übersteigen. Durch die Störungen einer Elektronengruppe können wir daher höchstens einen kleinen Teil eines Spektrums erklären; außerdem ist es aber sehr fraglich, ob überhaupt Linien desselben im beobachtbaren Teile des Spektrums liegen können.

Was nun die Erklärung einer einzigen Spektrumserie anbetrifft, so liegen die Verhältnisse nicht besser; denn die qualitative sowie quantitative Gleichheit des Zeemaneffektes entsprechender Komponenten der Linien derselben Serie verbietet uns anzunehmen, daß die verschiedenen Werten von $k$ entsprechenden Schwingungstypen, und noch weniger die Schwingungen verschiedener Elektrongruppen, zusammengenommen eine Serie erzeugen können; denn die entsprechenden Schwingungsgleichungen sind ganz und gar voneinander verschieden, und ergeben auch keine solch einfache Beziehung zwischen den Schwingungszahlen, wie von der Beobachtung gefordert wird.

Daraus müssen wir schließen, daß Spektrumserien überhaupt nicht aus der Hauptbewegung einer einfach periodischen Gruppe, oder deren Störungen erklärt werden können.

§ 17. *Spektrumserien.* Dem obigen zufolge machen wir folgende Annahme:

Eine Spektrumserie kann überhaupt nur mittels derselben Bewegung einer einzigen Elektronengruppe erklärt werden.

Denn sonst bleibt der beobachtete Zeemaneffekt unerklärbar. Daraus folgt:

Diese Bewegung ist mindestens zweifach periodisch, mit inkommensurabeln Perioden, und Amplituden gleicher Größenordnung.

Sonst müßte sie unter den oben betrachteten Fällen zu finden sein.

Die entsprechenden Potentiale sind durch (5) gegeben, woraus für die Feldintensitäten folgt

$$(29)\quad \begin{cases} \mathfrak{d} = \dfrac{e}{2\pi c^2 r}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin v(t - r/c + p/c - \tau)(\mathfrak{v} - c\,\mathfrak{r}_1)\,v\,d\tau\,dv, \\ \mathfrak{h} = \dfrac{e}{2\pi c^2 r}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin v(t - r/c + p/c - \tau)[\mathfrak{r}_1 . \mathfrak{d}] . v\,d\tau\,dv . \end{cases}$$

Da nun $p$ und $\mathfrak{v}$ mindestens zwei inkommensurabele Perioden besitzen, so zerfallen im allgemeinen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ nicht in Summen harmonischer Komponenten; wir müssen die Verhältnisse so wählen, daß sie in Summen von Komponenten zerfallen, deren Schwingungszahlen etwa durch die Rydbergsche Formel bestimmt werden, und deren Amplituden dem langsamen Abfalle der Intensitäten der Serienlinien entsprechen. Es sei also, z. B. für eine Hauptserie,

$$(30)\quad \begin{cases} \mathfrak{d}_\theta = h_\psi = \displaystyle\sum_{m=1}^{m=\infty} C_m \cos\left\{A - \frac{N}{(m+\mu)^2}\right\}\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ \qquad\qquad + D_m \sin\left\{A - \frac{N}{(m+\mu)^2}\right\}\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ \qquad = \cos A\left(t - \frac{r}{c}\right)\displaystyle\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[C_m \cos\frac{N(t - r/c)}{(m+\mu)^2}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - D_m \sin\frac{N(t - r/c)}{(m+\mu)^2}\right] \\ \qquad + \sin A\left(t - \frac{r}{c}\right)\displaystyle\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[C_m \sin\frac{N(t - r/c)}{(m+\mu)^2}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + D_m \cos\frac{N(t - r/c)}{(m+\mu)^2}\right]. \end{cases}$$

Dann müssen die Reihen als Summen Integrale der Form (29) ergeben. Da aber die Intensitäten der verschiedenen Glieder experimentell nicht genügend bekannt sind, so wissen wir über die Amplituden $C_m$ und $D_m$ weiter nichts, als daß sie mit wachsendem $m$ abnehmen, aber verhältnismäßig langsam; dagegen sind die Größen $N$ und $\mu$ sehr genau bekannt. Es kommt also darauf an, eine langsam konvergierende Reihe der Form (30) allgemein zu summieren. Ist dieses geschehen, so muß man durch Vergleich mit (29) die Funktionen $p$ und $\mathfrak{v}$ bestimmen, womit die Bewegung des Elektronensystems vollständig mitbestimmt wird. Obgleich die bis jetzt zu Gebote stehenden analytischen Hilfsmittel zur Summierung der Reihe (30) kaum ausreichen dürften, so ist hiermit doch das physikalische Problem der Erklärung der Spektrumserien mittels der Bewegung eines Elektronensystems auf das rein analytische Problem einer Reihensummierung zurückgeführt. Da hierzu keinerlei dynamische Begriffe nötig sind, folgern wir, daß die Verknüpfung der Linien einer Serie eine rein kinematische, allein durch die Form des Integrals (29) bedingte ist.

Bonn, Physik. Institut d. Universität, 4. November 1907.

(Eingegangen 6. November 1907.)

## 8. *Über das Ausbleichen von Farbstoffen im sichtbaren Spektrum;* von *P. Lasareff.*

Die quantitativen Messungen der Vorgänge, welche sich beim Ausbleichen von Farbstoffen unter dem Einflusse des Lichtes abspielen, sind sowohl für die Fragen der physikalischen Chemie[1]) als auch für gewisse physiologische Vorgänge (die Assimilation der $CO_2$ in den Pflanzen[2]), das peripherische Sehen[3])) von Bedeutung.

In den sehr zahlreichen Untersuchungen über die Photochemie der Farbstoffe[4]) wurden die Versuche entweder mit weißem Lichte oder mit dem Lichte gemacht, welches durch Lichtfilter gegangen war — eine nähere Beziehung zu den optischen Eigenschaften der Farbstoffe wurde nicht untersucht.

Der Zweck der nachfolgenden Untersuchung ist es, diese Lücke im Bereiche des sichtbaren Spektrums auszufüllen und quantitativ die Abhängigkeit der zersetzten Farbstoffmenge von der Absorptionskonstante des Farbstoffs, der Wellenlänge der auffallenden Strahlung und deren Energie zu ermitteln.

### I. Die Vorversuche.

Um aus einer großen Zahl von Farbstoffen diejenigen auszusuchen, bei welchen die Reaktion hinreichend rasch vor sich geht, wurde deren Ausbleichen im weißen Lichte einer Nernstlampe untersucht. Als geeignet erwiesen sich: *Cyanin*[5]), *Lepidincyanin*, *Pinacyanol*, *Pinaverdol*, *Chinaldincyanin* und *Pinachrom*[6]), welche in Collodiumhäutchen untersucht wurden.

1) W. Nernst, Theor. Chemie p. 767. Stuttgart 1906—1907; R. Luther, Zeitschr. f. wissensch. Photogr. 3. p. 257. 1905.

2) C. Timiriazeff, Proc. Roy. Soc. of London 72. p. 424. 1904.

3) W. Trendelenburg, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane 37. p. 1. 1904.

4) Vgl. die diesbezügliche Literatur, Fortschr. d. Physik von 1892 bis 1906.

5) Von Grübler in Leipzig.

6) Von Meister, Lucius und Brünig, Höchst a. M.

Die Collodiumhäutchen wurden hergestellt, indem ein Deckglas (18 × 18 mm) mit einer Collodiumlösung (1 Teil Collodium, 1 Teil Äthylalkohol, 1 Teil Äthyläther) übergossen wurde und hierauf in staubfreier Luft getrocknet; gefärbt wurden die Häutchen entweder durch Zusatz einer alkoholischen Lösung des Farbstoffs zu der Collodiumlösung oder durch Baden des getrockneten farblosen Collodiumhäutchens in der alkoholischen Farbstofflösung.

Trockene gefärbte Collodiumhäutchen haben sich im Dunkeln über ein Jahr lang gehalten, ohne sich merklich zu verändern.

Wird ein gefärbtes Collodiumhäutchen im Spektrum einer Nernstlampe 2—4 Tage lang ausgesetzt, so bleicht der Farbstoff im Gebiete des Absorptionsstreifens vollkommen aus, während er in anderen Gebieten keine nachweisbare Veränderung erfährt; das so ausgeblichene Collodiumhäutchen erfährt im Dunkeln auch im Laufe eines Jahres keine merkliche Veränderung.

Um die Frage zu entscheiden, ob das Ausbleichen nur von der aufgefallenen Energiemenge abhängt und von der Lichtintensität unabhängig ist, wurde folgende Versuchsanordnung gewählt (Fig. 1): Das Deckglas mit dem gefärbten Häutchen wurde in zwei Stücke zerschnitten — das eine Stück $H_1$ in 10 cm vor einer Nernstlampe $N$ angestellt, das andere $H_2$ in 100 cm; vor dem Häutchen $H_1$ wurde eine rasch rotierende undurchsichtige Scheibe $S$ aufgestellt, in welcher ein Sektor von 0,01 der Kreisscheibe ausgeschnitten war; die Lichtintensitäten verhalten sich wie 1 : 100, hingegen sind die auffallenden Energiemengen gleich; das Ausbleichen von $H_1$ und $H_2$ war in allen Fällen gleich.

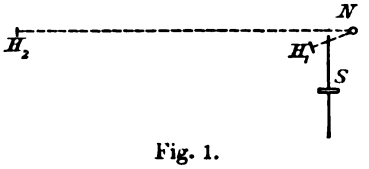


Fig. 1.

Von Versuchen mit reinen Farbschichten, welche nach Pflüger[1]) ohne Bindemittel hergestellt waren, wurde Abstand genommen, da solche Schichten unter dem Mikroskop betrachtet eine körnige Struktur aufwiesen, das Licht nicht als

1) A. Pflüger, Wied. Ann. 65. p. 181. 1898.

optisch homogene Körper absorbieren und Unregelmäßigkeiten im Ausbleichen aufwiesen, welche sich als abhängig von der Korngröße der Schicht herausstellten.

### II. Die Methode.

Um den Betrag des absorbierten Lichtes und hieraus den Gehalt des unzersetzten Farbstoffs in gefärbten Häutchen auch während des Ausbleichens für alle Lichtgattungen des Spektrums photometrisch messen zu können, wurde die aus Fig. 2 ersichtliche Anordnung getroffen. Von dem horizontalen Stift

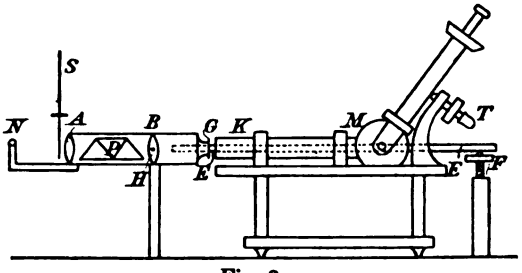



Fig. 2.

einer Nernstlampe (0,5 Amp.), welche sich im Brennpunkte der Linse *A* befindet, gehen die parallel gemachten Strahlen durch ein geradsichtiges Prisma *P* und werden durch die Linse *B* in Form eines Spektrums auf ein Deckglas *G*, das mit dem Prismenkörper fest verbunden ist, entworfen. Ein König-Martenssches Spektralphotometer[1]) *KM* ist so aufgestellt, daß der Spalt sich etwa 1—2 mm hinter dem Deckglase *G* befindet und die von dem Nernststift kommenden Strahlen in das Kollimatorrohr des Photometers fallen; vor dem einen Spalt befindet sich die Hälfte des Deckglases mit dem gefärbten Häutchen, vor dem anderen die andere Hälfte, von welcher das Häutchen entfernt ist. Mit Hilfe der Stange *E* und der Schraube *F* kann der Spektralapparat *NG* um die horizontale Achse *H*, welche durch den Horizontaldurchmesser der Linse *B* geht, gedreht werden; die photometrische Messung

1) F. F. Martens, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 280. 1899; F. F. Martens u. F. Grünbaum, Ann. d. Phys. 12. p. 984. 1903.

kann in verschiedenen Teilen des gefärbten Häutchens *in den auf dasselbe fallenden Strahlen* ausgeführt werden. Die Wellenlänge des auffallenden Lichtes wird hinreichend genau durch die Einstellung mit der Schraube $T$ ermittelt.

Für photometrische Messungen wurde das Licht auf $^1/_{16}$ bzw. auf $^1/_{24}$ geschwächt, indem für die Dauer der Messungen eine rasch rotierende Scheibe $S$ mit einem entsprechenden Sektorenausschnitt vor der Linse $A$ aufgestellt wurde.

Um die Verteilung der Energie im Spektrum zu ermitteln, wurde das Photometer (Fig. 2) etwas zurückgeschoben und eine lineare Rubenssche Thermosäule parallel dem Photometerspalt fest aufgestellt; durch Heben und Senken der Stellschraube $P$ wurden die einzelnen Spektralbezirke auf die Thermosäule entworfen. Um die entsprechenden Wellenlängen zu ermitteln, wurde das Beobachtungsrohr des Photometers mit einem aufgesetzten Gaussschen Okular so lange mittels der Schraube $T$ verschoben, bis das Bild der Lötstellen der Thermosäule mit der Mitte des Okularspaltes zusammenfiel; die Wellenlänge wurde an der Trommel $T$ hinreichend genau abgelesen. Durch die Ausschläge eines empfindlichen Galvanometers wurde die Energie gemessen.

Die absolute Messung der Strahlungsenergie wurde nach R. v. Helmholtz[1]) unter Zugrundelegen der von Kurlbaum[2]) gemessenen Strahlungskonstante ermittelt; als absolut schwarzer Körper diente der in Fig. 3 abgebildete Apparat: ein innen

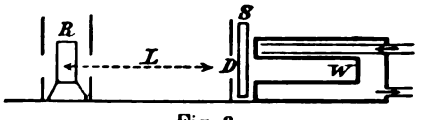



Fig. 3.

geschwärztes Messingrohr $W$ (Durchmesser $d = 2$ cm) wird durch einen Dampfmantel, in welchen Wasserdampf strömt, auf 100° C. erhitzt; vor dem Rohre $W$ befindet sich ein kreisrundes Diaphragma $D$ (Durchmesser $D = 1{,}6$ cm) hinter welchem

1) R. v. Helmholtz, „Die Licht- und Wärmestrahlung verbrennender Gase". Berlin 1890, p. 12.

2) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 65. p. 759. 1898.

ein aufziehbarer Fallschirm $S$ angebracht ist; in der Entfernung $L = 8{,}4$ cm vom Diaphragma $D$ ist die Thermosäule $R$ aufgestellt; an dieser Stelle ist die Strahlungsintensität $E$

$$E = \frac{\sigma [T_1^4 - T_2^4] D^2}{4 L^2} \frac{\text{g-Cal.}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}.$$

Da die Strahlungskonstante (nach **Kurlbaum**)

$$\sigma = 1{,}28 \cdot 10^{-12}, \quad T_1 = 373^0 \text{ abs.} \quad \text{und} \quad T_2 = 293{,}5^0 \text{ abs.}$$

betragen, so ist

$$E = 1{,}39 \cdot 10^{-4} \frac{\text{g-Cal.}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}.$$

Dieser Strahlungsintensität entspricht ein Galvanometerausschlag von etwa 14 Skt. Die Strahlungsintensitäten im Spektrum lagen zwischen

$$E_1 = 2{,}08 \cdot 10^{-4} \frac{\text{g-Cal.}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \quad (\text{für } \lambda_1 = 530\ \mu\mu)$$

und

$$E_2 = 12{,}81 \cdot 10^{-4} \frac{\text{g-Cal.}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \quad (\text{für } \lambda = 648\ \mu\mu).$$

Um die Verteilung der Energie im Spektrum zu bestimmen, wurden in 10 Punkten die Galvanometerausschläge gemessen und die Energiekurve graphisch aufgetragen.

### III. Die Versuche.

Die Messungen der zersetzten Farbstoffmenge wurde photometrisch in folgender Weise gemacht: Bezeichnen wir für eine bestimmte Wellenlänge $\lambda$ durch $J_0$ das Verhältnis der Intensitäten der beiden Felder, wenn vor den Spalten des Photometers sich eine unbelegte Glasplatte befindet; durch $J_1$ dasselbe Verhältnis, wenn vor den Photometerspalten ein zur Hälfte mit einem gefärbten Collodiumhäutchen belegtes Deckglas sich befindet, und durch $J_2$ dasselbe Verhältnis nach einer gewissen Zeit $\Delta t$, während welcher die auffallenden Strahlen ausbleichend gewirkt haben, so erhalten wir (sofern wir die geringe Differenz in dem Reflexionsvermögen des belegten und des unbelegten Glases vernachlässigen)

$$\frac{J_1}{J_0} = e^{-KC} \text{ bzw. } KC = \frac{\lg J_0 - \lg J_1}{\lg e},$$

$$\frac{J_2}{J_0} = e^{-K(C-\Delta C)} \text{ bzw. } K(C-\Delta C) = \frac{\lg J_0 - \lg J_2}{\lg e},$$

worin $K$ eine für das Collodiumhäutchen und die betreffende Wellenlänge charakteristische Konstante ist, $C$ die Konzentration der Farbstofflösung und $\Delta C$ die Verminderung dieser Konzentration, welche durch die ausbleichende Wirkung des Lichtes hervorgerufen wurde.

Die Änderung der Farbstoffmenge, welche durch den photochemischen Zerfall des Farbstoffs bedingt wurde,

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\lg J_2 - \lg J_1}{\lg J_0 - \lg J_1}.$$

Ist für die betreffende Wellenlänge die auffallende Energiemenge $E$ der Strahlung gegeben, so absorbiert das gefärbte Häutchen beim Beginne des Versuches die Energiemenge $e_1$

$$e_1 = E\left(1 - \frac{J_1}{J_0}\right)$$

und am Ende des Versuches die Energiemenge $e_2$

$$e_2 = E\left(1 - \frac{J_2}{J_0}\right).$$

Da die Größen $J_1$ und $J_2$ nur wenig voneinander abweichen, so können wir den Gesamtwert $Q$ der im Laufe der Zeit $\Delta t$ des Ausbleichens absorbierten Energiemenge in erster Annäherung und für unsere Versuche hinreichend genau setzen

$$Q = E\left(1 - \frac{J_1 + J_2}{2 J_0}\right) \Delta t$$

und $E$ aus der Energiekurve des Spektrums entnehmen.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt: Die rotierende Sektorscheibe $S$ (Fig. 2) wurde aufgestellt und für eine Reihe von Wellenlängen, welche an der Trommel $T$ abgelesen wurden, die Intensitäten $J_0$ aus je 1—4 Ablesungen bestimmt. Nachdem wurde das Deckglas mit dem gefärbten Collodiumhäutchen eingesetzt und die Messungen der Intensitäten $J_1$ in gleicher Weise für dieselben Wellenlängen ausgeführt. Hierauf wurde die Scheibe $S$ entfernt und das

Häutchen der Einwirkung der ungeschwächten Strahlung während 3—17 Min. ausgesetzt, dann die Scheibe $S$ wieder eingesetzt und die Intensitäten $J_2$ für die nämlichen Wellenlängen gemessen.

Die Intensitäten $J_0$ waren nahe gleich Eins; die Intensitäten $J_1$ im Absorptionsmaximum des Collodiumhäutchens betrugen 0,2 bis 0,9 und das Ausbleichen wurde so weit geführt, bis das Verhältnis der Intensitäten $J_1$ zu $J_2$ etwa 0,9 bis 0,7 ausmachte. Berücksichtigen wir, daß die photometrischen Messungen im Mittel auf $\pm 0{,}3$ bis 0,5 Proz. genau gemacht wurden, so ergibt sich die Messung von $\Delta C/C$ im Absorptionsmaximum auf $\pm 15$ Proz. genau.

Die Reihen von Messungen der $J_1$ bzw. der $J_2$ nahmen etwa 3 Min. in Anspruch; da das Ausbleichen in 3—17 Min. vor sich ging und die photometrischen Messungen bei auf $^1/_{18}$ bzw. $^1/_{36}$ geschwächten Lichte gemacht wurden, so konnte die Änderung des Häutchens während der Messung vernachlässigt werden, um so mehr die Reihenfolgen der Messungen in beiden Fällen die nämlichen waren.

Die Resultate der Messungen für verschiedene Wellenlängen $\lambda$ sind für die einzelnen Farbstoffe in Tabellen zusammengefaßt, in welchen die gemessenen Intensitätsverhältnisse $J_1/J_0$ und $J_2/J_0$ angeführt sind, sowie der hieraus berechnete Bruchteil $\Delta C/C$ des ausgeblichenen Farbstoffs; andererseits sind die gemessenen Strahlungsintensitäten $E$ für verschiedene Wellenlängen und die während der Versuchsdauer absorbierten Energiemengen $Q$ (in g-Cal.) angegeben.

Bei der graphischen Darstellung der gewonnenen Resultate sind nicht die Werte $\Delta C/C$ aufgetragen, da die Beobachtungsfehler dieser Werte mit abnehmender Absorptionskonstante $K$ entsprechend wachsen, sondern die Werte $K(\Delta C/C)$, welche den nämlichen absoluten Beobachtungsfehler besitzen; dementsprechend sind auch die absorbierten Energiemengen mit der Absorptionskonstante multipliziert. Um die Übersicht zu erleichtern, sind diese Werte, bezogen auf die entsprechenden Maximalwerte, angeführt. Die Werte $K\Delta C/K_m\Delta C_m$ sind als ausgezogene Kurven, die Werte $KQ/K_mQ_m$ als punktierte Kurven dargestellt.

## Tabelle I.

**Cyanin (Ausbleichdauer 3 Min.).**

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | 554 | 573 | 593 | 604 | 617 | 642 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_1/J_0$ | 0,759 | 0,569 | 0,495 | 0,542 | 0,640 | 0,893 |
| $J_2/J_0$ | 0,769 | 0,610 | 0,566 | 0,624 | 0,701 | 0,906 |
| $E$ g-Cal./cm² sec | $3{,}47.10^{-4}$ | $4{,}51.10^{-4}$ | $6{,}25.10^{-4}$ | $7{,}29.10^{-4}$ | $9{,}02.10^{-4}$ | $13{,}53.10^{-4}$ |
| $\Delta C/C$ | 0,05 | 0,12 | 0,19 | 0,23 | 0,21 | 0,12 |
| $Q$ g-Cal./cm² | 0,0147 | 0,0334 | 0,0529 | 0,0547 | 0,0536 | 0,0246 |
| $K.\Delta C/K_m \Delta C_m$ | 0,10 | 0,49 | 0,95 | 1,00 | 0,66 | 0,10 |
| $KQ/K_m Q_m$ | 0,11 | 0,51 | 1,00 | 0,90 | 0,65 | 0,07 |

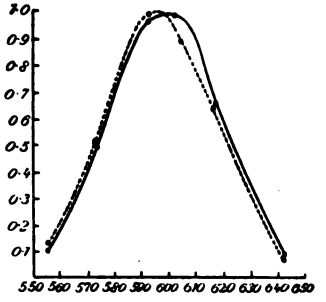


Fig. 4. Cyanin.

## Tabelle II.

**Pinachrom (Ausbleichdauer 4 Min.).**

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | 536 | 554 | 574 | 584 | 596 | 620 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_1/J_0$ | 0,811 | 0,805 | 0,711 | 0,703 | 0,813 | 0,989 |
| $J_2/J_0$ | 0,822 | 0,815 | 0,753 | 0,746 | 0,834 | 0,989 |
| $E$ g-Cal./cm² sec | $1{,}0.10^{-4}$ | $1{,}3.10^{-4}$ | $1{,}9.10^{-4}$ | $2.2.10^{-4}$ | $2{,}7.10^{-4}$ | $3{,}8.10^{-4}$ |
| $\Delta C/C$ | 0,07 | 0,05 | 0,17 | 0,17 | 0,12 | 0,00 |
| $Q$ g-Cal./cm² | 0,0044 | 0,0059 | 0,0122 | 0,0146 | 0,0115 | 0,0010 |
| $K\Delta C/K_m \Delta C_m$ | 0,23 | 0,19 | 0,96 | 1,00 | 0,42 | 0,00 |
| $KQ/K_m Q_m$ | 0,18 | 0,25 | 0,81 | 1,00 | 0,46 | 0,00 |

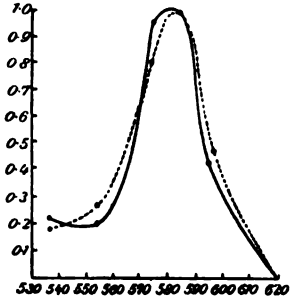


Fig. 5. Pinachrom.

## Tabelle III.

**Lepidincyanin (Ausbleichdauer 6 Min.).**

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | 536 | 554 | 574 | 596 | 620 | 648 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_1/J_0$ | 0,843 | 0,750 | 0,603 | 0,514 | 0,752 | 1,00 |
| $J_2/J_0$ | 0,843 | 0,764 | 0,632 | 0,588 | 0,802 | 1,00 |
| $E$ g-Cal./cm² sec | $1{,}04.10^{-4}$ | $1{,}46.10^{-4}$ | $1{,}87.10^{-4}$ | $2{,}50.10^{-4}$ | $3{,}38.10^{-4}$ | $5{,}41.10^{-4}$ |
| $\Delta C/C$ | 0,00 | 0,06 | 0,10 | 0,19 | 0,28 | 0,00 |
| $Q$ g-Cal./cm² | 0,0059 | 0,0128 | 0,0257 | 0,0406 | 0,0267 | 0,0000 |
| $K\Delta C/K_m \Delta C_m$ | 0,00 | 0,15 | 0,38 | 1,00 | 0,51 | 0,00 |
| $KQ/K_m Q_m$ | 0,04 | 0,14 | 0,48 | 1,00 | 0,28 | 0,00 |

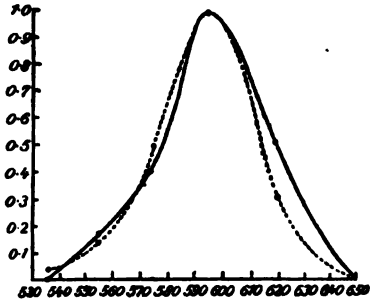



Fig. 6. Lepidincyanin.

## Tabelle IV.

**Chinaldincyanin (Ausbleichdauer 16 Min. 40 Sek.).**

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | 536 | 554 | 574 | 596 | 620 |
|---|---|---|---|---|---|
| $J_1/J_0$ | 0,190 | 0,113 | 0,111 | 0,634 | 0,957 |
| $J_2/J_0$ | 0,221 | 0,146 | 0,160 | 0,695 | 0,957 |
| $E$ g-Cal./cm² sec | $1{,}04.10^{-4}$ | $1{,}46.10^{-4}$ | $1{,}87.10^{-4}$ | $2{,}50.10^{-4}$ | $3{,}38.10^{-4}$ |
| $\Delta C/C$ | 0,09 | 0,12 | 0,17 | 0,20 | 0,00 |
| $Q$ g-Cal./cm² | 0,083 | 0,127 | 0,162 | 0,084 | 0,014 |
| $K\Delta C/K_m \Delta C_m$ | 0,41 | 0,71 | 1,00 | 0,25 | 0,00 |
| $KQ/K_m Q_m$ | 0,39 | 0,78 | 1,00 | 0,11 | 0,00 |

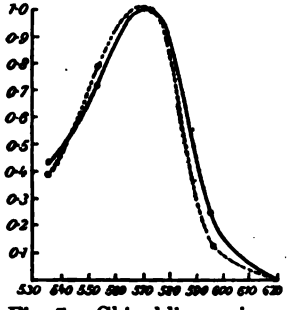



Fig. 7. Chinaldincyanin.

## Tabelle V.

**Pinaverdol (Ausbleichdauer 15 Min.).**

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | 536 | 554 | 574 | 596 | 620 |
|---|---|---|---|---|---|
| $J_1/J_0$ | 0,376 | 0,210 | 0,241 | 0,794 | 0,964 |
| $J_2/J_0$ | 0,392 | 0,242 | 0,291 | 0,805 | 0,966 |
| $E$ g-Cal./cm² sec | $1{,}04.10^{-4}$ | $1{,}46.10^{-4}$ | $1{,}87.10^{-4}$ | $2{,}50.10^{-4}$ | $3{,}33.10^{-4}$ |
| $\Delta C/C$ | 0,04 | 0,09 | 0,13 | 0,06 | 0,06 |
| $Q$ g-Cal./cm² | 0,058 | 0,102 | 0,124 | 0,045 | 0,010 |
| $K\Delta C/K_m \Delta C_m$ | 0,22 | 0,74 | 1,00 | 0,07 | 0,01 |
| $KQ/K_m Q_m$ | 0,32 | 0,90 | 1,00 | 0,06 | 0,00 |

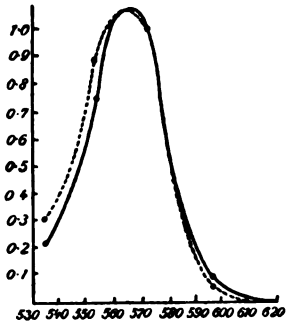



Fig. 8. Pinaverdol.

## Tabelle VI.

**Mischung von Pinaverdol + Pinacyanol (Ausbleichdauer 10 Min.).**

| $\lambda$ in $\mu\mu$ | 554 | 566 | 568 | 573 | 582 | 593 | 604 | 630 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_1/J_0$ | 0,372 | 0,288 | 0,277 | 0,310 | 0,512 | 0,372 | 0,279 | 0,671 |
| $J_2/J_0$ | 0,461 | 0,432 | 0,447 | 0,447 | 0,569 | 0,589 | 0,548 | 0,719 |
| $E$ g-Cal./cm² sec | $3{,}47.10^{-4}$ | $3{,}82.10^{-4}$ | $4{,}16.10^{-4}$ | $4{,}51.10^{-4}$ | $5{,}21.10^{-4}$ | $6{,}25.10^{-4}$ | $7{,}29.10^{-4}$ | $11{,}10.10^{-4}$ |
| $\Delta C/C$ | 0,22 | 0,32 | 0,37 | 0,31 | 0,16 | 0,46 | 0,53 | 0,17 |
| $Q$ g-Cal./cm² | 0,122 | 0,147 | 0,159 | 0,168 | 0,144 | 0,195 | 0,257 | 0,208 |
| $K\Delta C/K_m \Delta C_m$ | 0,32 | 0,60 | 0,70 | 0,54 | 0,16 | 0,68 | 1,00 | 0,10 |
| $KQ/K_m Q_m$ | 0,37 | 0,56 | 0,62 | 0,60 | 0,29 | 0,59 | 1,00 | 0,25 |

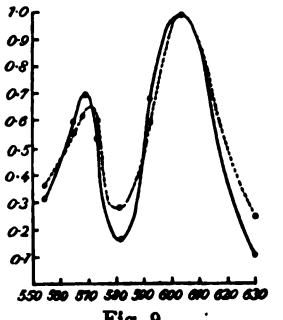



Fig. 9.
Pinaverdol + Pinacyanol.

Die gewonnenen Resultate lassen sich in folgender Weise zusammenfassen: *Innerhalb der Beobachtungsfehler ist in einem Absorptionsstreifen die zersetzte Farbstoffmenge der absorbierten Energiemenge direkt proportional und unabhängig von der Wellenlänge der auffallenden Strahlung.* (Vgl. W. Nernst, l. c. p. 767.)

Um zu ermitteln wie groß die strahlende Energiemenge ist, welche für die Zersetzung von 1 g Farbstoff notwendig ist, wurden Collodiumlösungen von bestimmtem Farbstoffgehalt auf große Glasflächen in gleichmäßigen Schichten gegossen, getrocknet und mit einem Planimeter deren Flächeninhalt bestimmt; hieraus wurde der Farbstoffgehalt pro 1 qcm berechnet. Das getrocknete Häutchen wurde, wie oben, den Strahlen des Spektrums ausgesetzt und im Absorptionsmaximum die während eines gemessenen Zeitintervalles zersetzte Farbstoffmenge bestimmt; andererseits wurde die in dieser Zeit absorbierte Energiemenge $Q$ ermittelt. Hieraus läßt sich die für die Zersetzung von 1 g Farbstoff erforderliche Energiemenge der Strahlung berechnen; die Resultate dieser Versuche sind in der Tab. VII zusammengefaßt.

Tabelle VII.

| | | |
|---|---|---|
| Chinaldincyanin | 16000 | $\frac{\text{g-Cal.}}{\text{g-Farbstoff}}$ |
| Pinachrom | 30000 | |
| Cyanin | 48000 | |
| Lepidincyanin | 58000 | |
| Pinaverdol | 117000 | |

Aus den angeführten Daten läßt sich durch einen Vergleich mit den Verbrennungswärmen organischer Körper der Schluß ziehen, daß *nur ein geringer Bruchteil der absorbierten Strahlung als Energie für die photochemischen Umsetzungen dient;* der größte Teil derselben geht in die Erwärmung der absorbierenden Schicht über.

Zum Schlusse erlaube ich mir, Hrn. Prof. Dr. P. Lebedew für die Anregung und Unterstützung bei dieser Arbeit, dem Hrn. Direktor der Ohrenklinik Dr. S. v. Stein, sowie den Herren Professoren Eichenwald, Ogneff und Tschugajeff für die geliehenen Apparate meinen Dank auszusprechen.

Moskau, Physik. Inst. d. Univ., im September 1907.

(Eingegangen 8. Oktober 1907.)

## 4. *Optische Eigenschaften und Elektronentheorie; von H. Erfle.*

[Auszug aus der Münchener Inaugural-Dissertation[1]) des Verfassers.]

### § 1. Einleitung.

In einer in den Annalen der Physik veröffentlichten Abhandlung hat P. Drude[2]) die Dispersion vom Standpunkte der Elektronentheorie behandelt und den Schluß gezogen, daß die Eigenschwingungen im Ultraviolett hervorgebracht werden durch die negativen Elektronen mit konstantem, sehr großen Verhältnis von Ladung zur Masse $e/m = 1{,}5.10^7$,[3]) daß dagegen die ultraroten Eigenschwingungen der positiv geladenen Molekülmasse oder Atomen bzw. Atomgruppen mit positiver Ladung zuzuschreiben sind.

Drude knüpfte zunächst seine Rechnungen an die Ketteler-Helmholtzsche Dispersionsformel in ihrer einfachsten Gestalt

$$n^2 = b^2 + \frac{M_r}{\lambda^2 - \lambda_r^2} + \frac{M_v}{\lambda^2 - \lambda_v^2} \tag{1}$$

bzw. an eine von Ketteler eingeführte abgekürzte Form derselben an:

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\lambda_v^2}{\lambda^2 - \lambda_v^2}, \tag{2}$$

wobei er fand, daß die Zahl der Elektronen mit der Eigenwellenlänge $\lambda_v$ pro Molekül sich von gleicher Größenordnung wie die Valenzsumme ergibt, wenn man annimmt, daß die Masse dieser Elektronen gleich der auch sonst zur Elementarladung $e$ gehörigen Masse $m$ ist, also $e/m$ von der Größenordnung

$$1{,}86 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{E.M.E.}}{\text{g-Masse}}\right].$$

1) In dieser befinden sich auch ausführliche Literaturangaben.

2) P. Drude, Optische Eigenschaften und Elektronentheorie, Ann. d. Phys. **14.** I. Teil p. 677—725, II. Teil p. 936—961. 1904.

3) Diesen Wert berechnet Drude, p. 711, aus der Dispersion des Wasserstoffgases; vgl. hierzu auch J. Koch, Ann. d. Phys. **17.** p. 668. 1905 (Brechungsexp. im Ultrarot).

Gleichzeitig fand Drude, daß der Koeffizient $k$ der Formel (2), welcher den Einfluß der ultraroten Eigenschwingungen auf die Dispersion darstellt, sich für Flußspat, Sylvin, Steinsalz, Quarz, Schwefelkohlenstoff, Wasser angenähert vorausberechnen läßt aus Molekulargewicht, Dichte und Valenzsumme $v$.[1])

Nachdem Drude diesen Zusammenhang zwischen der Valenzsumme $v$ des Moleküls und der Zahl der im Molekül vorhandenen schwingungsfähigen Elektronen gefunden hatte, machte er sich von der in den Formeln (1) und (2) enthaltenen Annahme, daß nur eine ultraviolette Eigenschwingung vorhanden sei, frei und bewies, daß es im allgemeinen nur möglich ist, aus der Dispersion einen gewissen Grenzwert $p$ für die Anzahl schwingungsfähiger Elektronen im Molekül zu berechnen, so daß nämlich diese Anzahl[2]) $p' \geqq p$. Er fand weiter, daß die so berechneten Grenzwerte $p$ einen sehr deutlichen Zusammenhang mit der chemischen Konstitution zeigen, und daß es, ähnlich wie bei der Landolt-Brühlschen Molekularrefraktion[3]) möglich ist, für eine Verbindung $p.e/m$ additiv zusammenzusetzen aus den $p.e/m$ der einzelnen Atome bzw. bestimmter Atomgruppen. Dabei zeigten die Benzolderivate ein besonderes Verhalten, indem bei diesen durch die eigentümliche Art der Bindung im Benzolkern die Beweglichkeit bei einigen der Elektronen stärker zurückgeht als bei anderen, d. h. die *relative* Verschiedenheit der Eigenwellenlängen der einzelnen Elektronengattungen größer wird. Außerdem stellt Drude den Satz auf: Bei den als Kationen möglichen Stoffen muß die berechnete Zahl $p$ der Elektronen, welche durch ihre Beweglichkeit die Dispersion beeinflussen, gleich sein der Valenz oder kleiner sein; bei den Stoffen dagegen, welche als Anionen auftreten können, hängt die berechnete Zahl $p$ der lose sitzenden Elektronen nicht mit der Valenz zusammen[4]), sondern kann, wie bei den Halogenen, wesentlich größer sein als die Valenz.[5]) Außerdem gibt Drude[6]) noch

1) Vgl. Formel (21) meiner Arbeit.

2) Bei Verbindungen, die ein Halogen Cl, Br, J, F enthalten, kann $p' > v$ sein; doch ist auch bei diesen $p' \geqq p$.

3) Z. B. Brühl, Zeitschr. f. physikal. Chem. 7. p. 140—193. 1891.

4) Solange diese Stoffe *nicht* als Anionen auftreten.

5) P. Drude, l. c. p. 719—723.

6) P. Drude, l. c. p. 721—723.

eine elektrische Deutung der Abeggschen Theorie[1]) der Valenz.

Es war nun von Interesse, zu sehen, welches Verhalten Substanzen, die eine sogenannte „Doppelbindung" enthalten, zeigen, ob außerdem die von Drude gefundene Additionsregel für $p.e/m$ auch gestattet, $p.e/m$ für andere Substanzen vorauszuberechnen, die Drude noch nicht in den Kreis seiner Rechnungen gezogen hat, und ob es wirklich möglich ist, einen Koeffizienten der Dispersionsformel ohne weiteres aus Molekulargewicht, Dichte und Valenzsumme zu berechnen. Um die letztere Frage der Entscheidung näher zu bringen, habe ich für Benzol, $\alpha$-Monobromnaphthalin und Methyljodid die Brechungsexponenten im sichtbaren Spektrum gemessen und versucht, die gemessenen Werte durch die Kettelersche Dispersionsformel (2) darzustellen. Für diese drei Substanzen waren die Konstanten der Formel (2) noch nicht bestimmt[2]), dagegen die Konstanten einer dreikonstantigen Formel ($k = 0$) von Martens[3]) für Benzol und Monobromnaphthalin berechnet nach Beobachtungen von H. Th. Simon.[4]) Zur Entscheidung der beiden ersten Fragen habe ich aus zahlreichen Beobachtungen von Brühl, Landolt, Jahn und anderen die Grenzwerte für die Summe schwingungsfähiger Elektronen pro Molekül berechnet und hieraus schließlich neue Werte $p.e/m$ für die Atome verschiedener Elemente abgeleitet. Zunächst möchte ich auf einige Folgerungen der Elektronentheorie hinweisen.

## § 2. Dispersionstheorie.

### Erklärung der vorkommenden Bezeichnungen.

$\mathfrak{N}_h$ Zahl der Elektronen bzw. positiv geladenen Atome (Atomgruppen) der Gattung $h$ in 1 cm$^3$.

---

1) R. Abegg, Versuch einer Theorie der Valenz und der Molekularverbindungen, Zeitschr. f. anorgan. Chemie **39.** p. 330—380. 1904.

2) Weegmann, Zeitschr. f. physik. Chem. **2.** p. 238, 239. 1888, benutzt eine *Reihen*entwickelung mit vier Konstanten.

3) F. F. Martens, Ann. d. Phys. **6.** p. 603—640. 1901 (Berliner Habilitationsschrift).

4) H. Th. Simon, Über Dispersion ultravioletter Strahlen, Berliner Inaug.-Diss. 1894, auszugsweise in Wied. Ann. **53.** p. 542—558. 1894.

$\vartheta_h$ „Beweglichkeit" des Elektrons [1]) [$\vartheta_h/4\pi$ gibt an, um wieviel ein Elektron mit der Ladung 1 elektrostatische Einheit durch eine elektr. Kraft 1 (elektrostatisch gemessen) aus der Ruhelage herausgezogen wird].

$r_h$ Reibungskoeffizient für die Elektronen der Gattung $h$.

$m_h$ Masse eines Elektrons der $h$ten Gattung in Gramm.

Die Größen $m_h$, $\vartheta_h$, $r_h$ sind wesentliche Konstanten in der Bewegungsgleichung [2]) eines Elektrons der $h$ten Gattung:

$$(3) \qquad m_h \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2} = e_h' X - 4\pi \frac{e_h'^2}{\vartheta_h} \xi_h - r_h e_h'^2 \frac{\partial \xi_h}{\partial t}.$$

Das zweite Glied auf der rechten Gleichungsseite bezeichnet eine quasielastische Kraft, das dritte Glied eine Reibungskraft.

$e_h'$ ist die elektrostastisch gemessene Ladung eines Elektrons.

$X$ die elektrostatisch gemessene mittlere elektrische Feldstärke im Äther zwischen den Ionen.

$e_h$ die elektromagnetisch gemessene Ladung eines Elektrons. [3])

$\mathfrak{N}_h \vartheta_h = \mathfrak{m}_h$ Dielektrizitätskonstante der $h$ten Elektronengattung.

$\lambda_h$ Wellenlänge der Eigenschwingung dieser Elektronen.

$M_h$ Atomgewicht der schwingenden positiv geladenen Atomgruppe, d. h. deren Masse $m_h = M_h . H$, wo

$H$ die absolute Masse eines Atoms Wasserstoff.

$M$ das Molekulargewicht der Substanz.

$d$ Dichte der Substanz für die Temperatur, bei welcher die Brechungsindizes gemessen sind.

$p_h$ Anzahl der Elektronen mit der Eigenwellenlänge $\lambda_h$, die pro Molekül vorhanden sind.

$p'$ Zahl der lose an das Atom (bzw. Molekül) gebundenen Elektronen. [4])

$p$ unterer Grenzwert für die *Gesamt*zahl schwingungsfähiger Elektronen mit Eigenschwingungen im Ultraviolett pro Molekül.

$\nu$ Summe der im Molekül enthaltenen Valenzen.

$\varepsilon = b^2 = 1 + \sum \mathfrak{N}_h \vartheta_h$ Dielektrizitätskonstante der Substanz für die betr. Temperatur.

---

1) Die Bezeichnung von $\vartheta_h$ als „Beweglichkeit" rührt her von Drude (z. B. Auszug aus der Abhandl.: Opt. Eigensch. u. Elektronentheorie in der Zeitschr. f. wissensch. Photogr. etc., herausgeg. v. K. Schaum; Bd. III. Heft 1. 1905). Bei den Messungen an ionisierten Gasen versteht man unter „Ionenbeweglichkeit" die Ionen*geschwindigkeit* für das Potentialgefälle 1.

2) P. Drude, Lehrbuch der Optik, p. 364. 2. Aufl. 1906.

3) $e_h$ wird an Stelle von $e_h'/o$ eingeführt beim Übergang von

$$\frac{T_h^2}{4\pi^2} = \frac{m_h \vartheta_h}{4\pi e_h'^2} \quad \text{zu} \quad \lambda_h^2 = c^2 . T_h^2 = \pi \frac{m_h \vartheta_h}{e_h^2}$$

($T_h$ ist die Eigenschwingungsdauer; Gl. für $\lambda_h^2$ Drude, l. c. p. 680 unten).

4) P. Drude, l. c. p. 719.

$n$ Brechungsindex gegen das Vakuum.
$\lambda$ Wellenlänge des Lichtes im Vakuum.
Der Index $r$ soll sich auf ultrarote, der Index $v$ auf ultraviolette Eigenschwingungen beziehen.

Aus der Elektronentheorie[1]) folgen die allgemeinen Dispersionsformeln:

$$n^2(1-\varkappa^2) = 1 + \sum_h \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h (\lambda^2 - \lambda_h^2)\lambda^2}{(\lambda^2-\lambda_h^2)^2 + g_h^2\lambda^2} \tag{4}$$

und

$$2n^2\varkappa = \sum_h \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h g_h \lambda^3}{(\lambda^2-\lambda_h^2)^2 + g_h^2\lambda^2}, \tag{5}$$

wobei

$$g_h = \frac{c}{2} r_h \vartheta_h, \tag{6}$$

$$c = 3.10^{10}\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \tag{7}$$

die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Der Absorptionsindex[2]) $\varkappa$ ist hier dadurch definiert, daß eine Lichtamplitude von der Größe 1 den Wert $e^{-2\pi\varkappa}$ annimmt, nachdem das Licht in dem Körper den Weg $\lambda'$ durchlaufen hat ($\lambda'$ = Wellenlänge des Lichtes im Körper $= \lambda/n$). Die einfache elektromagnetische Lichttheorie wurde bekanntlich in verschiedener Weise erweitert zur Erklärung der Erscheinungen der normalen und anomalen Dispersion.[3]) Ich schließe mich an die Elektronentheorie in der von Drude gegebenen Form[4]) an. Für Messungen innerhalb des Absorptionsgebietes ist zu bemerken, daß $n$ bzw. $\varkappa$ die Brechungs- bzw. Absorptionsindizes für *senkrechte* Inzidenz[5]) sind.

Zunächst suchte ich die Frage zu entscheiden, in welche Grenzwerte die Absorptionsindizes und die Brechungsindizes übergehen für verschwindend kleine Wellenlängen unter der

1) Aus Formel (18) in Drudes Lehrbuch der Optik, 2. Aufl. 1906, p. 368.

2) Drudes Lehrb. d. Optik, 2. Aufl. p. 341. 1906.

3) Literaturangaben in der Diss. p. 14; die in Kaysers Handbuch der Spektroskopie I. Bd., Leipzig, p. 330. 1900, angegebenen Dispersionsformeln entsprechen der älteren Kettelerschen Theorie (Wied. Ann. **12.** p. 364. 1881 u. **30.** p. 300. 1887) und stimmen mit den Formeln (4) und (5) nicht streng überein.

4) Drudes Lehrb. der Optik, 2. Aufl. p. 362—388. 1906 u. 1. Aufl. p. 352—368. 1900.

5) Vgl. z. B. A. Pflüger, Wied. Ann. **56.** p. 425, 426. 1895; **65.** p. 174. 1898.

Voraussetzung, daß beliebig viele Absorptionsgebiete vorhanden sind. Martens[1]) hat auch den Brechungsindex für die Wellenlänge $\lambda = 0$ berechnet; das von ihm gefundene Resultat ist aber, wie ich nachher zeigen werde, nicht richtig. Aus den allgemeinen Dispersionsformeln (4) und (5) berechnete ich Brechungsindex und Absorptionsindex für die Wellenlänge $\lambda = 0$. Für $\lambda = 0$ folgt nämlich, falls nicht gerade auch eine Eigenwellenlänge $\lambda_h = 0$ existiert[2]):

$$n^2(1 - \varkappa^2) = 1 \quad \text{und} \quad 2n^2\varkappa = 0 \,[g_h, \mathfrak{N}_h, \vartheta_h \text{ endlich}]$$

oder

$$\frac{2\varkappa}{1 - \varkappa^2} = 0, \text{ d. h. } \varkappa = 0, \; n^2 = 1.$$

Für die Wellenlänge 0 ist also bei Gültigkeit der Dispersionsformeln (4) und (5) der Brechungsindex $n = 1$ und der Absorptionsindex $\varkappa = 0$.[3])

Für *durchsichtige* Medien folgt aus den allgemeinen Formeln

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} n^2 &= 1 + \sum_h \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} = 1 + \sum_h \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h \lambda^2 - \mathfrak{N}_h \vartheta_h \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} \\ &\quad + \sum_h \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} = b^2 + \sum_h \frac{M_h}{\lambda^2 - \lambda_h^2}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(9) \qquad M_h = \mathfrak{N}_h \vartheta_h \lambda_h^2.$$

Die Formel (8) ist die Ketteler-Helmholtzsche Dispersionsformel. Eine abgekürzte Form[4]) derselben ist:

$$(2) \qquad n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\lambda_v^2}{\lambda^2 - \lambda_v^2}.$$

Es ist

$$(10) \qquad k = \sum_r \frac{\mathfrak{N}_r \vartheta_r}{\lambda_r^2}.$$

---

1) F. F. Martens, Ann. d. Phys. **6**. p. 603—640. 1901; Berliner Habilitationsschrift.

2) $\varkappa = 0$ und $n^2 = 1$ bei $\lambda = 0$ gilt auch noch, wenn $\lambda_h = 0$, da $\vartheta_h = \lambda_h^2 \cdot \frac{e_h^2}{\pi m_h}$ nach (14).

3) Darauf, daß $n = 1$ für $\lambda = 0$, haben schon Goldhammer und andere hingewiesen, wenn auch nicht in dieser Form: D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **57**. p. 638. 1896; C. Raveau, Journ. de Phys. **5**. p. 113. 1896; E. Ketteler, Wied. Ann. **58**. p. 410. 1896; A. Pflüger, Wied. Ann. **58**. p. 672. 1896.

4) Zulässig für nicht zu große $\lambda$.

$a^2 - 1 - \mathfrak{N}_\varrho \vartheta_\varrho = a^2 - 1 - D$ ist meist größer als Null, da eben noch ultraviolette Eigenschwingungen von kleinerer Wellenlänge als $\lambda_\varrho$ vorhanden sind, für die aber $\mathfrak{N}_\varrho \vartheta_\varrho \lambda_\varrho^2/\lambda^2$ unmerklich klein ist.[1]

Martens führt eine Dispersionsformel[2]

(11) $$n^2 = \mathfrak{m} + \frac{\mathfrak{m}' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} - k\lambda^2$$

ein bzw.

(11a) $$n^2 = \mathfrak{m} - \frac{\mathfrak{m}' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2}.$$

Formel (11) ist identisch mit der von Ketteler[3]) schon 1885 eingeführten Formel (2) und ist durch eine einfache Umformung in diese überzuführen. Es ist nämlich:

(12) $$\mathfrak{m}' = D = \mathfrak{N}_\varrho \vartheta_\varrho = \frac{M_\varrho}{\lambda_\varrho^2}, \quad \lambda' = \lambda_\varrho, \quad \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{N}_0 \vartheta_0 = a^2 - D.$$

Die Formeln (11) und (11a) erhält Martens[4]), indem er den Einfluß der kleinen ultravioletten Eigenwellenlängen $\lambda''$ durch $\mathfrak{m}''$ darstellt, wo $\mathfrak{m}''$ das erste Glied der Reihe für $\mathfrak{m}''(\lambda^2/\lambda^2 - \lambda''^2)$ ist; $\mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}''$. Am Schlusse seiner Arbeit berechnet Martens aus (11) und (11a) die Brechungsexponenten für die Wellenlänge 0 und findet dann natürlich $n_0 = \sqrt{\mathfrak{m}}$, also für verschiedene Substanzen verschiedene Werte, und nicht den Wert 1, wie er aus

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\mathfrak{m}_h \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2}$$ [5])

folgt. Martens begeht also bei der Berechnung von $n_0$ einen Fehler, denn die Reihenentwicklung von $\lambda^2/\lambda^2 - \lambda''^2$ gilt nur für $\lambda''/\lambda < 1$.[6]) Die Berechnungen von Martens in Tabelle 20[7]) sind daher nicht zulässig.

1) P. Drude, l. c. p. 688 und Drudes Optik, 2. Aufl. p. 375. 1906.

2) F. F. Martens, l. c. p. 611—613. Ich setze m anstatt $m$ bei Martens.

3) E. Ketteler, Theoret. Optik p. 541, Braunschweig 1885; auch Wied. Ann. 30. p. 299—316. 1887; daselbst auch Prüfung der Ketteler-schen Dispersionsformel für $CS_2$, $H_2O$ etc.

4) F. F. Martens, l. c. p. 612.

5) Martens benutzt p. 611 diese Formel als Ausgangspunkt.

6) Dies hatte auch Martens p. 612 hervorgehoben.

7) F. F. Martens, l. c. p. 639; außerdem ist Fig. 5 p. 614 für $\lambda = 0$ nicht richtig.

In meiner Dissertation habe ich auch die theoretische Zulässigkeit der Reihenentwickelung

$$n^2 = -k\lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \tag{13}$$

diskutiert und gezeigt, daß für $\lambda_v$ von der Größenordnung $> 200\ \mu\mu$ (13) nicht genügt, sondern mindestens durch

$$n^2 = -k\lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \frac{d}{\lambda^6} \tag{13a}$$

ersetzt werden müßte; (13a) ist aber umständlicher in der Anwendung als (2), daher ist (2) vorzuziehen.

Ich will nun die wichtigsten der von Drude abgeleiteten Beziehungen[1]) angeben:

$$\lambda_h^2 = \pi \cdot \frac{m_h \vartheta_h}{e_h^2}\ ^2), \tag{14}$$

$$\mathfrak{N}_h = \frac{p_h}{H} \cdot \frac{d}{\mathsf{M}}\ ^3), \tag{15}$$

$$\pi \frac{M_h}{\lambda_h^4} = \pi \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h}{\lambda_h^2} = \frac{e_h^2 \mathfrak{N}_h}{m_h} = p_h \cdot \frac{e_h}{m_h} \cdot \frac{e_h}{H} \cdot \frac{d}{\mathsf{M}}. \tag{16}$$

Es sei $e$ das elektromagnetisch gemessene Elementarquantum der Elektrizität; dann ist speziell für die ultravioletten Elektronen, da $e/H$ aus der Elektrolyse bestimmt ist zu $0{,}965 \cdot 10^4$,

$$p_v \cdot \frac{e}{m} = 3{,}26 \cdot 10^{-4} \frac{\mathsf{M}}{d} \frac{M_v}{\lambda_v^4} = 3{,}26 \cdot 10^{-4} \frac{\mathsf{M}}{d} \frac{D}{\lambda_v^2}.\ ^4) \tag{17}$$

Für die ultraroten Eigenschwingungen kann

$$e_h = v_r \cdot e \tag{18}$$

ein ganzzahliges Multiplum des Elementarquantums sein, $m_h$ ist im Maximum gleich der Masse $H \cdot \mathsf{M}$ des ganzen Moleküls, oder es ist ein Teil derselben

$$m_r = \mathsf{M}_r \cdot H. \tag{18a}$$

---

1) Ausführlicher in der Dissertation p. 19—22.

2) P. Drude, p. 680; Drudes Optik, 2. Aufl. p. 376. 1906.

3) P. Drude, l. c. p. 683. Über meine Folgerungen aus (14) und (15) siehe „die *Berechnung der Loschmidtschen Zahl aus den Konstanten der Dispersionsformel*“ in den Ann. d. Phys. **23**. p. 594—598. 1907 und den in dieser Zeitschrift erscheinenden Nachtrag zu dieser Berechnung.

4) P. Drude, l. c. p. 683.

Aus (16) und (18), (18a) folgt

$$\frac{M_r}{p_r} = \left(\frac{e}{H}\right)^2 \cdot \frac{d}{\pi} \frac{r_r^2 \cdot \lambda_r^4}{M \cdot M_r}, \tag{19}$$

aus (19), (10) und (9):

$$k = \frac{0{,}296 \cdot 10^8}{M/d} \sum \frac{v_r^2 p_r}{M_r} \cdot \text{ [1]} \tag{20}$$

Hieraus folgt, wenn man die einfachste Annahme macht, daß die Summe nur ein Glied enthält, $v_r = v$, $p_r = 1$, $M_r = M$ setzt:

$$k = \frac{0{,}296 \cdot 10^8 \cdot d}{(M/r)^2} \cdot \text{ [2]} \tag{21}$$

Unter Annahme von beliebig vielen ultravioletten Elektronengattungen führt Drude gewisse Abkürzungen [3]) für einige Quotienten ein, von denen ich die folgende:

$$\frac{\lambda_{II}^2}{\lambda_I^2} = \beta, \quad \frac{\lambda_{III}^2}{\lambda_I^2} = \beta', \ldots \text{ [4]} \tag{22}$$

besonders hervorheben möchte. Für die später folgenden Rechnungen sind die folgenden Definitionen wichtig:

$$r = n^2 - 1 + k\lambda^2; \quad x = \frac{1}{\lambda^2}; \quad d_{12} = \frac{r_1 - r_2}{x_1 - x_2} = \frac{r_1 - r_2}{\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}}. \tag{23}$$

$\lambda_1$ sei die größte der Eigenwellenlängen im Ultraviolett. Aus der allgemeinen Dispersionsformel (8) für durchsichtige Medien folgt schließlich, daß die Größe

$$p = \frac{m}{e} \cdot 3{,}26 \cdot 10^{-4} \frac{M}{d} \frac{r_1 r_2}{d_{12}} \tag{24}$$

die Summe der Elektronen im Molekül, welche durch ihre

---

1) P. Drude, l. c. p. 688.

2) P. Drude, l. c. p. 689. Für die Alkohole, sowie für die Gase und Dämpfe versagt nach Drude, p. 704, 705, 710—713 die Formel (21). Für Gase kann $k$ angenähert gleich Null gesetzt werden, für die Alkohole ist der nach (21) berechnete Wert zu groß; die Gültigkeit von (20) dagegen ist eine allgemeine; bei (21) wird also angenommen, daß die positive Ladung $e \cdot v$ mit der ganzen Molekülmasse schwingt.

3) P. Drude, l. c. p. 696.

4) Ich bezeichne die Eigenwellenlängen im Ultraviolett mit $\lambda_I$, $\lambda_{II}$, $\lambda_{III}$ ... an Stelle der Bezeichnungsweise von Drude $\lambda_1$, $\lambda_2$ ..., um Verwechslungen mit den Größen $x_1 = 1/\lambda_1^2$ zu vermeiden.

Beweglichkeit[1]) überhaupt Einfluß auf die Dispersion haben, mit um so größerer *Annäherung* darstellt, bei je größeren Wellenlängen $\lambda$ die $r_1, r_2, d_{12}$ gebildet werden, und je geringer die Unterschiede in den Eigenwellenlängen dieser Elektronen sind. Aus diesem Grunde hat Drude noch die Grenze berechnet, der sich $p$ für $\lambda = \infty$ nähert. Aus (23), (2) und (8) folgt

$$(25) \qquad \left[\frac{r_1 r_2}{d_{12}}\right]_{\lambda=\infty} = \frac{(a^2-1)^2}{D\lambda_v^2} = \frac{\{b^2 - 1 - \sum M_r/\lambda_r^2\}^2}{M_v}.$$

Hat nur eine Gattung Elektronen Einfluß auf den Brechungsindex, d. h. ist $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3 = \ldots 0$, dann ist

$$(26) \qquad \frac{d_{12}}{r_1 \cdot r_2} = \frac{\lambda_1^2}{\mathfrak{N}_1 \vartheta_1} = \frac{d_{1k}}{r_1 \cdot r_k} = \text{const.},$$

unabhängig von $\lambda$ für alle Wellenlängen $> \lambda_1$, bei denen die Absorption zu vernachlässigen ist. Der Quotient $d_{12}/r_1 \cdot r_2$ gibt somit in seinem Verhalten für verschiedene Wellenlängen ein *Kriterium*[2]) *dafür, ob eine Substanz nur eine ultraviolette Eigenschwingung besitzt;* die Unbestimmtheit des Koeffizienten $k$ kommt hierbei im allgemeinen nur wenig in Betracht. Ist bei einer Substanz $k$ sicher wesentlich von Null verschieden, dann zeigt sich dies mitunter dadurch, daß $p$, d. h. $r_1 r_2/d_{12}$, stellenweise abnimmt mit wachsendem $\lambda$, wenn man $r_1, r_2$ etc. für $k = 0$ berechnet hat.[3]) Ist $r_1 r_2/d_{12}$ nicht konstant, dann kann seine Abhängigkeit von $\lambda$ nur dann bedeutend werden, wenn $\lambda$ sich dem Gebiete der ultravioletten Eigenwellenlängen stark nähert, da dann die Größen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ stark unter den Wert 1 sinken.[4]) $r_1 r_2/d_{12}$, d. h. also auch $p$, wächst im allgemeinen um so rascher mit wachsender Wellenlänge, je größer die größte Wellenlänge des ultravioletten Absorptionsgebietes ist, be-

1) Nach (14) ist die Beweglichkeit $\vartheta_v$ einer ultravioletten Elektronengattung proportional $\lambda_v^2$, nämlich

$$\vartheta_v = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{\lambda_v^2}{\pi}.$$

2) P. Drude, l. c. p. 695.

3) P. Drude, l. c. p. 704 unten.

4) Es ist

$$\gamma_1 = \frac{1 - \lambda_1^2 x_1}{1 - \lambda_{II}^2 x_1}, \quad \gamma_2 = \frac{1 - \lambda_1^2 x_2}{1 - \lambda_{II}^2 x_2}.$$

sonders stark bei $CS_2$[1]) und, wie ich fand, noch stärker bei Monobromnaphthalin. In den großen Tabellen[2]) seiner Arbeit benutzt Drude zur Berechnung von $p$ meist die Brechungsexponenten für die Wasserstofflinien $H_\beta$ und $H_\gamma$ oder auch manchmal $H_\beta$ und $H_\varepsilon$, wobei er einmal $k = 0$ setzt („ohne $k$"), das andere Mal den Wert $k$ nach (21) annimmt; eine etwaige fehlerhafte Annahme von $k$ hat wenig Einfluß auf $p$ in diesem Spektralbezirk.[3]) Wie meine Rechnungen für Benzol und Monobromnaphthalin zeigten, hat die Formel (21) für $k$ keine allgemeine Gültigkeit; daher habe ich in den Rechnungen des § 6 $k = 0$ angenommen; $k$ ist sicher für viele der dort in Rechnung gezogenen Substanzen wesentlich von Null verschieden, doch hat es keinen Zweck, die Rechnungen mit $k$ nach (21) durchzuführen, solange die Werte $k$ nicht sicher bekannt sind.

Bezüglich des Wertes $k$ für Schwefelkohlenstoff[4]) (flüssig) ist zu bemerken, daß die Berechnungen von Martens nicht denselben Wert ergaben für $k$ wie die Rechnungen von Ketteler.

Es sollen nun einige Folgerungen für die Änderung der Größen $\lambda_h$, der Elektronenbeweglichkeiten $\vartheta_h$, des Koeffizienten $k$, der den Einfluß der ultraroten Eigenschwingungen darstellt, mit der *Temperatur* angegeben werden.

Drude bemerkt[5]) im Anschluß an seine Formel (35): „Es müßte, da die Ionen- bzw. Elektronenzahl proportional zur Dichte ist, $n^2 - 1$ proportional zur Dichte sein." Dieser Folgerung kann ich mich nicht anschließen, vielmehr fordert die Elektronentheorie *nicht* die Konstanz von $n^2 - 1/d$, denn dann müßten ja die Beweglichkeiten $\vartheta_h$ und die Eigenwellenlängen $\lambda_h$ von der Temperatur und vom Druck unabhängig sein. Aus (8), (14) und (15) folgere ich:

$$(27) \qquad \frac{n^2 - 1}{d} = \frac{1}{H.M} \sum_h \frac{p_h}{\frac{1}{\vartheta_h} - \pi \frac{m_h}{e_h^2 \lambda^2}}.$$

1) P. Drude, l. c. 704.

2) P. Drude, l. c. p. 706—709; einige Werte $p$ für $\lambda = \infty$ vgl. Drude, Tabelle p. 703.

3) P. Drude, l. c. p. 705.

4) Näheres in meiner Dissertation p. 23, 24.

5) Drudes Lehrb. der Optik, 2. Aufl. p. 380. 1906; die Formel (35) bei Drude entspricht der Formel (8) in meiner Arbeit.

$H$, die absolute Masse eines Wasserstoffatoms, ist unveränderlich, ebenso $m_v = m$,[1]) $e_v = e$ für ein Elektron; außerdem ist für die gleiche Substanz M und auch wohl $p_h$[2]) von Temperatur und Druck unabhängig. Die einzige von Temperatur und Druck abhängige Veränderliche wäre hiernach $\vartheta_h$. Da nach (14) $\lambda_h^2$ proportional ist mit $\vartheta_h$, so folgt, daß für eine Elektronengattung ($h$) die Eigenwellenlänge $\lambda_h$ *gleichzeitig* mit der Beweglichkeit $\vartheta_h$ zunimmt oder abnimmt. Über die Änderung von $n^2 - 1/d$ mit der Temperatur liegen sehr viele Beobachtungen vor.[3])

In Tab. 1[4]) meiner Dissertation habe ich gezeigt, daß für verschiedene Flüssigkeiten $n^2 - 1/d$ abnimmt mit steigender Temperatur; diese Rechnungen berechtigen wohl zu dem Schluß, daß für *alle* durchsichtigen Flüssigkeiten $n^2 - 1/d$ abnimmt[5]) mit steigender Temperatur, in dem Intervall von 10—30°, oft auch in größeren Intervallen.[6]) Aus (27) folgt in Verbindung mit den auf (27) folgenden Erörterungen, daß *in diesem Temperaturintervall die Beweglichkeit der Elektronen in durchsichtigen Flüssigkeiten im Mittel abnimmt mit steigender Temperatur* (*bei konstantem Druck*), d. h. die quasielastischen Kräfte nehmen zu.[7]) Gleichzeitig folgt aus diesem Verhalten der Flüssigkeiten, daß in diesem Temperaturintervall[8]) *eine Temperatursteigerung* (*unter konstantem Druck*) *Verschiebung der Absorptionsstreifen* $\lambda_h$ *im Ultraviolett* (*und Ultrarot*) *nach der Seite der kleinen Wellenlängen*

---

1) $m$ ist unveränderlich, solange die Elektronengeschwindigkeit klein ist relativ zur Lichtgeschwindigkeit.

2) Solange nicht Dissoziationen in Betracht kommen.

3) Vgl. meine Dissertation p. 26.

4) Berechnet nach Beobachtungen von Landolt, Wüllner, Weegmann.

5) *Und zwar um so mehr, je kleiner die Wellenlänge ist, entsprechend* (27) *und:*

$$\frac{n'^2 - 1}{d'} - \frac{n^2 - 1}{d} = \frac{1}{H.M} \sum \frac{p_h (\vartheta_h' - \vartheta_h)}{\left(\frac{1}{\vartheta_h} - \pi \cdot \frac{m_h}{e_h^2 \lambda^2}\right)^2 \cdot \vartheta_h^2}.$$

6) Vgl. das Verhalten von $A^2 - 1/d$ für Wasser nach Rühlmann, $n_D^2 - 1/d$ für $CS_2$ nach Ketteler.

7) Gleichung (3).

8) Bei hohen Temperaturen kann eventuell der umgekehrte Fall eintreten.

*bewirkt.* Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß auch bei einigen[1]) Elektronengattungen die Beweglichkeit zunimmt. Meine Schlüsse sind nur gezogen für die Eigenschwingungen der negativen Elektronen im Ultraviolett, eventuell für die positiv geladenen Atomgruppen mit Eigenschwingungen im Ultrarot. Aus (27) kann also kein Schluß auf die Veränderung der Eigenwellenlängen im sichtbaren Spektrum mit der Temperatur gezogen werden, da (27) im sichtbaren Spektrum nicht mehr gilt, wenn intensive Absorption in demselben auftritt, dann muß eben (4) und (5) angewandt werden. Dagegen gilt auch dann noch Formel (14), solange die Reibungskoeffizienten der Elektronengattungen im sichtbaren Spektrum klein sind.[2]) Nach Drude[3]) ist es sehr wahrscheinlich, daß auch die Absorptionsstreifen im sichtbaren Spektrum durch die Eigenschwingungen der negativen Elektronen entstehen. Eine naheliegende Annahme ist die, daß sich die negativen Elektronen mit Eigenschwingungen im sichtbaren Spektrum bezüglich der Änderung der quasielastischen Kräfte und damit auch bezüglich der Verschiebung der Absorptionsstreifen mit der Temperatur qualitativ gerade so verhalten wie die negativen Elektronen mit Eigenschwingungen im Ultraviolett. Zeigen einige Flüssigkeiten das entgegengesetzte Verhalten, nämlich bei Temperatursteigerung Verschiebung der Absorptionsstreifen im sichtbaren Spektrum nach der Seite der längeren Wellen, so widerspricht dies nicht der Dispersionstheorie; zwei Umstände können das Verhalten solcher Flüssigkeiten erklären: Entweder trifft die im vorhergehenden Satze enthaltene willkürliche Annahme nicht zu, oder es muß auch die Veränderlichkeit der Reibungskoeffizienten $r_h$ mit der Temperatur berücksichtigt werden.

Bei festen Körpern ist bei Betrachtung der Änderung von $n^2 - 1/d$ die Reduktion auf das Vakuum notwendig.[4]) Zur Betrachtung der Änderung von $n^2 - 1/d$ für feste Körper mit

1) Etwa bei den ultraroten (Atomgruppen mit positiver Ladung).

2) Vgl. hierzu meinen Aufsatz in den Ann. d. Phys. **28.** p. 595, Anm. 1. 1907.

3) P. Drude, l. c.. p. 724, 725, 958.

4) C. Pulfrich, Wied. Ann. **45.** p. 620—622. 1892.

der Temperatur wähle ich die sehr genauen Versuche von Pulfrich.[1])

$\Delta\mathfrak{N}$ sei die Änderung des absoluten Brechungsexponenten für 1° C. und für eine bestimmte Mitteltemperatur $t$ (meist 50—60°). Bei Gläsern hat die Größe $p_\lambda/H.M$ in (27) keinen Sinn; man setzt dann einfach $d = \text{const.}\ \mathfrak{N}_\lambda$. Für alle diejenigen von Pulfrich untersuchten festen durchsichtigen Körper, bei denen $\Delta\mathfrak{N}$ positiv ist, folgt ohne weitere Rechnung, daß $\mathfrak{N}^2 - 1/d$ zunimmt mit wachsender Temperatur; denn $d$ nimmt ab, und $\mathfrak{N}^2 - 1$ nimmt zu bei positivem $\Delta\mathfrak{N}$.[2]) Für die andern von Pulfrich untersuchten festen Körper, mit negativem $\Delta\mathfrak{N}$, ist folgende Rechnung durchzuführen: es kommt darauf an, das Vorzeichen von

$$\frac{\mathfrak{N}'^2 - 1}{d'} - \frac{\mathfrak{N}^2 - 1}{d}$$

zu bestimmen; $\mathfrak{N}'$ ist der absolute Brechungsexponent für die Temperatur $t + 1$, $\mathfrak{N}$ für $t°$. $d_0$ sei die Dichte bei 0°, $3\alpha$ der kubische Ausdehnungskoeffizient, so daß nunmehr das *Vorzeichen* von

$$\left\{\frac{\mathfrak{N}'^2 - 1}{1 - 3\alpha(t+1)} - \frac{\mathfrak{N}^2 - 1}{1 - 3\alpha t}\right\}\frac{1}{d_0}$$

oder auch von

(27a) $$\omega = 2\mathfrak{N}\Delta\mathfrak{N}(1 - 3\alpha.60) + 3\alpha(\mathfrak{N}^2 - 1)$$

zu bestimmen ist.

Es ergab sich, daß für Steinsalz und Sylvin[3]) $\mathfrak{N}^2 - 1/d$ *zunimmt* mit wachsender Temperatur. Daß $\omega$ und somit

$$\frac{\mathfrak{N}'^2 - 1}{d'} - \frac{\mathfrak{N}^2 - 1}{d}$$

wächst mit abnehmender Wellenlänge für alle von Pulfrich untersuchten festen Körper, kann folgendermaßen gezeigt werden: Nach den Beobachtungen von Pulfrich[4]) nimmt $\Delta\mathfrak{N}$ für feste Körper im algebraischen Sinne *zu* mit abnehmender Wellen-

---

1) C. Pulfrich, l. c. p. 609—665.

2) Also für die Gläser: S. 57, O. 165, O. 544, O. 154, O. 658, O. 211, O. 627 [Schmelznummern]; und für Kalkspat, ord. u. außerord. Strahl, nach Vogel.

3) Ebenso für Flußspat, Kalkspat.

4) C. Pulfrich, l. c. p. 639. Tabelle; auch nach F. J. Micheli, Beibl. 29. p. 445. 1905.

länge, gleichviel ob $\Delta\mathfrak{N}$ positiv oder negativ ist. Ist $\Delta\mathfrak{N}$ positiv, dann nimmt nach (27a) $\omega$ zu mit abnehmender Wellenlänge, da überdies auch noch $\mathfrak{N}$ zunimmt mit abnehmender Wellenlänge. Ist $\Delta\mathfrak{N}$ negativ, dann nimmt ebenfalls $2\mathfrak{N}\Delta\mathfrak{N}$ im algebraischen Sinne zu mit abnehmender Wellenlänge, trotzdem $\mathfrak{N}$ zunimmt; denn $|\Delta\mathfrak{N}|$ nimmt dann stärker ab als $\mathfrak{N}$ zunimmt, z. B. für Quarz, ord. Strahl:

$$\Delta\mathfrak{N}: \; -0{,}649 \cdot 10^{-5} \text{ für } C, \quad -0{,}638 \cdot 10^{-5} \text{ für } D,$$
$$\mathfrak{N}: \quad 1{,}542 \ldots \text{ für } C, \qquad 1{,}544 \ldots \text{ für } D.$$

Die festen Körper zeigen also bezüglich der Änderungen der $\vartheta_h$ und $\lambda_h$ bei Temperaturerhöhung unter konstantem Druck gerade das umgekehrte Verhalten wie die Flüssigkeiten. *Bei den festen Körpern bewirkt eine Temperaturerhöhung unter konstantem Druck im Mittel eine Zunahme der Elektronenbeweglichkeit und eine Verschiebung der Absorptionsstreifen im Ultraviolett (und Ultrarot) nach größeren Wellenlängen.*

Nach (10) ist der den Einfluß der ultraroten Eigenschwingungen darstellende Koeffizient

$$(28) \qquad k = \sum \frac{\mathfrak{N}_r \vartheta_r}{\lambda_r^2} = \sum \frac{\mathfrak{N}_r \vartheta_r e_r^2}{\pi m_r \vartheta_r} = \sum \frac{e_r^2 p_r}{\pi m_r H.\mathsf{M}} \cdot d.^{1})$$

Aus der Elektronentheorie folgt also, daß $k$ sich bei Temperatursteigerung oder Drucksteigerung derart ändert, daß immer Proportionalität zwischen $k$ und der Dichte $d$ besteht, oder:

$$(29) \qquad \frac{\delta k}{k} = \frac{\delta d}{d}.$$

Dabei ist es ganz gleichgültig, ob die Beweglichkeiten $\vartheta_r$ der ultraroten Ionengattungen zu- oder abnehmen bei Temperatursteigerung. Es sei $d = d_0(1 - 3\alpha t)$ oder angenähert: $d_{t+1} = d_t(1 - 3\alpha)$, d. h. $\delta d/d = -3\alpha$ pro $1^0$. Bei Flüssigkeiten wird man bei größeren Temperaturdifferenzen auf die Veränderlichkeit von $k$ Rücksicht nehmen müssen. Es sei etwa $k$ für Wasser bei $0^0$: 0,013414 ($\lambda$ in $\mu$), dann ist nach (29)[2]) $k$ bei $80^0$: $0{,}013414(1 - 0{,}028) = 0{,}013038$.

1) Aus (28) folgt mit (18), (18a) schließlich wieder (20).

2) $\delta k$ braucht nicht unendlich klein zu sein, sondern (29) gilt auch für endliche Werte von $\delta k$.

Es fragt sich nun, ob die Folgerungen aus (27) experimentell bestätigt werden. Pulfrich[1]) kommt zu dem Schlusse, daß das Verhalten durchsichtiger *fester* Körper unter dem Einfluß der Temperatur erklärt werden kann dadurch, daß eine Temperatursteigerung die Absorptionswirkung im blauen und ultrablauen Teile des Spektrums vergrößert; er kann aber nicht entscheiden, „ob nun bei sämtlichen durchsichtigen festen Körpern eine Zunahme der Absorption im Blau bei unveränderter Lage der Mitte des Absorptionsstreifens *oder* ob nur ein einfaches Vorrücken des Absorptionsstreifens in der Richtung vom blauen zum roten Ende des Spektrums stattfindet."[2]) J. O. Reed[3]) hat die Schlußfolgerungen Pulfrichs auch bis zu Temperaturen von ca. 400° bestätigt gefunden. Meine Rechnungen für die von Pulfrich untersuchten festen Körper ließen mit Sicherheit auf eine *Verschiebung* der Absorptionsstreifen nach der Seite der längeren Wellen bei Temperatursteigerung schließen; dagegen war es natürlich nicht möglich, einen Schluß auf die Änderung des Absorptionsvermögens an den einzelnen Stellen des ultravioletten Spektrums zu ziehen.

Die Beobachtungen von J. Koenigsberger[4]) haben das Gesetz ergeben, daß in festen selektiv absorbierenden Körpern steigende Temperatur eine Verschiebung der Absorptionskurven nach größeren Wellenlängen bewirkt. Dieser Satz ist in voller Übereinstimmung mit meinen Schlußfolgerungen für feste Körper.

Außerdem bemerkt J. Koenigsberger:[5]) „Derselbe Satz gilt, wie weitere Beobachtungen ergaben, auch für Flüssigkeiten und für die Absorptionsbanden absorbierender Gase." Auch dies widerspricht nach meinen früheren Erörterungen nicht der Theorie[6]); insbesondere dann, wenn die untersuchten Flüssigkeiten *Lösungen* von Farbstoffen waren, so daß die Absorption durch den in einer durchsichtigen Flüssigkeit gelösten

1) C. Pulfrich, l. c. p. 643, 656.

2) l. c. p. 663.

3) John O. Reed, Wied. Ann. **65**. p. 707—744. 1898.

4) J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. **4**. p. 796—810. 1901 (Freiburger Habilitationsschrift 1900; gedruckt bei Teubner in Leipzig).

5) J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. **4**. p. 805 unten. 1901; die Flüssigkeiten waren wahrscheinlich Lösungen; vgl. Ann. d. Phys. **4**. p. 803. Anm. 2.

6) Vgl. p. 28 der Dissertation.

Farbstoff, also einen bei der betreffenden Temperatur ursprünglich festen Körper, bedingt ist. Von Interesse wären Absorptionsmessungen an durchsichtigen Substanzen im Ultraviolett zur Ermittelung der Änderung von $\lambda_v$ mit der Temperatur; dadurch wäre dann eine direkte Prüfung der Theorie möglich. Der aus (27) für die Änderung der Werte $\lambda_v$ gezogene Schluß ist von größerer Sicherheit als die direkte Berechnung von $\lambda_v$ aus (2), bei der doch immer eine Annahme über die Anzahl der ultravioletten Absorptionsgebiete gemacht wird. Aus den Beobachtungen von F. J. Micheli[1]) für einige Kristalle ergibt sich nach Martens und Micheli[2]), daß für diese Kristalle $\lambda_v$ mit wachsender Temperatur nach der Seite der längeren Wellen rückt, in Übereinstimmung mit meinen Folgerungen aus (27) und (14).

$\frac{n^2-1}{d}$ ist also von der Dichte abhängig, auch $\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{d}$ ist nicht konstant.[3])

W. Voigt[4]) hat schon im Jahre 1901 die Veränderung der optischen Eigenschaften ponderabler Körper durch mechanische und thermische Deformation behandelt auf Grund der Elektronentheorie. Die von ihm benutzte Dispersionsformel[5]) ist nur formal von der von Drude erhaltenen verschieden, da ja die theoretische Grundlage bei beiden dieselbe ist. Insbesondere[6]) ist $k_s$ bei Voigt $= 4\pi(e'_h{}^2/\vartheta_h)$, $h_s = r_h e'_h{}^2$. $\vartheta$ bei Voigt ist $\lambda/2\pi c$. Voigt[7]) gibt zunächst allgemeine Ansätze für die Änderung der Parameter $h_s$ und $k_s$ bei sehr schwachen Einwirkungen einer Deformation auf das optische Verhalten eines Körpers. Aus diesen Ansätzen und aus seiner Formel (5) leitet Voigt die *nach* der Deformation gültige Dispersionsformel[8]) ab und zieht hieraus alle seine Schlußfolgerungen.

---

1) F. J. Micheli, Ann. d. Phys. 7. p. 772—790. 1902.

2) F. F. Martens u. F. J. Micheli, Beibl. 29. p. 445, 446. 1905.

3) Vgl. meine Dissertation p. 34, 35.

4) W. Voigt, Ann. d. Phys. 6. p. 459—505. 1901; vgl. auch F. Pockels, Ann. d. Phys. 7. p. 768—770. 1902.

5) W. Voigt, l. c. p. 461, Formel (5).

6) Gl. (1) bei Voigt p. 460, Gl. (3) meiner Arbeit.

7) W. Voigt, l. c. p. 461.

8) W. Voigt, l. c. p. 462 (11); p. 463 (15); p. 464 (17); p. 478 (46) und (47).

Im IV. Abschnitt seiner Arbeit berücksichtigt er die Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Elektronen und verallgemeinert auf diese Weise die in den drei ersten Abschnitten erhaltenen Resultate. Voigt gibt am Schlusse seiner Abhandlung keine Zusammenfassung der von ihm gefundenen Resultate; ich habe daher die von Voigt gezogenen Schlüsse in meiner Dissertation möglichst kurz zusammengestellt, da es mir darauf ankam, die Hauptfolgerungen aus der Elektronentheorie in bezug auf die Dispersion und Absorption des Lichtes zu zeigen und weil die wichtige Arbeit von Voigt scheinbar nicht genügend Beachtung gefunden hat.[1])

Allerdings lassen sich, wie ich gezeigt habe, mehrere der von W. Voigt gefundenen Resultate einfacher entwickeln, ohne Einführung von neuen Parametern in die an Koeffizienten schon ziemlich reiche Dispersionstheorie.

Im Anschluß an die Voigtsche Arbeit untersuchte Houstoun[2]) den Einfluß der Temperatur auf die *Absorption* des Lichtes in isotropen Körpern. Er bestimmt Extinktionskoeffizienten im sichtbaren Spektrum für sieben farbige Gläser und sieben Lösungen, insbesondere zieht er aus seinen Beobachtungen an zwei Goldrubingläsern den bemerkenswerten Schluß, daß wahrscheinlich die Anzahl der Elektronen pro Masseneinheit mit Eigenschwingungen in dem sichtbaren Spektrum sich beim Erhitzen ändert.[3])

### § 3. Dispersionsmessungen.

Zur Messung der Dispersion von Benzol, $\alpha$-Monobromnaphthalin und Methyljodid im sichtbaren Spektrum habe ich

1) Z. B. P. Drude in der 2. Aufl. seines Lehrb. d. Optik, p. 380, erwähnt gar nicht die Möglichkeit einer Änderung der Beweglichkeiten $\vartheta_k$ mit der Dichte; außerdem fehlt die Voigtsche Erklärung für die Kundtsche Regel, für die Veränderlichkeit der Absorptionsspektra mit der Temperatur in Kaysers Spektroskopie III. Bd. 1905, p. 85 und 99; dagegen ist die Voigtsche Arbeit im II. Bd. von Kaysers Spektroskopie p. 205 erwähnt und in Winkelmanns Handb. 2. Aufl. VI. Bd. p. 1327 (Autor P. Drude). 1906.

2) R. A. Houstoun, Ann. d. Phys. 21. p. 535—573. 1906. Untersuchungen über den Einfluß der Temperatur auf die Absorption des Lichtes in isotropen Körpern. Göttinger Dissertation 1906 (53 Seiten und 2 Tafeln). Vgl. auch meine Dissertation p. 40, Anm. 2.

3) R. A. Houstoun, l. c. p. 565, 573.

die Methode des in sich zurückkehrenden Strahles, die sogenannte Autokollimationsmethode[1]) angewendet. Näheres über die Beobachtungen in der Dissertation p. 40—46.

### § 4. Fehlerquellen und erreichte Genauigkeit bei meinen Dispersionsmessungen.

Zunächst hat die Abbesche Methode einen kleinen prinzipiellen Fehler, der daraus entsteht, daß in Wirklichkeit das Zusammenfallen des Spaltbildes mit dem Spalt nicht direkt beobachtet werden kann, weil der Spalt von dem Reflexionsprisma bedeckt ist. Um zu entscheiden, wie groß der dadurch entstehende Fehler ist, bestimmte ich die Neigung der Lichtstrahlen, die von dem der Fernrohrachse am nächsten liegenden Spaltpunkte kommen, zum Hauptschnitt des Prismas und fand $\varepsilon = 12'$. Es wird also am Teilkreis die Projektion auf den Hauptschnitt gemessen. Für die Brechung der Projektion gilt die Beziehung:

$$n^2 - 1 = (\nu^2 - 1)\cos^2\varepsilon .^2)$$

$n$ sei der wahre, $\nu$ der gemessene Brechungsexponent.

Zu $\nu = 1{,}50000$ gehört $n - \nu = -0{,}5 \cdot 10^{-5}$, zu $\nu = 1{,}70000$ gehört $n - \nu = -0{,}7 \cdot 10^{-5}$. Diese Korrektionen[3]) sind so klein, daß sie bei meinen Messungen nicht in Betracht kommen.

1) Abbe, Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper, Maukes Verlag, Jena 1874 und Czapski, Apparate nach Abbe, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, **9.** p. 361—363. 1889. Die Abbesche Autokollimationsmethode wurde für feste Körper angewandt von C. Pulfrich, Wied. Ann. **45.** p. 609—665. 1892 und von J. O. Reed, Wied. Ann. **65.** p. 707—744. 1898. Die Methode des in sich zurückkehrenden Strahls wurde schon von J. Duboscq 1860 und O. Littrow 1863 verwendet (vgl. Abbe, l. c. p. 4 und Kaysers Spektroskopie **1.** p. 375 Anm. 2, p. 511—513. 1900). Das von mir benutzte Spektrometer wurde gebaut von der Firma C. Zeiss in Jena, das Flüssigkeitshohlprisma war von der Firma Steinheil in München hergestellt worden.

2) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie **1.** Formel (14) § 258. 1900.

3) Über die anderen Korrektionen und über die Anwendung des Pulfrichschen Kriteriums für die Genauigkeit von Dispersionsmessungen an durchsichtigen Substanzen vgl. meine Dissertation p. 47—51.

**§ 5. Konstanten der Kettelerschen Dispersionsformel für Benzol, α-Monobromnaphthalin und Methyljodid; Anwendung der Drudeschen Theorie auf diese drei Substanzen.**

Aus vier Beobachtungspaaren $(n, \lambda)$ erhält man zunächst Näherungswerte für die vier Konstanten[1]), die dann so lange abgeändert wurden, als sich die Gesamtheit der Fehler, d. h. die Summe aller Fehlerquadrate, dadurch zu vermindern schien.[2]) Beispielsweise genügte bei Benzol die Vergrößerung von $a^2$ um 12 Einheiten der fünften Dezimale und die gleichzeitige Verkleinerung von $D$ um $115 . 10^{-5}$, um die Summe der Fehlerquadrate von 110 auf 63 zu reduzieren.[3]) Im folgenden sind für jede der drei Substanzen angegeben die Konstanten $k$, $a^2$, $D$, $\lambda_\varrho$, $\mathfrak{N}_0 \vartheta_0$ und die hieraus berechneten Brechungsexponenten, die Grenzwerte $p$ aus dem sichtbaren Spektrum berechnet und für $\lambda = \infty$, außerdem $p_\varrho$ nach (17), Berechnungen von $k$ aus (20) und (21), $\lambda_r$. Die Wellenlängen der meisten Spektrallinien wurden entnommen aus den Tabellen von Landolt-Börnstein.[4])

A. **Benzol**, $C_6H_6$, $d\frac{18,5}{4} = 0,881$.[5])

$$k = 0,5 . 10^5. \quad a^2 = 2,19028. \quad \lambda_\varrho = 178,96 . 10^{-7}\,\text{cm}.$$

$$\mathfrak{N}_0 \vartheta_0 = \mathfrak{m} - 1 = 0,53072. \quad D = \mathfrak{m}' = 0,65956.$$

$k$ nach (21): $k = 0,296 . 10^8 . 0,881 \cdot \frac{30^2}{(78,06)^2} = 38,52 . 10^5$.

(21) ergibt also für $k$ einen viel zu großen Wert. Man kann aus (21) einen kleineren Wert erhalten, wenn man $v_r$ nicht gleich $v (= 30)$ wählt, sondern kleiner als die Summe der Valenzen im Molekül.[6]) Am Benzol hat Drude die Formel (21) für $k$ nicht geprüft.[7]) Es ist $0,296 . 10^8/\mathfrak{M} . d = 3,33 . 10^5$.

1) $\lambda$ ist in Zentimeter gerechnet; $1\ \mu\mu = 10^{-7}$ cm.

2) E. Ketteler, Wied. Ann. **30**. p. 307. 1887 und Pogg. Ann. **140**. p. 28 oben. 1870.

3) $\delta = n_{\text{ber.}} - n_{\text{beob.}}$ in Einheiten $10^{-5}$.

4) Landolt-Börnsteins Tabellen, 3. Aufl. p. 617, 618. 1905.

5) Beob. und ber. Brechungsexponenten in Tab. 7 der Diss.

6) Eine Andeutung für diese Annahme von $v_r$ ohne weitere Angabe von experimentellen Belegen hierfür macht Drude l. c. p. 728 bei Berechnung eines oberen Grenzwertes der ultraroten Eigenwellenlängen, indem er sagt: „Auch bei Doppelbindungen (Benzol) ist vielleicht $v_r < v$ zu wählen" usw., „weil die Zahl der lose sitzenden Elektronen dann kleiner als $v$ ist."

7) Vgl. Anm. 2 p. 20, außerdem p. 10 der Diss.

$M_r = M$, $p_r = 1$, $v_r = 6$ ergibt $k = 1{,}5 \cdot 10^5$,
$M_r = H$, $p_r = 6$, $v_r = 1$ „ $k = 19{,}9 \cdot 10^5$,
$M_r = CH = 13$, $p_r = 5$, $v_r = 1$ „ $k = 1{,}5 \cdot 10^5$.

Aus diesen Zahlen folgt, daß Formel (21) nur dann mit der Beobachtung übereinstimmt, wenn man an Stelle der Valenzsumme $v$ eine kleinere Zahl, etwa 6, einsetzt. Nimmt man einzelne Atomgruppen mit positiver Ladung schwingend an, dann muß in (20) auch für diese Atomgruppen nicht der ihnen zukommende normale Wert $v_r$ eingesetzt werden, welcher der Valenzsumme der Atomgruppe entspricht, sondern ebenfalls ein kleinerer Wert. Es ist weiter

$$\varepsilon - a^2 = \sum \mathfrak{R}_r \vartheta_r \tag{30}$$

gleich Summe der Dielektrizitätskonstanten der Ionen, deren Eigenschwingungen im Ultrarot liegen. Nimmt man nur ein einziges Absorptionsgebiet im Ultrarot an, dann ist

$$\lambda_r^2 = \frac{\varepsilon - a^2}{k}. \tag{31}$$

$\varepsilon = 2{,}288$ bei $18^0$;[1]) $\lambda_r^2 = \frac{0{,}098}{0{,}5} \cdot 10^{-5}$ oder $\underline{\lambda_r = 14\ \mu}$

ist ein *oberer* Grenzwert für die ultraroten Eigenwellenlängen. $k = 1 \cdot 10^5$ würde $\lambda_r = 9{,}9\ \mu$, $k = 1{,}5 \cdot 10^5$, $\lambda_r = 8{,}1\ \mu$ ergeben. Diese Rechnungen sind in Übereinstimmung mit Beobachtungen von Julius[2]), der Absorptionsmaxima im Ultrarot findet bei 2,2 $\mu$; $\underline{3.21\ \mu}$; 4,30 $\mu$; 6,0; $\underline{8.05}$; 8,98; 9,9; 11,2; $\underline{11{,}9\ \mu}$ und mit Beobachtungen von Rubens und Aschkinass[3]), nach denen Benzol für Wärmestrahlen von sehr großer Wellenlänge (24; 31,6; 51 und 61 $\mu$) in hohem Grade durchlässig ist. Bezüglich der Größe von $\lambda_r$ bestätigt sich die Theorie. Nach Drude[4]) läßt sich auch auf andere Art ein oberer Grenzwert für die ultraroten Eigenwellenlängen eines Stoffes angeben; es ist

$$\lambda_r \leqq \frac{M}{v_r} \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon - n^2}{d}} \tag{32}$$

1) B. B. Turner, Zeitschr. f. physik. Chemie **35**. p. 414. 1900.

2) W. H. Julius, Winkelmanns Handb. der Physik II. 2. p. 239. 1896.

3) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **64**. p. 602—605. 1898; **65**. p. 250. 1898; hierzu H. Rubens, Wied. Ann. **69**. p. 576—588. 1899.

4) P. Drude, l. c. p. 722. 723.

oder genauer:

(32a) $$\lambda_r \gtrless \frac{M}{v_r} . 1{,}84 . 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon - a^2}{d}},$$

woraus für $v_r = 6$ folgt: $\lambda_r \gtrless 8\ \mu$. Es bestätigt sich also hier die von Drude ausgesprochene Vermutung.[1]) Nach Tab. 7 meiner Diss. ist $\lambda_v = 179\ \mu\mu$. Nach J. Pauer[2]) hat das Absorptionsspektrum des Benzols im Ultraviolett Maxima bei 262; 255; 249; 243,5 und 238,5 $\mu\mu$. Der berechnete Wert von $\lambda_v$ ist der Theorie[3]) entsprechend nur ein unterer Grenzwert für die größte ultraviolette Eigenwellenlänge; doch ist dazu zu bemerken, daß die Absorptionsbeobachtungen von Pauer sich nicht bis zur Wellenlänge 179 $\mu\mu$ erstreckten, daß also noch nicht beobachtet ist, ob bei 179 $\mu\mu$ starke Absorption vorhanden ist oder nicht.

$$p_v . \frac{e}{m} = 5{,}95 . 10^7 \text{ nach (17).}$$

Aus Tab. 8 meiner Dissertation folgt, daß $p.e/m$ nicht konstant ist für verschiedene $\lambda$, infolge der Inkonstanz von $d_{ik}/r_i r_k$, also haben nach (26) die Elektronen verschiedene ultraviolette Eigenwellenlängen. $p.e/m$ wächst, wie es ja die Theorie verlangt, mit zunehmender Wellenlänge.

Es war von Interesse, zu sehen, welcher Wert $k$ sich aus den Beobachtungen von H. Th. Simon[4]) ergibt, da die Rechnungen von Martens[5]) mit der *drei*konstantigen Formel (11a) die Beobachtungen von Simon sehr schlecht darstellen; es ergaben sich nämlich bei Martens Differenzen $\delta = n_{\text{ber.}} - n_{\text{beob.}}$ zwischen $-12 . 10^{-4}$ und $+12 . 10^{-4}$. Ich habe aus den Simonschen Beobachtungen ohne weitere Ausgleichung der Konstanten folgende Werte gefunden:

$$k = 4{,}48 . 10^5, \qquad a^2 = 2{,}18792, \qquad \lambda_v = 182{,}261\ \mu\mu$$
$$\mathfrak{N}_0 \vartheta_0 = m - 1 = 0{,}57092, \qquad D = m' = 0{,}61699;^6)$$

der größte vorkommende Wert von $\delta$ beträgt dann $+50 . 10^{-5}$. Die Ausgleichung der Konstanten ergab einen kleineren Wert als $k = 4{,}5 . 10^5$, nämlich

$$k = 1 . 10^5 \text{ cm}^{-2}, \quad a^2 = 2{,}18690, \quad \mathfrak{N}_0 \vartheta_0 = 0{,}56990;$$

1) Vgl. Anm. 1 p. 53 meiner Diss.
2) J. Pauer, Wied. Ann. **61**. p. 363. 1897.
3) P. Drude, l. c. p. 698 oben.
4) H. Th. Simon, Wied. Ann. **53**. p. 542—558. 1894.
5) F. F. Martens, Ann. d. Phys. **6**. p. 603—640. 1901.
6) Beob. und ber. Brechungsexponenten in Tab. 9 meiner Diss.

die anderen Konstanten wurden ungeändert gelassen; es ergeben sich dann Differenzen $\delta$, die nunmehr nur noch bis $34 \cdot 10^{-5}$ ansteigen. Aus meinen Rechnungen für die Simonschen Beobachtungen ($\lambda = 253\,\mu\mu$ bis $768\,\mu\mu$) folgt also, daß $k$ nicht gleich Null gesetzt werden darf.

B. *α*-Monobromnaphthalin, $C_{10}H_7Br$. $d\,\frac{14,75}{4} = 1,487$.

$k = 6,91 \cdot 10^5$. $a^2 = 2,62920$. $\lambda_v = 236,367 \cdot 10^{-7}$ cm.

$\mathfrak{N}_0 \vartheta_0 = m - 1 = 0,96049$. $D = m' = 0,66871$.[1])

$k$ nach (21): $k = 23,66 \cdot 10^5$. Dieser Wert ist, analog wie bei Benzol, viel größer als der aus der Beobachtung erhaltene. Setzt man in (21) anstatt $v = 48$ die Zahl $v_r = 26$ ein, dann wird $k = 6,94 \cdot 10^6$, oder etwa:

$$\left.\begin{array}{l} M_r = \quad H = 1, \quad p_r = 3, \; v_r = 1\colon \; k = 6,4 \cdot 10^5 \\ M_r = CH = 13, \; p_r = 7, \; v_r = 2\colon \; k = 4,6 \cdot 10^5 \end{array}\right\} \text{ nach (20)}$$

$$p_r \cdot \frac{e}{m} = 5,43 \cdot 10^7 \text{ nach (17)}.$$

Aus (26) und Tab. 11 meiner Diss. folgt wieder, daß die Elektronen verschiedene ultraviolette Eigenwellenlängen haben; $p \cdot e/m$ wächst, der Theorie entsprechend, mit wachsender Wellenlänge. Es ist $\varepsilon = 5,17$.[2]) Aus (31) folgt analog wie bei Benzol:

$$\lambda_r^2 = \frac{5,17 - 2,63}{6,91} \cdot 10^{-5}, \quad \lambda_r = \underline{20\,\mu},$$

aus (32a) mit $v_r = 26$: $\lambda_r \gtrless 19\,\mu$. Im Ultrarot liegen für Bromnaphthalin keine Absorptionsmessungen vor. Der aus meinen Dispersionsmessungen berechnete Wert $\lambda_v = 236,4\,\mu\mu$ stimmt mit dem von Martens bei 228 und 232 $\mu\mu$ beobachteten Reflexionsmaximum gut überein.

C. Methyljodid, $CH_3J$, $d\,\frac{14,7}{4} = 2,280$.

$k = 2,0 \cdot 10^5$. $a^2 = 2,28129$. $\lambda_v = 174,73 \cdot 10^{-7}$ cm.

$\mathfrak{N}_0 \vartheta_0 = m - 1 = 0,50665$. $D = m' = 0,77464$.[3])

$k$ nach (21): $k = 2,15 \cdot 10^5$.

1) Beob. und ber. Brechungsexponenten in Tab. 10 meiner Diss.
2) Bei 19° nach Turner, l. c. p. 428.
3) Beob. und ber. Brechungsexponenten in Tab. 12 der Diss.

Formel (21) trifft also bei Methyljodid zu, soweit sich dies aus meinen nur im sichtbaren Spektrum vorgenommenen Dispersionsmessungen entscheiden läßt.[1]) Es ist $s = 7{,}1$.[2]) Aus (31) folgt, analog wie bei Benzol:

$$\lambda_r^2 = \frac{7{,}1 - 2{,}28}{2} \cdot 10^{-5}; \quad \underline{\lambda_r \gtrless 49\,\mu}.$$

Aus (32a) folgt für $v_r = 8$: $\lambda_r \gtrless 47\,\mu$.

Ausgedehnte Absorptionsmessungen im Ultrarot liegen vor von M. Ikle[3]), der als stärkstes Absorptionsmaximum 7,47 bis 8,06 $\mu$ findet. Für das ultraviolette Spektrum liegen Angaben nicht vor.

$$p_v \cdot \frac{e}{m} = 5{,}15 \cdot 10^7 \text{ nach (17)}.$$

Aus (26) und Tab. 13 der Diss. folgt wieder, daß die Elektronen verschiedene ultraviolette Eigenwellenlängen haben; $p.e/m$ wächst, der Theorie entsprechend, mit wachsender Wellenlänge.

Aus meinen Messungen folgen schließlich für die drei untersuchten Flüssigkeiten folgende Grenzwerte für $p.e/m \cdot 10^{-7}$ für das Intervall $H_\gamma H_\beta$[4]), wobei $k = 0$ gesetzt wurde[5]):

| | | berechnet durch Addition[6]) |
|---|---|---|
| Benzol, $C_6H_6$ . . . . . | 16,87 | 16,2 |
| $\alpha$-Monobromnaphthalin, $C_{10}H_7Br$ . . . | 22,82 | 27,0 |
| Methyljodid, $CH_3J$ . . . . . | 12,35 | 11,9 |

Für Benzol und Methyljodid stimmt der beobachtete Wert $p.e/m$ mit dem berechneten ebensogut überein, wie in den Drudeschen Tabellen p. 706—709. Benutzt man $k$ nach (21), dann sind die Verhältnisse ähnlich. Für $\alpha$-Monobromnaphthalin ist keine Übereinstimmung vorhanden.[7]) Die Gründe

1) Welche Verschiebungen die vier Konstanten von (2) erfahren können, wenn man sich auf kleinere Intervalle beschränkt, zeigt deutlich das von E. Ketteler, Wied. Ann. **30**. p. 316. 1887 gegebene Beispiel.

2) Für 20,4° nach Turner, l. c. p. 428.

3) Kaysers Spektroskopie **3**. p. 533. 1905.

4) Mitte dieses Intervalls ist 460 $\mu\mu$; die Werte sind durch Interpolation erhalten.

5) Vgl. p. 23 der Diss.

6) Aus der von Drude l. c. p. 717 gegebenen Tabelle.

7) Aus Beobachtungen von B. Walter (Wied. Ann. **42**. p. 511, 512. 1891) berechne ich $p.e/m \cdot 10^{-7} = 22{,}6$ (für $k = 0$) in Übereinstimmung mit meinen Beobachtungen.

hierfür sind die folgenden: Infolge der großen ultravioletten Eigenwellenlänge wächst $p.e/m$ rasch mit zunehmender Wellenlänge; dadurch wird eine mangelhafte Übereinstimmung leicht möglich. Außerdem wurde der Wert von $p.e/m.10^{-7}$ für Brom in Benzolderivaten von Drude nur aus einer Substanz abgeleitet (Brombenzol); für Brombenzol muß natürlich dementsprechend in den Drudeschen Tabellen die Beobachtung mit der Rechnung stimmen. Drude hat auch nur wenige Benzolderivate in den Kreis seiner Rechnungen gezogen und hat bei Naphthalin das Intervall $D$ bis $H_\beta$ zur Berechnung von $p.e/m$ benutzt, wodurch dieser Wert zu groß wird relativ zu den anderen. Daher habe ich in § 6 für eine größere Anzahl von Benzolderivaten die Drudeschen Rechnungen weitergeführt.

Die Werte von $p$ für $\lambda = \infty$ sind: bei Benzol 12,9 [$v = 30$], bei $\alpha$-Monobromnaphthalin 21,5 [$v = 48$], bei Methyljodid 9,4 [$v = 8$].[1]) Also auch für $\lambda = \infty$ ist bei den Benzolderivaten $p$ immer noch erheblich kleiner als die Valenzsumme, während bei dem ein Atom Jod enthaltenen Methyljodid $p$ größer als die Valenzsumme ist.

Für $p_v.e/m$ wurden die folgenden Werte erhalten: bei Benzol $5{,}95.10^7$, bei $\alpha$-Monobromnaphthalin $5{,}43.10^7$, und bei Methyljodid $5{,}15.10^7$. Diese drei Werte sind sehr wenig voneinander verschieden und zeigen den Einfluß der chemischen Konstitution fast gar nicht im Gegensatz zu den Werten $p.e/m$. Der Berechnung der Werte $p_v$ liegt eine willkürliche Voraussetzung zugrunde[2]), während die Berechnung der Zahlen $p$ nach (24) von einer solchen Voraussetzung frei ist. Es werden daher beim weiteren Ausbau der Drudeschen Theorie wohl nur die Werte $p$ in Betracht kommen, zu deren Berechnung die Konstanten der Dispersionsformel und die Anzahl der Absorptionsgebiete im Ultraviolett nicht bekannt zu sein brauchen. Der zur Berechnung der Größen $r$ nach (23) nötige Koeffizient $k$ der Dispersionsformel (2) kann zum Zwecke der Berechnung von $p$ im blauen Ende des sichtbaren Spektrums näherungsweise gleich Null gesetzt werden.[3])

1) $e/m = 1{,}5.10^7$ angenommen.
2) Vgl. Formel (17) und Formel (2).
3) Vgl. p. 23 meiner Diss.

**§ 6. Neuberechnung von $p.e/m$ nach Beobachtungen von Landolt, Brühl und anderen. Neuberechnung von $p.e/m$ für die einzelnen Atomgruppen. Einfluß einer doppelten Bindung zwischen zwei Kohlenstoffatomen, Einfluß einer dreifachen Bindung. Abhängigkeit des Grenzwertes $p$ von der Temperatur.**

Die Tab. 14 meiner Diss. gibt die Resultate meiner Rechnungen für eine große Anzahl von organischen Verbindungen; in der vorstehenden Tab. 1 habe ich nur einen kurzen Auszug aus dieser Tabelle mitgeteilt. Für ca. 120 Substanzen wurden von mir die Rechnungen neu ausgeführt und auch für die Mehrzahl der schon von Drude untersuchten Flüssigkeiten die Berechnung wiederholt.[1]) Bezüglich der Gase verweise ich auf die von Drude gegebene Tabelle.[2]) Die Einrichtung meiner Tabelle ist die folgende: In der ersten Kolumne ist außer dem Namen der Substanz noch die chemische Formel angegeben, in den anderen Kolumnen folgen der Reihe nach Molekulargewicht (O = 16,00), Dichte und Valenzsumme, $p.e/m.10^{-7}$ (für $k = 0$), wie es von Drude berechnet wurde[3]), mit Angabe des zugehörigen Beobachters, dann die von mir aus den Beobachtungen berechneten Werte $p.e/m.10^{-7}$ (für $k = 0$), dann die aus meinen neuen Zahlen für die Atomgruppen (Tab. 2) durch Addition erhaltenen $p.e/m.10^{-7}$, dann $p$, hierauf der Name des Beobachters. In der letzten Kolumne habe ich mitunter Werte $p.e/m.10^{-7}$ angegeben, wie ich sie aus anderen Beobachtungen berechnete. Die Zahlen sind fast ausnahmslos aus den Brechungsexponenten für $H_\beta$ und $H_\gamma$ berechnet; die mit * bezeichneten Werte wurden erhalten aus den Brechungsexponenten für $D$ und $F = H_\beta$.

Die Abkürzungen für die Namen der Beobachter bedeuten:

Ld. Landolt, Ld. J. Landolt u. Jahn, Br. Brühl, Wg. Weegmann, Hg. Haagen, Nsn. Nasini u. Bernheimer, Schr. Schrauf, J. M. Jahn u. Möller, A. Abati, W. Walter, Mr. Martens, Sch. Scheel, Ke. Ketteler, L. Lorenz.

Die hierbei in Betracht kommenden Abhandlungen sind in der Dissertation angegeben.

1) Hierbei ergaben sich bei einigen Substanzen Druckfehler (oder Rechenfehler) in den Drudeschen Tabellen p. 706—709.

2) P. Drude, l. c. p. 714.

3) P. Drude, l. c. p. 706—709: „$p.e/m$ beobachtet ohne $k$".

Tabelle 1.

| I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Substanz | M | $d$ | $v$ | $p.e/m.10^{-7}$ aus d. Tabelle von Drude („ohne $k$“) | Beobachter | $p.e/m.10^{-7}$ beobachtet, $k=0$ gesetzt | $p.e/m.10^{-7}$ berechnet aus Tab. 15 | $p$ für $e/m=1{,}5.10^{7}$ | Beobachter | $p.e/m.10^{-7}$ nach anderen Beobachtern ($k=0$) | |
| Isoamylalkohol, $C_5H_{11}OH$ | 88,1 | 0,8123 | 34 | 32,6 | Ld. | 32,84 | 33,96 | 21,9 | Ld. | 34,15 | Br. |
| Trimethylcarbinol, $(CH_3)_3C.OH$ | 74,1 | 0,7864 | 28 | — | — | 28,17 | 28,31 | 18,8 | Br. | — | |
| Methylhexylcarbinol, $CH_3CHOHC_6H_{13}$ | 130,2 | 0,8193 | 52 | — | — | 50,6 | 50,91 | 33,7 | Br. | — | |
| Glycerin, $C_3H_5(OH)_3$ | 92,1 | 1,2590 | 26 | 28,4 | Ld. | 28,23 | 27,68 | 18,8 | Ld. | — | |
| Buttersäure, norm., $C_3H_7COOH$ | 88,1 | 0,9594 | 28 | 27,0 | Ld. | 26,91 | 27,12 | 17,9 | Ld. | 26,46 | Br. |
| Isobuttersäure, $C_3H_7COOH$ | 88,1 | 0,9490 | 28 | — | — | 28,63 | 27,12 | 19,1 | Br. | — | |
| Isovaleriansäure, $C_4H_9COOH$ | 102,1 | 0,9298 | 34 | 31,2 | Ld. | 32,18 | 32,77 | 21,4 | Ld. | — | |
| Milchsäure, $CH_3.CHOHCOOH$ | 90,1 | 1,2403 | 24 | — | — | 23,67 | 23,98 | 15,8 | Ld. | — | |
| Essigsäureanhydrid, $O(CO.CH_3)_2$ | 102,1 | 1,0816 | 28 | — | — | 26,71 | 26,95 | 17,8 | Ld. | — | |
| Isoamylformiat, $HCOOC_5H_{11}$ | 116,1 | 0,875 | 40 | — | — | 39,56 | 39,44 | 26,4 | Ld. | 37,17 | Ld. |
| Äthylbutyrat, $C_3H_7COOC_2H_5$ | 116,1 | 0,8892 | 40 | 39,7 | Ld. | 39,49 | 39,44 | 26,3 | Ld. | — | |
| Amylvalerat, $C_4H_9COOC_5H_{11}$ | 172,2 | 0,8568 | 64 | — | — | 62,03 | 62,04 | 41,8 | Ld. | — | |
| Triäthylcitrat, $C_{12}H_{20}O_7$ | 276,2 | 1,1369 | 82 | — | — | 76,33 | 80,53 | 50,9 | Br. | — | |
| Trichloressigester, $Cl_3C.COOC_2H_5$ | 191,4 | 1,3826 | 28 | — | — | 42,20 | 42,09 | 28,1 | Br. | — | |
| Methylhexylketon, $CH_3.CO.C_6H_{13}$ | 128,2 | 0,8185 | 50 | — | — | 46,64 | 47,21 | 31,1 | Br. | — | |
| Isoamylaldehyd (Valeral) $C_4H_9.COH$ | 86,1 | 0,799 | 32 | — | — | 30,63 | 30,26 | 20,4 | Ld. | 30,93 | Ld. |
| Propionyl-Chlorid, $C_2H_5.COCl$ | 92,5 | 1,0646 | 20 | — | — | 22,55 | 23,61 | 15,0 | Br. | — | |
| Amylchlorid, $C_5H_{11}Cl$ | 106,6 | 0,872 | 32 | — | — | 36,6 | 36,10 | 24,4 | J. M. | — | |
| Äthylbromid, $C_2H_5Br$ | 109,0 | 1,460 | 14 | — | — | 18,33 | 18,82 | 12,2 | Hg. | 18,56 | Wg. |
| Amylbromid, $C_5H_{11}Br$ | 151,1 | 1,2214 | 32 | — | — | 35,04 | 35,77 | 23,4 | J. M. | 30,2 | Hg. |
| Butyljodid, norm., $C_4H_9J$ | 183,9 | 1,6166 | 26 | — | — | 26,26 | 27,93 | 17,5 | Br. | — | |
| Dekan, $C_{10}H_{22}$ | 142,2 | 0,728 | 62 | — | — | 62,0 | 59,7 | 41,8 | Ld. J. | — | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aconitsaures Athyl, $C_{12}H_{18}O_6$ | = | 258,2 | 1,1064 | 78 | — | — | 56,3 | 69,79 | 37,5 | Br. | — |
| Tribromäthylen, $HBrC=CBr_2$ | = | 264,9 | 2,6876 | 12 | 23,7 | Wg. | 23,63 | 19,23 | 15,7 | Wg. | — |
| Propargylalkohol, $HC\equiv C.CH_2OH$ | = | 56,0 | 0,9715 | 18 | — | — | 14,92 | 14,44 | 9,9 | Br. | — |
| Cymol, $C_6H_4.CH_3.C_3H_7$ | | 134,1 | 0,8619 | 54 | — | — | 34,43 | 33,19 | 22,9 | Ld. J. | 36,14 Br. |
| Benzylchlorid, $C_6H_5CH_2Cl$ | | 126,5 | 1,1138 | 36 | — | — | 23,78 | 23,21 | 15,5 | J. M. | — |
| Chlortoluol, $C_6H_4.Cl.CH_3$ | | 126,5 | 1,0841 | 36 | — | — | 24,13 | 25,25 | 16,1 | J. M. | — |
| Brombenzol, $C_6H_5Br$ | | 157,0 | 1,5084 | 30 | 22,0 | Br. | 21,3 | 21,01 | 14,2 | J. M. | 21,87 Br. |
| Naphthalin, $C_{10}H_8$ | | 128,1 | 0,9621 | 48 | 21,0* | Nsn. | 20,92* | 17,01 | 13,9 | Nsn. | — |
| Methyl-$\alpha$-Naphthol, $C_{10}H_6.CH_3.OH$ | | 158,1 | 1,0964 | 56 | — | — | 21,46 | 22,85 | 14,3 | Nsn. | — |
| Styrol, $C_6H_5.HC\ CH_2$ | = | 104,1 | 0,9074 | 40 | — | — | 17,51 | 17,87 | 11,7 | Br. | — |
| Siliciumbromid, $SiBr_4$ | | 348,2 | 2,7722 | 8 | — | — | 32,89 | Si: 8,71 | 21,6 | A. | — |
| Siliciumtetraäthyl, $Si(C_2H_5)_4$ | | 144,6 | 0,7682 | 56 | — | — | 51,74 | Si: 0,14 | 34,5 | A. | 51,54 A. |
| Siliciumchlorid, $SiCl_4$ | | 170,2 | 1,4756 | 8 | — | — | 30,97 | Si: 5,97 | 20,6 | A. | — |
| Tetramethylsilicat, $Si(OCH_3)_4$ | | 152,5 | 1,0280 | 40 | — | — | 44,88 | Si: 7,39 | 29,9 | A. | — |
| Tetrapropylsilicat, $Si(OC_3H_7)_4$ | | 264,7 | 0,9158 | 88 | — | — | 91,28 | Si: 8,59 | 60,8 | A. | — |
| Hexapropyldisilicat, $Si_2O(OC_3H_7)_6$ | | 427,2 | 0,9769 | 136 | — | — | 135,8 | Si: 4,86 | 90,5 | A. | — |
| **Diamant, C** | | 12,0 | 3,52 | 4 | 4,7 | Schr. | 4,09 | — | 2,7 | W. | — |
| **Diamant, C** | | 12,0 | 3,52 | 4 | — | — | 3,94 | — | 2,6 | Mr. | 4,11 für $\lambda = \infty$ |
| Triäthylamin, $(C_2H_5)_3N$ | | 101,2 | 0,7277 | 42 | — | — | 35,00 | N: −3,7 | 23,3 | Br. | — |
| Diäthylamin, $H(C_2H_5)_2N$ | | 73,1 | 0,7108 | 30 | — | — | 26,38 | N: −1,02 | 17,6 | Br. | — |
| Propylamin, $C_3H_7.NH_2$ | | 59,1 | 0,7209 | 24 | — | — | 22,05 | N: 0,80 | 14,7 | Br. | — |
| Hydroxylamin, $NH_2.OH$ | | 33,1 | 1,2044 | 8 | — | — | 8,29 | N: 0,98 | 5,5 | Br. | — |
| Formamid, $NH_2.COH$ | | 45,1 | 1,1318 | 12 | — | — | 9,20 | N: −0,06 | 6,1 | Br. | — |
| $\beta$-Methylhydroxylamin, $NCH_3.H.OH$ | | 47,1 | 1,0003 | 14 | — | — | 13,84 | N: 0,88 | 9,2 | Br. | — |
| **Wasserstoff (Gas), $H_2$, 436 u. 668 $\mu\mu$** | | 2,02 | 0,0000 8985 | 2 | 2,98 | Ke. | 2,83 | — | 1,9 | Sch. | 2,13 $\left(\frac{-188^\circ \text{ u.}}{759 \text{ mm}}\right)$ |
| **Stickstoff (Gas), $N_2$, 436 u. 668 $\mu\mu$** | | 28,03 | 0,00 12505 | 6 | 7,13 | L. | 6,70 | — | 4,5 | Sch. | 7,62 $\left(\frac{-192^\circ \text{ u.}}{771 \text{ mm}}\right)$ |

J. W. Brühl hat für zahlreiche Stickstoffverbindungen die Dispersion gemessen (über 200 Stickstoffverbindungen; vgl. Zeitschr. f. physik. Chem. **16**. p. 214—219. 1895 und **22**. p. 381 bis 391. 1897), doch habe ich vorläufig nur für sechs stickstoffhaltige Methanderivate und drei stickstoffhaltige Benzolderivate die Grenzwerte $p$ berechnet. Schon diese ergaben ein bemerkenswertes Resultat.

Aus den in Kolumne VII, Tab. 14 der Dissertation unter „$p.e/m.10^{-7}$ beob." angegebenen Zahlen habe ich, ähnlich wie es Brühl[1]) für die Atomrefraktion und Atomdispersion getan hat, die den einzelnen Atomen zukommenden Werte für $p$ abgeleitet und die Konstanten für den Einfluß einer Doppelbindung usw. Die folgende Tab. 2 gibt das Resultat:

Tabelle 2.

$p.e/m.10^{-7}$ für verschiedene Atome bzw. Atomgruppen, Einfluß von mehrfachen Bindungen zwischen C-Atomen auf die Werte $p.e/m.10^{-7}$.

| In Methanderivaten oder in Benzolderivaten direkt am Benzolkern | | | |
|---|---|---|---|
| $CH_3$ | 5,65 | Cl | 6,25 |
| O″ Carbonylsauerstoff | 2,01 | Br | 5,92 |
| O′ Hydroxylsauerstoff | 2,51 | J | 3,73 |
| O< Estersauerstoff | 3,53 | F | 2,21 |
| O in Äthern | 2,11 | Benzolring | − 7,61 |
| H | 1,60 | 1 Kohlenstoffdoppelbindung = | − 5,03 |
| C | 2,45 | 2 Doppelbindungen = = | − 6,10 |
| C=O | 4,46 | 1 Acetylenbindung ≡ | − 1,82 |
| OH | 4,11 | Naphthalindoppelring | −20,29 |
| $C\lessdot^{O}_{O-}$ | 7,99 | | |

| In Benzolderivaten für Atome, die nicht direkt am Benzolkern ($C_6$) sitzen | |
|---|---|
| H | 1,02 |
| C | 2,30 |
| OH | 1,84 |
| Cl | 3,63 |
| O″ + O< | 2,36 |

O″ ist der Sauerstoff in der Gruppe C=O, O< in der Gruppe $C\lessdot^{O}_{O-C}$, die in den Estern vorkommt; der Sauer-

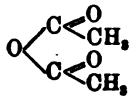
1) J. W. Brühl, Zeitschr. f. physik. Chem. **7**. p. 140—198. 1891.

stoff in Äthern ist wohl ebenfalls an zwei C-Atome gebunden, das eine dieser C-Atome ist dann aber nicht an O″ gebunden.

Beispiel[1]) für die Berechnung von $p.e/m.10^{-7}$ nach Tab. 2.

Essigsäureanhydrid, $C_4H_6O_3$:

$p.e/m.10^{-7}$ ber. = 4,90 + 9,6 + 8,92 + 3,53 = 26,95.



Aus den Si-haltigen Verbindungen ergeben sich für Si ($v = 4$) Werte $p.e/m.10^{-7}$ von 0,14 bis 8,59[2]), also $p$ von 0,1 bis 5,9; *Mittel aus 6 Werten* $p = 4$.

Für *Stickstoff* ergeben sich mit Benutzung der Werte aus Tab. 2[3]) mitunter negative Werte für $p.e/m$[4]), die keine physikalische Bedeutung haben; doch zeigen diese Werte einen bestimmten Gang, woraus man schließen kann, daß beim Eintritt von Stickstoff in das Molekül[5]) die Werte $p$ für C, (H), O... sich ändern. $p.e/m.10^{-7}$ hat nach einer vorläufigen Berechnung aus fünf Substanzen den Wert 4,49 für die Gruppe $CH_2$. Läßt man $p.e/m.10^{-7}$ für H ungeändert 1,6, dann ergeben sich folgende Zahlen für $p.e/m.10^{-7}$:

C: 1,29; C=O: 0,85; OH: 2,07; N: 3,55.[6])

Die hiermit berechneten Zahlen sind:

Triäthylamin 35,29; Diäthylamin 26,31; Propylamin 21,82; Hydroxylamin 8,82; Formamid 9,20; $\beta$-Methylhydroxylamin 13,31. Dieses Verhalten der stickstoffhaltigen Verbindungen ist ein Beweis dafür, in welch hohem Grade die Grenzwerte $p$ von der Konstitution beeinflußt werden.

Das Verhalten von Substanzen mit einer *Doppelbindung* war von Drude noch nicht untersucht worden. Allerdings befindet sich in den Tabellen bei Drude, l. c. p. 706—709 eine Substanz mit einer Kohlenstoffdoppelbindung, das Tribromäthylen, $C_2HBr_3$. Daß dieses eine Doppelbindung besitzt, hat

---

1) Weitere Beispiele in der Diss. p. 74.

2) Auch die Atomrefraktion des Siliciums ist nach Abati sehr variabel.

3) Auch mit den von Drude, l. c. p. 717 angegebenen Zahlen.

4) Vgl. Kolumne VIII in Tab. 14 meiner Diss.

5) Auch in N-haltigen Benzolderivaten.

6) Den gleichen Wert fand Drude l. c. p. 714 für gasförmigen Stickstoff.

Drude jedenfalls übersehen. Drude nimmt bei den Benzolderivaten die Benzolformel von Kekulé[1]) an und fährt dann fort: *„p wird durch vorhandene Doppelbindungen kleiner.“* Da aber verschiedene Theorien für die Struktur des Benzols existieren[2]), so war es nötig, diesen Satz besonders zu beweisen. Meine Rechnungen für Substanzen, bei denen man sogenannte Doppelbindungen als sicher vorhanden annimmt[3]), haben nun tatsächlich gezeigt, daß die doppelte Bindung zwischen zwei Kohlenstoffatomen qualitativ denselben Einfluß hat wie die besondere Art der Bindung im Benzolringe. Auch quantitativ lassen sich die Werte $p$ gut darstellen. Bei einigen Substanzen mit Doppelbindungen und bei einigen Benzolderivaten ist die Übereinstimmung zwischen „$p \cdot e/m$ beob.“ und „$p \cdot e/m$ ber.“ schlecht, so beim crotonsauren Äthyl, aconitsauren Äthyl, Tribromäthylen, Acetylendibromid, Thymol, Methylsalicylsäure und einigen anderen (vgl. Tab. 14 der Dissertation). Doch zeigen verschiedene dieser Substanzen besondere konstitutive Eigenschaften.[4])

Außerdem zeigen ja die in Tabelle 1 mehrfach vorkommenden Beispiele, wie verschieden oft die Werte $p$ nach verschiedenen Beobachtern ausfallen trotz Benutzung des gleichen Intervalles $H_\gamma$ bis $H_\beta$, insbesondere beim Hexylen, beim Isoamylformiat (zwei verschiedene Präparate nach Landolt), beim Amylen, beim Cymol. Die bei einigen Methanderivaten vorkommenden größeren Abweichungen erklären sich wohl alle durch geringe Verunreinigungen der Substanzen oder durch Beobachtungsfehler in der Messung der Dispersion. Der Einfluß von Beobachtungsfehlern[5]) bei $n$ ist für die Berechnung von $p$ nach (24) folgender:

Es ist für $k = 0$:

$$(33) \qquad p \cdot \frac{e}{m} = 3{,}26 \cdot 10^{-4} \frac{M}{d} \left( \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \frac{(n_1^2 - 1)(n_2^2 - 1)}{n_1^2 - n_2^2}.$$

1) P. Drude, l. c. p. 715: „Benzol hat drei, Naphthalin sechs Doppelbindungen.“ Naphthalin hätte übrigens nur *fünf* Doppelbindungen.

2) In dem Lehrbuch der organ. Chemie von A. F. Holleman, 4. Aufl. p. 304—309. 1905 sind drei Benzolformeln erwähnt, die von Baeyer, Kekulé und Thiele.

3) A. F. Holleman, l. c. p. 129—132, 136 unten, 143—147.

4) Vgl. meine Dissertation p. 76.

5) Der Einfluß eines Fehlers in der Dichte $d$ ist leicht zu beurteilen:

*Für das Intervall $H_\gamma H_\beta$* ist

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} = 1{,}07630 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-2},$$

und

$$(34)\quad \delta\left(p.\frac{e}{m}\right) = 3{,}51.10^{+4}\frac{M}{d}\left\{-\frac{1}{2}\frac{(n_2^2-1)^2}{(n_1-n_2)^2}\frac{\delta n_1}{n} + \frac{1}{2}\frac{(n_1^2-1)^2}{(n_1-n_2)^2}\frac{\delta n_2}{n}\right\}.$$

Ist im günstigsten Falle $\delta n_1 = \delta n_2$, also die Dispersion $n_1 - n_2$ richtig, aber die absoluten Werte $n_1$, $n_2$ um den gleichen Betrag falsch, dann ist angenähert

$$(35)\quad \delta\left(p.\frac{e}{m}\right) = 3{,}51 \cdot 10^{+4}\frac{M}{d} \cdot 2 \cdot \frac{(n^2-1)}{n_1-n_2}\delta n.$$

Zur Beurteilung der Unsicherheit des Wertes $p.e/m$ ist die Annahme des ungünstigsten Falles nötig $\delta n_1 = -\delta n_2$ (dies zur Vereinfachung, im allgemeinen wird $|\delta n_1|$ von $|\delta n_2|$ verschieden sein). Unter dieser Annahme wird

$$(36)\quad \delta\left(p.\frac{e}{m}\right) = 3{,}51 \cdot 10^{+4}\frac{M}{d}\frac{(n^2-1)^2}{(n_1-n_2)^2}\frac{\delta n}{n}.$$

Ist beispielsweise $\delta n_2$ positiv und $\delta n_1$ negativ $= -\delta n_2$, also die Dispersion zu klein, dann ist $\delta(p.e/m)$ positiv.

1. Beispiel[1]): Acetylendibromid nach Weegmann[2]) bei 10°:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1{,}57173 \\ n_2 &= 1{,}56160 \end{aligned}\right\} n_1 - n_2 = 10^{-2}; \quad \frac{M}{d} = 82{,}6.$$

Aus (35) folgt für $\delta n = 10^{-5}$:

$$\delta(p.e/m) = 0{,}0008 \cdot 10^7,$$

dagegen aus (36) für $\delta n = \delta n_2 = 10^{-5} = -\delta n_1$:

$$\delta(p.e/m) = 0{,}04 \cdot 10^7;$$

hierbei ist also $\delta(n_1 - n_2) = -2 \cdot 10^{-5}$.

Drude bemerkt[3]): „Innerhalb 0° bis 20° variiert $p.e/m$ nicht merklich mit der Temperatur." Ich untersuchte daher die Veränderung von $p.e/m$ mit der Temperatur für sieben Flüssigkeiten[4]) und fand[5]) folgendes:

---

1) Zwei weitere Beispiele in meiner Dissertation p. 78, 79.
2) Weegmann, Zeitschr. f. physik. Chem. 2. p. 236. 1888.
3) P. Drude, l. c. p. 707. Anm. 1.
4) Angabe des Beobachtungsmaterials in der Dissertation.
5) Vgl. die Dissertation p. 79.

Bei drei Flüssigkeiten (Schwefelkohlenstoff, Äthylenchlorid, Anilin) bleibt $p.e/m$ ungeändert bei Steigerung der Temperatur von $10^0$ auf $20^0$, bei *Benzol*, *Wasser*, Äthylenbromid nimmt $p.e/m$ ein wenig zu, bei Acetylendibromid ab; doch können diese Veränderungen eventuell durch kleine Beobachtungsfehler verursacht sein.[1]) Man kann also innerhalb der gewöhnlich vorkommenden Temperaturen ($10^0$—$30^0$) die Werte $p.e/m$ für dieselbe Substanz als konstant annehmen; jedenfalls ist der Einfluß von geringen Verunreinigungen der Substanz viel größer als der Einfluß einer Temperatursteigerung um $20^0$.

Endlich habe ich die Beobachtungen von Walter[2]) und von Martens[3]) über die Dispersion des Diamanten zur Neuberechnung des Grenzwertes für die Zahl schwingungsfähiger Elektronen pro Kohlenstoffatom verwendet.[4]) Die Dichte $d = 3{,}52$ habe ich angenommen nach Landolt-Börnsteins Tabellen.[5])

Aus den Beobachtungen von Walter berechne ich ($k = 0$ angenommen) $p.e/m.10^{-7}$ im Mittel 4,09, nämlich $4{,}09_8$ ($H_\varepsilon$ und $H_\beta$); $4{,}09_7$ ($H_\beta$ und $D$); $4{,}07_5$ ($D$ und $H_\alpha$); aus den Beobachtungen von Martens: im Mittel 3,94, nämlich $3{,}87_3$ (313 und 361 $\mu\mu$); $4{,}05_4$ (361 und 467 $\mu\mu$); $3{,}89_9$ (467 und 589 $\mu\mu$). Hieraus folgt zunächst[6]), daß $k$ sicher von Null verschieden ist. Martens[7]) berechnet folgende Konstanten der Formel (11a) aus seinen Beobachtungen:

$$(11a) \qquad n^2 = \mathfrak{m} + \frac{\mathfrak{m}'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda'^2}.$$

$$\lambda' = 124{,}56 \cdot 10^{-7}\ \text{cm};$$

$$\mathfrak{m} = 1{,}8755, \text{ also } \mathfrak{N}_0 \vartheta_0 = 0{,}8755;$$

$$\mathfrak{m}' = D = 3{,}7905;\ \sum \mathfrak{m}' = 5{,}6660 = a^2;^8)$$

1) Vgl. p. 77 und 78 der Diss.

2) B. Walter, Wied. Ann. 42. p. 505—510. 1891.

3) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 8. 459—465. 1902.

4) Veranlaßt durch eine Bemerkung Drudes, p. 709, Anm. 1.

5) 3. Aufl. p. 226. 1905.

6) Vgl. p. 22 unten meiner Diss.

7) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 8. p. 459—465. 1902.

8) Die Dielektrizitätskonstante des Diamanten ist nach W. Schmidt (Ann. d. Phys. 11. p. 121. 1903) = 5,50 für $\lambda = 75$ cm [Drudesche Methode], nach v. Pirani (Fortschritte der Physik, 59. II. p. 33, 34. 1903) für Diamant (möglicherweise mit metallischen Einschlüssen) $\varepsilon = 16{,}47$ für $\lambda = \infty$.

die hierbei vorkommende größte Abweichung zwischen beobachtetem und berechnetem Brechungsexponent ist $-7.10^{-4}$. Es wäre sehr leicht möglich, daß die Formel (11) oder (2), die den Einfluß der ultraroten Absorption nicht vernachlässigt, die Beobachtungen von Martens besser darstellt.[1]) Aus den von Martens angegebenen Konstanten berechne ich nach (24) und (25) $p.e/m = 4{,}11.10^7$ für $\lambda = \infty$.

$$p_v \cdot \frac{e}{m} = 2{,}72.10^7 \text{ nach (12) und (17).}$$

Nach all diesem ist es sehr wahrscheinlich, daß der Diamant mehr als eine ultraviolette Eigenschwingung besitzt; der für $\lambda = \infty$ berechnete Grenzwert für die Summe schwingungsfähiger Elektronen pro Kohlenstoffatom ist $p = 2{,}7$. $[v = 4]$.

### § 7. Zusammenfassung und Schluß.

1. Das Abbesche Spektrometer, bei dem das Prinzip des in sich zurückkehrenden Strahles zur Messung des Brechungsexponenten und der Dispersion verwendet wird, erweist sich auch bei Benutzung von Bogenspektren als sehr geeignet, die Dispersion von Flüssigkeiten rasch und sehr genau zu messen, wenn die zur Dispersionstrommel gehörige Schraube fehlerfrei ist oder wenn die periodischen Fehler der Schraube für ihre einzelnen Teile bestimmt sind. Eines der Haupterfordernisse bei genauen Dispersionsmessungen ist eine möglichst konstante Temperatur des zu untersuchenden Körpers.

2. Für die drei von mir untersuchten Flüssigkeiten, Benzol, $\alpha$-Monobromnaphthalin und Methyljodid, bestimmte ich, soweit dies aus Beobachtungen nur im sichtbaren Spektrum möglich ist, die Konstanten der vierkonstantigen Dispersionsformel

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\lambda_v^2}{\lambda^2 - \lambda_v^2} \quad \text{oder} \quad n^2 = -k\lambda^2 + \mathfrak{m} + \frac{\mathfrak{m}'\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_v^2},$$

für die noch keine Bestimmungen vorlagen. Die hieraus gezogenen Schlüsse auf die Lage der Absorptionsgebiete im Ultraviolett und Ultrarot wurden, soweit überhaupt Beobachtungen

1) Vgl. z. B. meine Rechnungen für Benzol.

vorhanden waren, durch die Erfahrung bestätigt. Die Vorausberechnung des Koeffizienten $k$, der den Einfluß der ultraroten Absorptionen auf den Brechungsindex darstellt, nach der Drudeschen Formel $k = 0{,}296 \cdot 10^8 d \cdot v^2/M^2$ ergibt für Benzol und $\alpha$-Monobromnaphthalin viel größere Werte als die Beobachtung.

3. Für die Wellenlänge $\lambda = 0$ folgt aus der Elektronentheorie der Brechungsindex $n = 1$ und der Absorptionsindex $\varkappa = 0$.

4. Die Beweglichkeit $\vartheta_k$ der Elektronengattungen mit Eigenschwingungen im Ultraviolett nimmt bei durchsichtigen Flüssigkeiten im Mittel ab mit steigender Temperatur für das Intervall 0—30° (für manche Flüssigkeiten auch in viel größeren Intervallen); hieraus folgt bei Steigerung der Temperatur eine Verschiebung der Absorptionsgebiete nach kürzeren Wellenlängen. Bei den festen Körpern bewirkt eine Temperaturerhöhung unter konstantem Druck im Mittel eine Zunahme der Beweglichkeit der Elektronen mit Eigenschwingungen im Ultraviolett und im sichtbaren Spektrum und eine Verschiebung der Absorptionsstreifen nach größeren Wellenlängen. Diese Abhängigkeit der Elektronenbeweglichkeit von Temperatur und Druck erklärt auch die Änderung von

$$\frac{n^2 - 1}{d} \left( \text{und } \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{d} \right)$$

mit Temperatur und Druck. Über die Abhängigkeit der Beweglichkeit der positiv geladenen Atomgruppen von Temperatur und Druck läßt sich nichts Bestimmtes aussagen, da der Einfluß der ultraroten Eigenschwingungen auf den Brechungsindex viel kleiner ist als derjenige der ultravioletten Eigenschwingungen. Wird überhaupt der Einfluß der ultraroten Eigenschwingungen berücksichtigt, so geschieht dies meist durch das Glied $-k\lambda^2$ in der Dispersionsformel; $k$ ändert sich aber so mit Temperatur und Druck, daß stets die Gleichung gilt:

$$\frac{\text{Veränderung von } k}{k} = \frac{\text{Veränderung der Dichte}}{\text{Dichte}},$$

wobei es gleichgültig ist, wie sich die Beweglichkeiten der ultraroten Ionengattungen ändern.

5. Aus dem von Drude gegebenen Kriterium folgt, daß Benzol, $\alpha$-Monobromnaphthalin und Methyljodid und wohl die meisten organischen Verbindungen mehr als eine Eigenschwingung im Ultraviolett besitzen.

6. Der Grenzwert $p$ der Summe schwingungsfähiger Elektronen pro Molekül kann im Intervall 10—30° als unabhängig von der Temperatur angesehen werden und wächst mit wachsender Wellenlänge. Es muß daher zur Vergleichung der Zahlen $p$ bei verschiedenen Substanzen ein bestimmtes Intervall im Spektrum, etwa das der beiden Wasserstofflinien $H_\gamma$ und $H_\beta$, verwendet werden. Die Zahlen $p$ sind sehr empfindlich gegenüber geringen Verunreinigungen einer Substanz, zeigen also dasselbe Verhalten wie die Brühlsche Molekulardispersion.

7. Der Einfluß einer doppelten oder äthylenischen Bindung zwischen zwei Kohlenstoffatomen im Molekül auf die Grenzwerte $p$ läßt sich durch eine negative Konstante ausdrücken. Durch Doppelbindungen erhält also die Beweglichkeit der (ultravioletten) Elektronen stärkere relative Verschiedenheiten, gerade so wie durch die besondere Art der Bindung zwischen den sechs Kohlenstoffatomen im Benzolkern. Substanzen mit zwei Doppelbindungen im Molekül sind ebenfalls durch eine negative Konstante charakterisiert, die jedoch dem Absolutwert nach nicht doppelt so groß ist wie bei einer Doppelbindung. Die dreifache Bindung oder Acetylenbindung zwischen zwei Kohlenstoffatomen verhält sich qualitativ ähnlich wie eine Doppelbindung, hat aber geringeren Einfluß auf $p$ als diese. Die Grenzwerte $p$ für ein Atom sind verschieden, je nachdem dasselbe direkt am Benzolkern oder erst in einer Seitenkette sich befindet. Tritt Stickstoff in das Molekül einer organischen Verbindung ein, dann ändern sich die Grenzwerte $p$ für C, (H), O.

8. Durch die von mir ausgeführten Rechnungen ist die Drudesche Theorie derart erweitert worden, daß sie der Landolt-Brühlschen Theorie der Molekularrefraktion und Molekulardispersion ebenbürtig an die Seite tritt. Die Grenzwerte $p$ haben mit der Molekulardispersion die Eigenschaft gemeinsam, daß sie in hohem Grade von der chemischen Zusammensetzung der Substanz abhängig sind und können ebenso

wie die Molekulardispersion zur Prüfung der Reinheit einer Substanz verwendet werden.

Die vorliegende Arbeit wurde unternommen auf gütige Anregung von Hrn. Prof. Dr. Ebert. Ich erlaube mir, auch an dieser Stelle Hrn. Prof. Dr. Ebert meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das fördernde Interesse, das er meinen Untersuchungen entgegengebracht hat.

München, Physik. Inst. d. Techn. Hochsch., Oktober 1907.

(Eingegangen 26. Oktober 1907.)

## 5. *Nachtrag zur Berechnung der Loschmidtschen Zahl aus den Konstanten der Dispersionsformel;* von *H. Erfle.*

In diesen Annalen[1]) habe ich vor kurzem gezeigt, daß aus den Konstanten der Dispersionsformel einer Substanz die Zahl der Elektronen (der Gattung $\nu$) im Kubikzentimeter dieser Substanz, $\mathfrak{N}_\nu$, der „Reibungskoeffizient" $r_\nu$ und die „Beweglichkeit" $\vartheta_\nu$ berechenbar ist mit Benutzung des elektrischen Elementarquantums. Daran anschließend wurden auch noch einige Werte für die Loschmidtsche Zahl $N$ angegeben. Aus der Dispersion läßt sich aber, streng genommen, nicht die Loschmidtsche Zahl selbst, sondern, wie leicht zu ersehen ist, nur ein oberer Grenzwert für $N$ berechnen, indem man in den dort benutzten Gleichungen (1) und (9) $p_\nu = 1$ setzt. Tatsächlich bilden die so erhaltenen Grenzwerte eine gute Bestätigung für die Richtigkeit der Dispersionstheorie insofern, als sie wirklich größer sind als die aus der Elektrolyse und aus den Konstanten der Planckschen Spektralgleichung berechneten Zahlen für $N$: $3{,}84 \cdot 10^{19}$ bzw. $2{,}76 \cdot 10^{19}$. Man erhält nämlich mit $p_\nu = 1$ folgende *obere Grenzwerte für die Loschmidtsche Zahl:*

$7{,}56 \cdot 19^{19}$ ($H_2$, gasf.); $13{,}94 \cdot 10^{19}$ ($N_2$, gasf.),

$4{,}0 \cdot 10^{19}$ ($H_2O$, flüssig); $15{,}84 \cdot 10^{19}$ ($CaF_2$, fest).

Man kann wohl auch $p_\nu$ aus der Dispersion berechnen; doch fallen dann bei der Berechnung der Loschmidtschen Zahl, bei welcher der Quotient $\mathfrak{N}_\nu / p_\nu$ vorkommt, die aus der

1) H. Erfle, Ann. d. Phys. **23**. p. 594—598. 1907.

Dispersion entnommenen Größen $\lambda_v$ und $\mathfrak{N}_v \vartheta_v$ hinaus[1]) und der so entstehende Ausdruck ist der bei Berechnung von $N$ aus der Elektrolyse (aus $e/H$ und $e$) auftretende:

$$N = \frac{d}{M} \cdot \frac{e}{H} \cdot \frac{1}{e} = 3{,}84 \,.\, 10^{19}$$

mit $e = 1{,}13 \,.\, 10^{-20}$ und $e/H = 0{,}965 \,.\, 10^{4}$.

München, Physik. Institut der Technischen Hochschule, Oktober 1907.

1) Auf diesen Umstand hat mich Hr. Professor W. Kaufmann freundlichst aufmerksam gemacht; daher habe ich hier die Darstellung etwas geändert und die frühere Formel (10) p. 596 nun überhaupt nicht benutzt.

(Eingegangen 26. Oktober 1907.)

## 6. *Studien über die Anomalien im Verhalten der Dielektrika*[1]; von Egon Ritter v. Schweidler.

### Einleitung.

Vom Standpunkt der allgemeinen Theorie der elektrischen Erscheinungen ist ein homogenes und isotropes Dielektrikum durch *zwei* Materialkonstanten ausreichend zu charakterisieren: durch seine *Dielektrizitätskonstante* und durch sein *spezifisches Leitvermögen.*

Viele Dielektrika zeigen nun *Anomalien* ihres Verhaltens, die sich nicht ohne weiteres in den Rahmen der allgemeinen Theorie fassen lassen, ähnlich wie dies auf dem Gebiet des Magnetismus bei den ferromagnetischen Substanzen der Fall ist. Da sich ohne spezielle Hypothesen nachweisen läßt, daß die verschiedenen Arten der Anomalien in gegenseitigem Zusammenhange stehen, sind sie hier auch im Zusammenhange behandelt.

Die hier gegebene Darstellung zerfällt in *drei Hauptteile.*

Im *ersten Teile* werden die *Hauptformen* des anomalen Verhaltens der Dielekrika auf Grund der bisher vorliegenden experimentellen Ergebnisse ohne Anwendung einer speziellen Hypothese oder Theorie zusammengestellt; als solche Hauptformen werden unterschieden:

1. die *Rückstandsbildung*, das ist das Auftreten nach bestimmten Gesetzen zeitlich variabler Ströme in Dielektrikas unter der Einwirkung eines konstanten oder sehr langsam veränderlichen elektrischen Feldes;

2. die *Energieverluste* (Umwandlung elektrischer Energie in Wärme) in Dielektrikas unter dem Einfluß eines Wechsel- oder Drehfeldes;

1) Aus den Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Kl. 116. p. 1055. 1907.

3. die *ponderomotorischen Kräfte*, die ein Dielektrikum im elektrischen Drehfeld erfährt;

4. die scheinbare *Abhängigkeit* der Kapazität eines Kondensators und somit auch der *Dielektrizitätskonstante* seines Dielektrikums von der *Ladungsdauer* bei konstanter Spannung, bzw. *Periodendauer* bei Wechselspannung.

Der Ausdruck „*Hysteresis*", der für die unter 2. und 3. genannten Erscheinungen häufig gebraucht wird, ist hier vorläufig vermieden, da er bereits eine nicht allgemein angenommene Voraussetzung über die Natur dieser Phänomene zur Grundlage hat.

Der *zweite Teil* behandelt die *Theorie* der anomalen Erscheinungen. Es wird zunächst der oben erwähnte gegenseitige *Zusammenhang* der vier Hauptformen abgeleitet; hierauf wird die *Unvereinbarkeit* der Anomalien mit den einfachen Annahmen der allgemeinen Theorie nachgewiesen; es folgt eine Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten, diese Anomalien theoretisch zu behandeln durch Zurückführung auf *Anomalien der Struktur des Mediums* (Inhomogenität, Maxwellsche Theorie der geschichteten Dielektrika) oder der *Leitungsvorgänge* (Ionenleitung) oder endlich des *dielektrischen Verhaltens* (Nachwirkung, Hysteresis, Viskosität).

Der Versuch einer *Modifikation* der einzigen bisher vorliegenden präzisen Formulierung einer solchen Theorie (der Pellatschen Theorie) bildet zusammen mit dem Nachweis, daß aus den Gesetzen der Rückstandsbildung die übrigen Formen des anomalen Verhaltens der Dielektrika quantitativ darstellbar sind, den *wesentlichsten* Bestandteil dieser Studien.

Der *dritte Teil* enthält die Resultate experimenteller Untersuchungen des Verfassers. Da nach seiner Ansicht die bisher vorliegenden, im ersten Teile besprochenen Ergebnisse ausreichen, um die im zweiten Teile dargelegten theoretischen Folgerungen zu stützen, bieten sie nichts prinzipiell Neues, sondern dienen bloß zur Erläuterung, Bestätigung und Ergänzung jener Ergebnisse und zur Aufstellung eines Schemas für die Charakterisierung eines Dielektrikums durch Angabe seiner Materialkonstanten.

Eine *Zusammenfassung der Ergebnisse* schließt die vorliegenden Studien ab.

Der *Anhang* enthält ein Verzeichnis der einschlägigen *Literatur*, auf das die Zitate innerhalb des Textes bezogen sind.

## Erster Teil.

### Die Hauptformen des anomalen Verhaltens der Dielektrika.

#### 1. Die Rückstandsbildung.

Werden die Belegungen eines Kondensators mit den Polen einer Stromquelle konstanter elektromotorischer Kraft verbunden, so tritt in den Zuleitungen ein Strom auf, dessen Intensität mit der Zeit abnimmt. Bei einem idealen nichtleitenden Dielektrikum gilt nach der allgemeinen Theorie für den *„normalen Ladungsstrom"* die Differentialgleichung:

$$S\frac{d^2i}{dt^2} - W\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0,$$

wobei $C$ die Kapazität des Kondensators, $S$ den Selbstinduktionskoeffizienten und $W$ den Widerstand des äußeren Leitungskreises darstellt. Je nach dem Verhältnis der numerischen Werte dieser drei Konstanten erfolgt die Ladung des Kondensators gedämpft oszillatorisch oder aperiodisch gedämpft. Bei nicht sehr großem Widerstande des äußeren Leitungskreises sinkt die Stromstärke in jedem der beiden Fälle sehr rasch ab, so daß in den praktisch realisierbaren Fällen der normale Ladungsstrom nach Zeiten von der Größenordnung eines kleinen Bruchteiles einer Sekunde gleich Null gesetzt werden kann.

Falls das Dielektrikum nicht vollkommen isolierend ist, so ist dem normalen Ladungsstrom ein *„normaler Leitungsstrom"* $a$ übergelagert, der gegeben ist durch die Formel

$$a = \frac{4\pi\lambda}{K} CE,$$

wobei $\lambda$ das spezifische Leitvermögen, $K$ die Dielektrizitätskonstante des Mediums, $C$ die Kapazität des Kondensators und $E$ die elektromotorische Kraft der Stromquelle bezeichnet (alle Größen sind in absoluten elektrostatischen Einheiten gemessen gedacht).

Tatsächlich nun beobachtet man bei vielen Dielektrikas, daß dem normalen Ladungsstrom $i_1$ und dem normalen Leitungs-

strom $a$ noch ein „*anomaler Ladungsstrom*“ $y_1$ übergelagert ist, so daß der gesamte Strom darstellbar ist durch:

$$J_1 = i_1 + y_1 + a.$$

Dabei ist $y_1$ eine Funktion der Zeit, die asymptotisch auf Null absinkt, aber viel langsamer als der normale Ladungsstrom $i_1$.

Werden die Belegungen des Kondensators, nachdem sie durch ein Zeitintervall $\delta$ auf konstanter Potentialdifferenz gehalten wurden, miteinander leitend verbunden, so sind bezüglich der Gesetze des Entladungsstromes *zwei Typen* zu unterscheiden:

a) Der Entladungsstrom $J_2$ entspricht dem *normalen* Entladungsstrom $i_2$, der durch eine ganze analoge Differentialgleichung wie der normale Ladungsstrom $i_1$ bestimmt ist;

b) analog wie bei der Ladung ist ein „*anomaler Entladungsstrom*“ $y_2$ übergelagert und es ist $y_2$ wieder eine mit wachsender Zeit auf Null absinkende Funktion dieser. Dabei gilt noch die Beziehung zwischen $y_1$ und $y_2$:

$$\int_0^\delta y_1 \, dt = -\int_0^\infty y_2 \, dt,$$

d. h. die gesamte Elektrizitätsmenge, die infolge des anomalen Entladungsstromes einen Querschnitt der Leitung passiert, ist entgegengesetzt gleich derjenigen, die während der Ladungsdauer $\delta$ durch den anomalen Ladungsstrom transportiert wurde. Während im Falle a), der besonders bei verschiedenen schlecht leitenden Flüssigkeiten realisiert ist (Koller, IV, 3; Schweidler, IV, 7, 8, 10; Gädeke, IV, 9), der Ladungsprozeß so verläuft, als ob das Leitvermögen des Mediums durch den Stromdurchgang zeitliche Änderungen erfahren würde, ist im Falle b) der Ladungsprozeß ein *reversibler*; das Medium verhält sich, als ob die dem Zeitintegral des anomalen Ladungsstromes $\int_0^\delta y_1 \, dt$ entsprechende Elektrizitätsmenge *absorbiert* wäre, um bei der Entladung allmählich wieder frei zu werden.

Diesen reversiblen Prozeß bezeichnet man gewöhnlich als *Bildung* bzw. *Freiwerden des „Rückstandes“* und das Integral $\int_0^\delta y_1 \, dt$ als die in der Zeit $\delta$ gebildete *„Rückstandsladung“*.

Prinzipiell weniger einfach sind die Verhältnisse, wenn die Belegungen des Kondensators nicht auf konstanten Potentialen gehalten werden, sondern eine von ihnen isoliert ist; doch ist gerade diese Form der Rückstandserscheinungen die historisch primäre und bei dieser wurde man auf die oben erwähnte Bezeichnungsweise geführt. Wird ein Kondensator geladen und dann die eine der beiden Belegungen isoliert, so nimmt die Potentialdifferenz $V$ der Belegungen und damit die durch das Produkt $CV$ gegebene sogenannte *„disponible Ladung"* ab. Diese Abnahme erfolgt rascher, als es dem stationären Leitungsstrom $a$ entsprechen würde. Wird umgekehrt der geladene Kondensator durch vorübergehende leitende Verbindung der Belegungen entladen und hierauf die eine Belegung isoliert, so tritt allmählich eine neuerliche Ladung vom gleichen Vorzeichen wie die ursprüngliche auf, wächst bis zu einem Maximum an, um dann wieder (infolge der Leitung des Dielektrikums) asymptotisch auf Null zu sinken.

Bezüglich der Gesetze, die für den zeitlichen Verlauf der Rückstandserscheinungen sowie für ihre Abhängigkeit von anderen Nebenbedingungen gelten, haben die experimentellen Untersuchungen zu folgenden Resultaten geführt:

Der anomale Ladungsstrom oder rückstandsbildende Strom $y_1$ ist an einem gegebenen Kondensator bei gegebener elektromotorischer Kraft als Funktion der Zeit darstellbar durch:

$$y_1 = B.t^{-n}.$$

Dabei ist $n < 1$.

Diese Formel kann nur als Annäherung betrachtet werden. Zunächst erhält man für $t = 0$, $y_1 = \infty$, wobei allerdings

$$\int_0^{\delta} y_1 \, dt = \frac{B.t^{1-n}}{1-n}$$

für endliches $\delta$ endlich bleibt. Ferner wird für $t = \infty$,

$$\int_0^{\infty} y_1 \, dt = \infty,$$

was ebenfalls aus später zu besprechenden Gründen unwahrscheinlich ist. Der Verlauf des Stromes innerhalb des ersten unendlich kleinen Zeitelementes sowie nach unendlich langer

Zeit läßt sich natürlich nicht empirisch bestimmen. Innerhalb der der Beobachtung zugänglichen Zeitintervalle hat sich aber obige Formel gut bestätigt gezeigt (Kohlrausch, I, 1; Hopkinson, I, 9, 10, 11; Giese, I, 15; J. Curie, I, 21 u. a.) Versuche, welche über weit längere Zeiträume als in den zitierten Arbeiten die Gültigkeit dieser Formel prüfen, sind im dritten Teile angeführt.

Wird derselbe Kondensator unter der Einwirkung verschiedener elektromotorischer Kräfte untersucht, so ergibt sich, daß der Rückstandsstrom $y_1$ der elektromotorischen Kraft $E$ *proportional* ist bei unveränderter Form des zeitlichen Verlaufes. Also

$$y_1 = B \,.\, t^{-n} = b \,.\, E \,.\, t^{-n}$$

(Kohlrausch, I, 1; J. Curie, I, 21).

Wird ein bestimmtes Dielektrikum in verschiedenen Schichtdicken untersucht, so ist nach Hopkinson (I, 9, 10, 11) der Rückstandsstrom $y_1$ der Dicke umgekehrt proportional, wieder bei unveränderter Form des zeitlichen Verlaufes. Da Proportionalität des Stromes mit dem Querschnitt (Flächengröße der Belegung) selbstverständlich ist, kann man auch den Strom proportional der Kapazität des Kondensators setzen und man erhält die Formel:

$$y_1 = b \,.\, E \,.\, t^{-n} = \beta \,.\, C \,.\, E \,.\, t^{-n},$$

wo jetzt $\beta$ und $n$ Konstanten des Mediums als solchen sind.

Bezüglich des Entladungsstromes $y_2$ gelten folgende Gesetze: Nach sehr langer Ladungsdauer des Kondensators ist der Entladungsstrom dem Ladungsstrom entgegengesetzt gleich:

$$y_2 = - y_1,$$

bei kürzerer Ladungsdauer $\delta$ ist $y_2 < y_1$, zeigt rascheren zeitlichen Abfall, und zwar darstellbar durch die Formeln:

$$y_1 = f(t) = B \,.\, t^{-n},$$
$$y_2 = - f(t) + f(t + \delta),$$

wobei $t$ die vom Beginn der Ladung (bei $y_1$) bzw. Entladung (bei $y_2$) gerechnete Zeit, $\delta$ die Ladungsdauer bezeichnet.

Dieses Ergebnis kann so interpretiert werden: Der beobachtete Entladungsstrom $y_2$ entsteht aus der Superposition des dem Ladungsstrom $y_1 = f(t)$ entgegengesetzt gleichen Stromes

$-f(t)$ und eines Stromes $f(t+\delta)$, der einfach als ungestörte Fortsetzung des Ladungsstromes auch nach der Entladung aufgefaßt werden kann.

Dieses sogenannte *Superpositionsprinzip* wurde experimentell gefunden von Hopkinson (I, 9, 10, 11) und J. Curie (I, 21).

Die oben erwähnte Formel

$$\int_0^\infty y_2\,dt = -\int_0^\delta y_1\,dt$$

ist eine Konsequenz desselben.

Das Superpositionsprinzip kann noch erweitert werden: Bei mehrmaligen sprungweisen Änderungen der Spannungsdifferenz der Belegungen superponieren sich die jeder Änderung entsprechenden Ströme, als ob sie unabhängig voneinander wären. Wenn also zu den Zeiten

$$t = \delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_k$$

Sprünge in der Potentialdifferenz um die (positiven oder negativen) Beträge:

$$E_1, E_2, E_3 \ldots E_k$$

eintreten, so ist der resultierende Strom:

$$y = E_1 f(t-\delta_1) + E_2 f(t-\delta_2) + \ldots E_k f(t-\delta_k).$$

Eine Verallgemeinerung dieses empirisch gefundenen und bestätigten Superpositionsprinzipes führt zur Darstellung des Stromes bei beliebig variierender Spannungsdifferenz

$$E = \varphi(t)$$

durch die Formel

$$y_t = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta} \cdot f(t-\vartheta)\,d\vartheta.$$

Darin ist $f(t)$ die Funktion, die den Verlauf nach einer einzigen sprungweisen Änderung im absoluten Betrage 1 darstellt, also nach dem oben Mitgeteilten:

$$\text{annähernd } f(t) = \beta . C . t^{-n}.$$

Wie alle Materialkonstanten sind auch die den Verlauf der Rückstandsbildung bestimmenden Konstanten $\beta$ und $n$ als

Funktionen der Temperatur zu betrachten. Die Angaben verschiedener Beobachter (Bedell und Kinsley, I, 26; Hopkinson und Wilson, I, 34; Naccari, IV, 6 und I, 37; Schweidler, I, 46) über den Einfluß der Temperatur zeigen Widersprüche, die aber vielleicht nur scheinbare sind. Gewöhnlich wird angegeben, daß der Rückstand mit steigender Temperatur abnehme; andere Beobachter geben an, daß mit steigender Temperatur die Konstante $\beta$ zunehme, während der Exponent $n$ nicht wesentlich von der Temperatur beeinflußt werde. Aus dieser letzteren Angabe würde folgen, daß die in gegebener Zeit $\delta$ gebildete Rückstandsladung

$$R = \beta \cdot C \cdot E \cdot \frac{t^{1-n}}{1-n}$$

mit der Temperatur wachse.

Wird aber nach längerer Ladungsdauer der Kondensator momentan entladen, hierauf die eine Belegung isoliert und nun mittels einer elektrometrischen Methode die bis zu einem Maximum ansteigende, dann wieder abnehmende Rückstandsladung messend verfolgt, so kann bei höherer Temperatur das beobachtete Maximum erniedrigt sein, wenn nämlich das Leitvermögen des Dielektrikums mit der Temperatur rascher ansteigt als die Größe $\beta$. Einige Versuche über diese Frage sind im dritten Teile besprochen.

Erwähnenswert sind noch zwei Beobachtungen über die Beeinflussung der Rückstandsbildung durch mechanische und elektrische Zustandsänderungen.

Nach Hopkinson (I, 10) werden die anomalen Ladungs- und Entladungsströme bei einer Leydnerflasche verstärkt durch gleichzeitige mechanische Erschütterungen.

Nach v. Hoor (VI, 2) kann die Rückstandsbildung eines Kondensators verringert werden durch oft wiederholtes „Formieren", d. i. abwechselndes Laden und Entladen.

#### 2. Energieumwandlung im Wechsel- oder Drehfelde.

Kondensatoren mit flüssigem oder festem Dielektrikum zeigen häufig eine *Erwärmung*, wenn ihre Belegungen durch Verbindung mit einer Wechselstromquelle alternierend geladen werden (Siemens, II, 1; Naccari und Bellati, II, 2; Borgmann, II, 3; Steinmetz, II, 6; Janet, II, 8; Kleiner,

II, 11; Fritz, II, 14; Düggelin, II, 21; Benischke, II, 24; Eisler, II, 25; Rosa und Smith, II, 35; Mercanton, II, 41; Moscicki und Altenberg, II, 49). Dasselbe findet statt, wenn ein Dielektrikum sich in einem elektrischen Drehfelde befindet (Guye und Denso, II, 50).

Bezüglich der verschiedenen Stärke dieser Wärmeproduktion in verschiedenen Substanzen sind besonders die Untersuchungen von Kleiner (II, 11), Fritz (II, 14) und Düggelin (II, 21) zu nennen. Kautschuk, Ebonit, Glas, Siegellack und Guttapercha zeigen diese Erscheinung in besonderer Intensität, Glimmer, Paraffin und viele isolierende Flüssigkeiten in schwachem bis unmerklichem Grade.

Eine Reihe von Untersuchungen betrifft die Abhängigkeit von der Effektivspannung des Wechselfeldes; die meisten Beobachter finden Proportionalität zwischen der pro Zeiteinheit entwickelten Wärme $W$ und dem Quadrat der Effektivspannung $E$ (Borgmann, II, 3; Steinmetz, II, 6; Hess, II, 23; Benischke, II, 24; Eisler, II, 25; Houllevigue, II, 29); doch finden andere Beobachter (Mercanton, II, 41; Moscicki und Altenberg, II, 49) auch Abweichungen von diesem Gesetze.

Weitere Resultate betreffen die Abhängigkeit von der Periodenzahl $n$ des angewandten Wechselstromes. Im allgemeinen steigt die Wärmemenge $W$ mit der Periodenzahl an (Hess, II, 23; Eisler, II, 25; Beaulard, II, 36 und 37; Moscicki und Altenberg, II, 49; Guye und Denso, II, 50). Wird die entwickelte Wärmemenge auf die Dauer der Periode des Wechselstromes $\tau$ bezogen statt auf die Zeiteinheit, so ergibt sich, daß die Funktion $\tau W = f(n)$ bei einem gewissen Werte von $n$ ein Maximum besitzt (Mercanton, II, 41; Rosa und Smith, II, 35).

Analog wie beim Rückstand kann bisweilen die Wärmeproduktion im Dielektrikum durch wiederholte Beanspruchung („Formieren") herabgedrückt werden (Kleiner, II, 20; v. Hoor, VI, 2).

### 3. Ponderomotorische Kräfte im elektrischen Drehfelde.

Diese Erscheinungen treten auf bei *relativer* Rotation des Dielektrikums zu einem elektrischen Felde, also entweder wenn

ein ruhendes Dielektrikum sich in einem elektrischen Drehfelde befindet oder wenn ein Dielektrikum in einem ruhenden Felde rotiert. Es zeigt sich, daß in diesen Fällen Drehungsmomente auf das Dielektrikum ausgeübt werden, auch wenn es die Form eines Rotationskörpers mit zur Feldrichtung senkrechter Achse hat, also aus Symmetriegründen bei relativer Ruhe keine Drehungsmomente entstehen können (Arno, II, 7, 15—19, 27; Quincke, III, 2; Borel, II, 12; Threlfall, II, 30, 31; Schaufelberger, II, 32, 34; Heydweiller, III, 6; Graetz, III, 7; v. Lang, II, 52).

Ist das Dielektrikum von Luft umgeben, so entsteht ein Drehungsmoment, das es *im Sinne der Rotation des Feldes* zu drehen sucht: also *Mitnehmen* des ursprünglich ruhenden Dielektrikums im rotierenden Felde oder *Hemmung* des rotierenden Dielektrikums im ruhenden Felde.

Ist aber der Körper in eine sehr schlecht leitende Flüssigkeit eingetaucht, so kann sich das Vorzeichen des Drehungsmomentes umkehren: im ruhenden Felde wird eine vorhandene Rotation des Körpers *beschleunigt* (Quincke, III, 2), im Drehfelde eine der Feldrotation entgegengesetzte Rotation des Körpers hervorgerufen (v. Lang, II, 52).

Eine quantitative Bestimmung des Drehmomentes kann erfolgen im Drehfelde aus der Torsion einer elastischen Suspension, die dem elektrischen Drehmomente das Gleichgewicht hält, im ruhenden Felde aus der Dämpfung von Schwingungen (Arno, Threlfall, Schaufelberger). Für die Abhängigkeit des Drehmomentes $D$ von der elektrischen Feldintensität $F$ findet Schaufelberger die Beziehung:

$$D = k \cdot F^2,$$

Arno und Threlfall dagegen:

$$D = K \cdot F^n,$$

wobei $n$ in verschiedenen Fällen verschieden (1,5 bis 1,96), aber immer kleiner als 2 war.

Bei konstanter Feldintensität nimmt das Drehungsmoment mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit zu (Arno, II, 27).

### 4. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Ladungsdauer bzw. Periodenzahl.

Sowohl wenn die Kapazität eines Kondensators bei kurzdauernder Verbindung mit einer Stromquelle konstanter Spannung bestimmt wird als auch bei Verwendung einer Wechselstrommethode ergaben viele Versuche eine Abhängigkeit des unmittelbar gefundenen Wertes für die Kapazität und somit auch des Wertes der Dielektrizitätskonstante von der Ladungsdauer bzw. von der Periodenzahl (Frequenz) des Wechselstromes (vgl. Literaturverzeichnis, Abteilung V).

Mit einer einzigen Ausnahme (Lecher, V, 6) fanden alle Beobachter, daß die Dielektrizitätskonstante um so kleiner wird, je kürzer die Ladungsdauer, bzw. je größer die Periodenzahl ist. Bisweilen sind die Unterschiede sehr bedeutend; z. B. findet J. J. Thomson (V, 5)

für *Glas*, bei Frequenz $n$ = ca. 100 $^1$/sec: $K = 9$ bis 11,
„ „ $n = 25 \cdot 10^6$: $K = 2{,}7$;

analog Northrup (V, 17)

für *Glas*, bei $n = 100$ : $K = 6{,}25$,
„ $n = 10^6$ bis $10^7$: $K = 5{,}86$;

und Beaulard (V, 15)

für *Glas*, bei Ladungsdauer $\Delta = 0{,}008$ sec: $K = 6{,}22$,
„ „ $\Delta = 0{,}0004$ „ : $K = 3{,}66$.

## Zweiter Teil.

### Die Theorie des anomalen Verhaltens der Dielektrika.

### 1. Zusammenhang der Hauptformen anomalen Verhaltens.

Die im ersten Teile dargestellten Hauptformen des anomalen Verhaltens sind nicht unabhängig voneinander, sondern es läßt sich nachweisen, daß aus dem Bestehen der ersten Hauptform, der Rückstandsbildung, das Auftreten von den anderen Hauptformen analogen Erscheinungen notwendig folgt.

Es ist bereits im Abschnitt I, 1 erwähnt worden, daß das zunächst experimentell gefundene *Superpositionsprinzip* verallgemeinert bei beliebiger zeitlicher Variation der angelegten

Spannung: $E = \Phi(t)$ zu folgender Formel für den Rückstandsstrom führt:

$$i_t = \int_{-\infty}^{t} d\vartheta \, \Phi'(\vartheta) f(t-\vartheta),$$

wobei $f(t)$ eine Funktion ist, die den zeitlichen Gang des Rückstandsstromes darstellt, falls zur Zeit $t=0$ an den vorher unendlich lange Zeit der Einwirkung elektrischer Kräfte entzogenen Kondensator plötzlich eine Spannungsdifferenz von der Größe 1 angelegt wird. Nach den bereits gegebenen Resultaten kann $f(t)$ annähernd dargestellt werden durch

$$f(t) = \beta \, . \, C \, . \, t^{-n} \quad (n < 1).$$

Es soll zunächst der Spezialfall untersucht werden, daß die Spannungsdifferenz der Kondensatorbelegungen eine einfache periodische Funktion der Zeit sei, also

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Aus obiger Formel folgt dann:

$$i_t = \frac{2\pi}{\tau} E_0 \int_{-\infty}^{t} d\vartheta \cos \frac{2\pi \vartheta}{\tau} f(t-\vartheta);$$

setzt man $(t-\vartheta) = u$, so ergibt sich daraus:

$$i_t = \frac{2\pi}{\tau} E_0 \left\{ A \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right\},$$

wobei

$$A = \int_0^{\infty} f(u) \cos \frac{2\pi u}{\tau} du,$$

$$B = \int_0^{\infty} f(u) \sin \frac{2\pi u}{\tau} du.$$

Dieser Strom $i_t$ ist dem normalen Strome übergelagert, der sich wieder aus dem normalen Ladungsstrom und dem normalen Leitungsstrom zusammensetzt und unter Vernachlässigung von Selbstinduktion und Widerstand im äußeren, die Belegungen verbindenden Kreise dargestellt wird durch:

$$\frac{2\pi}{\tau} C E_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{4\pi\lambda}{K} C E \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Der anomale, auf Rückstandsbildung beruhende Strom $i_t$ besteht somit aus zwei Gliedern, die einfach zum normalen Ladungs- bzw. Leitungsstrom hinzugerechnet werden können und sich durch eine scheinbare Änderung der Normalwerte von Kapazität und Widerstand des Kondensators interpretieren lassen.

Man erhält für die *„scheinbare Kapazität"* den Wert:

$$C' = C + A,$$

für den reziproken *„scheinbaren Widerstand"*:

$$L' = L + \frac{2\pi}{\tau} B.$$

Führt man für die bisher unbestimmt gelassene Funktion $f(u)$ den experimentell gefundenen Näherungswert

$$f(u) = \beta . C . u^{-n}$$

ein, so wird mittels der Substitution $\omega = 2\pi u/\tau$

$$A = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \cdot \beta C \int_0^\infty \omega^{-n} \cos\omega \, d\omega$$

$$= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \cdot \beta C \cdot \Gamma(1-n) \cos\frac{(1-n)\pi}{2}$$

und:

$$B = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \cdot \beta C \int_0^\infty \omega^{-n} \sin\omega \, d\omega$$

$$= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \cdot \beta . C \frac{\pi}{2\,\Gamma(n)\cos\frac{(1-n)\pi}{2}}.$$

Da $n < 1$, also $1 - n$ positiv ist, ergibt sich, daß die scheinbare Kapazität $C'$ für unendlich rasche Schwingungen den Normalwert $C$ besitzt, bei endlicher Periodendauer $\tau$ vergrößert ist und mit wachsender Periodendauer zunimmt, was mit den im Abschnitt I, 4 mitgeteilten Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Analog erhält man für die scheinbare Leitfähigkeit den Ausdruck:

$$L' = L + \frac{2\pi}{\tau} B = L + \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{-n} \beta C \cdot \frac{\pi}{2\,\Gamma(n)\cos\frac{(1-n)\pi}{2}},$$

d. h. die scheinbare Leitfähigkeit *steigt* mit *abnehmender* Periodendauer an. Dementsprechend ist also auch im Dielektrikum eine Wärmeentwickelung zu erwarten, die größer ist als die aus dem stationären (wahren) Leitvermögen berechnete und die mit zunehmender Frequenz des Wechselstromes wächst, unter sonst gleichen Bedingungen aber wie die wahre Joulesche Wärme dem Quadrat der Effektivspannung proportional ist. Auch hier besteht also Übereinstimmung mit den im Abschnitt I, 2 besprochenen experimentellen Resultaten.

Daß bei vorübergehender Verbindung eines Kondensators mit einer Stromquelle konstanter elektromotorischer Kraft (z. B. bei Kapazitätsmessungen mittels des ballistischen Galvanometers) der Rückstandsstrom ebenso wie der normale Leitungsstrom den unmittelbar gefundenen Wert der Kapazität erhöht, und zwar um so mehr, je länger die Ladungszeit war, ist unmittelbar ersichtlich.

Es sind also *Wärmeproduktion* im Dielektrikum im Wechselfelde und *Abhängigkeit* der scheinbaren Dielektrizitätskonstante von Frequenz des Wechselstromes, bzw. von der Ladungszeit bei Gleichstrom *notwendige* Folgeerscheinungen, *wenn Rückstandsbildung vorliegt.* Es sind aber nicht auch umgekehrt die ersteren Erscheinungen notwendig auf Rückstandsbildung zurückzuführen, sondern können ohne Rückstandsbildung des Mediums durch andere Ursache (z. B. Leitung) bedingt sein.

Die ponderomotorischen Kräfte, die ein Dielektrikum im relativen Drehfelde erfährt, sind vorläufig nicht berücksichtigt worden. Der gegenseitige Zusammenhang aber von ponderomotorischen Kräften und Wärmeproduktion kann unabhängig von jeder speziellen Hypothese aus allgemeinen energetischen Prinzipien abgeleitet werden.

Erfährt ein ursprünglich ruhendes Dielektrikum im rotierenden Felde ein Drehungsmoment im Sinne der Rotation des Feldes und wird es durch äußere Kräfte in seiner Ruhelage erhalten, so ist die Arbeit, die das elektrische Drehungsmoment an dem relativ zu ihm rotierenden Dielektrikum leistet, äquivalent der im Dielektrikum entstehenden Wärme. Analog ist bei durch äußere Kräfte konstant erhaltener Rotation des Dielektrikums im ruhenden Felde die Arbeit dieser äußeren Kräfte das Äquivalent der entwickelten Wärme. Bezeichnet

also $W$ die pro Zeiteinheit im Dielektrikum entwickelte Wärme, $D$ das Drehungsmoment der elektrischen Kräfte, $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit der relativen Rotation von Feld und Dielektrikum, so können die Größen $W$ und $D$ wechselseitig aus einander bestimmt werden nach der Formel:

$$W = D \cdot \omega .$$

Falls $D$ negativ ist (der Feldrotation entgegengerichtetes Drehungsmoment im Drehfelde, bzw. beschleunigendes Drehungsmoment bei im ruhenden Felde rotierendem Dielektrikum) wird Arbeit gewonnen; das Äquivalent muß dann im verminderten Energieverbrauch in der den stationären Zustand aufrecht erhaltenden Stromquelle liegen.

### 2. Die Unvereinbarkeit der Anomalien mit der Annahme normalen Verhaltens der Dielektrika.

Es soll nun eingehender untersucht werden, inwieweit die im ersten Teil geschilderten Anomalien wirklich unvereinbar mit den Annahmen der allgemeinen Theorie sind, die ein homogenes isotropes Dielektrikum durch die Angabe von zwei Materialkonstanten: Dielektrizitätskonstante $K$ und spezifisches Leitvermögen $\lambda$ als ausreichend charakterisiert annimmt.

Die Erscheinungen des anomalen Ladungsstromes und der Rückstandsbildung fallen sofort als unvereinbar mit diesen Annahmen heraus.

Bezüglich der Erscheinungen der Energieverluste, der Drehungsmomente im Drehfelde und der Variabilität der scheinbaren Kapazität mit Ladungsdauer oder Periodenzahl ist dies nicht auf den ersten Blick ersichtlich; es wurde oben nachgewiesen, daß in einem Medium, das Rückstandsbildung zeigt, auch diese Erscheinungen auftreten müssen, daß sie aber auch ohne Rückstandsbildung denkbar wären.

a) Die Wärmeproduktion kann einfach als Joulesche Wärme des schwach leitenden Dielektrikums aufgefaßt werden. Viele Beobachter haben sich begnügt, die Abhängigkeit der pro Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge $W$ von der Effektivspannung $E$ des Wechselfeldes zu untersuchen und aus dem Resultate, daß $W$ proportional $E^2$ sei, auf Leitung als Ursache zurückgeschlossen. Diese Schlußweise ist nicht bindend;

als Joulesche Wärme müßte die Größe $W$ unabhängig von der Frequenz des Wechselstromes sein, was tatsächlich nicht der Fall ist, und auch im konstanten elektrischen Felde denselben Betrag zeigen. Mehrfache Untersuchungen haben aber das Resultat ergeben, daß die aus dem Leitvermögen im stationären Zustande berechnete Joulesche Wärme viel kleiner ist als die im Wechselfelde direkt beobachtete. So finden Moscicki und Altenberg (II, 49), daß bei Glas nur etwa 2 Proz. der im Wechselfelde erzeugten Wärme dem stationären Leitvermögen entsprechen, und Corbino (II, 51), daß die an einem Paraffinpapierkondensator ermittelten Energieverluste einem Widerstande des Dielektrikums von 1400 $\Omega$ entsprechen würden, während natürlich der wahre Wert des Widerstandes enorm viel größer ist.

Unter Berücksichtigung der quantitativen Verhältnisse sind daher die beobachteten Energieverluste in Dielektrikas mit der Annahme einer normalen Leitung *nicht* vereinbar.

b) Daß ein leitender Körper in einem relativen Drehfelde Drehmomente erfährt, ist bereits von Hertz (III, 1) theoretisch nachgewiesen worden. Verallgemeinerungen dieses Beweises rühren von Heydweiller (III, 3) und Schweidler (III, 5) her. Das Resultat ist folgendes: Rotiert eine Vollkugel vom Radius $R$ und dem spezifischen Leitvermögen (im statischen Maße) $\lambda_i$, die von einem Medium mit dem Leitvermögen $\lambda_a$ umgeben ist, um eine zu der Richtung eines homogenen elektrischen Feldes von der Stärke $F$ senkrechte Achse mit der konstanten relativen Winkelgeschwindigkeit $2\pi/\tau$ (also $\tau$ gleich Umlaufsdauer), so ist das Drehungsmoment gegeben durch die Formel:

$$D = R^3 F^2 \frac{\frac{2}{3}\tau(\lambda_a - \lambda_i)}{1 + \frac{1}{9}\tau^2(2\lambda_a + \lambda_i)^2}.$$

Das Drehungsmoment ist *positiv* (beschleunigend im ruhenden Felde, entgegen der Feldrotation gerichtet im Drehfelde), wenn $\lambda_a > \lambda_i$, *negativ* (hemmend im ruhenden Felde, im Sinne der Feldrotation im Drehfelde), wenn $\lambda_i > \lambda_a$; der absoluten Größe nach hängt $D$ auch von der Winkelgeschwindigkeit ab, und zwar derart, daß bei sonst konstanten Verhältnissen einer bestimmten Geschwindigkeit ein *Maximum* von $D$ entspricht.

Qualitativ sind also die beobachteten Formen des Auftretens ponderomotorischer Kräfte im relativen Drehfeld auf

Leitung zurückzuführen. Zur quantitativen Darstellung erweist sich aber wieder diese Annahme als unzureichend. Die experimentellen Ergebnisse von Arno (II, 7, 15 bis 19, 27) und Threlfall (II, 30, 31) liefern zwischen Drehungsmoment und Feldstärke eine Beziehung: $D$ proportional $F^n$, wo $n < 2$, statt der theoretischen Beziehung $D$ proportional $F^2$.

Bei einigen Versuchen v. Langs (II, 52) ist sogar der Sinn der Rotation der umgekehrte, als es nach dem Betrage von $\lambda_i - \lambda_a$ zu erwarten wäre; schlecht leitende feste Körper in besser leitenden Flüssigkeiten rotieren bisweilen im Sinne des Drehfeldes statt entgegengesetzt.

c) Daß infolge der Leitung die Dielektrizitätskonstante eines Mediums scheinbar zu groß bestimmt wird, ist ein Umstand, der seit langem bei der Messung von Dielektrizitätskonstanten berücksichtigt und entweder durch die Wahl der Versuchsanordnung (sehr kurze Ladungszeiten oder sehr schnelle Schwingungen) oder rechnerisch durch separate Bestimmung der Leitung eliminiert wird. Wollte man die im Abschnitt I, 4 angeführten Beispiele auf diese Weise erklären, so würde man auf Werte des spezifischen Leitvermögens der Medien geführt werden, die von anderer Größenordnung sind als die tatsächlich beobachteten. So z. B. erhält man aus den Angaben Beaulards (vgl. p. 721) für Glas den spezifischen Widerstand $\sigma = 4 . 10^{10}\ \Omega$ cm, während er tatsächlich mindestens zu $10^{14}$ bis $10^{15}$, also rund etwa 10000 mal größer anzunehmen ist.

Obwohl also Erscheinungen von qualitativ gleicher Art wie die beobachteten durch bloße Leitung entstehen können, folgt aus den quantitativen Verhältnissen, daß diese Erklärung unzureichend ist. Dies sowie die überhaupt mit der allgemeinen Theorie unvereinbare Rückstandsbildung zwingen also, in irgend welcher Weise die Anomalien durch modifizierte Annahmen in die Theorie einzufügen.

### 8. Anomalien der Struktur (Inhomogenität).

Die erste Möglichkeit, die Anomalien theoretisch zu begründen, liegt darin, zwar die allgemeinen Grundannahmen der Theorie unverändert beizubehalten, aber jene Medien, die Anomalien zeigen, als ***nicht homogen*** aufzufassen.

In der Tat hat Maxwell (I, 5) gezeigt, daß ein „geschichtetes" Dielektrikum, dessen einzelne Schichten sich durchaus normal verhalten, bei dem aber der Quotient $\lambda/K$ nicht den gleichen Wert in jeder Schichte besitzt, als Ganzes die Erscheinungen der Rückstandsbildung zeigen müsse. Er hat ferner darauf hingewiesen, daß bei nicht blätteriger Struktur, sondern beliebiger räumlicher Anordnung der nicht gleichartigen Bestandteile des Mediums analoge Resultate sich ergeben. Weitere Ausführungen dieser Maxwellschen Theorie der geschichteten Dielektrika finden sich in den Arbeiten von Hess (I, 24) und Houllevigue (I, 33).

In der Maxwellschen Darstellung werden folgende Größen als Funktionen der Materialkonstanten und der Anfangsbedingungen explizit berechnet:

1. Die „disponible Ladung"; 2. der stationäre Leitungsstrom nach unendlich langer Einwirkung einer konstanten elektromotorischen Kraft; 3. der zeitliche Verlauf der freien Rückstandsladung eines Kondensators, dessen Belegungen nach unendlich langdauernder Ladung durch eine konstante elektromotorische Kraft plötzlich entladen und hierauf voneinander isoliert werden; 4. die gesamte Elektrizitätsmenge (gesamte Rückstandsladung), die einen nach unendlicher Ladungsdauer angelegten Kurzschluß zwischen beiden Belegungen durchfließt.

Der Rückstandsstrom bei konstanter elektromotorischer Kraft als Funktion der Zeit wurde von Maxwell nicht berechnet. Dieses Problem führt auf große mathematische Schwierigkeiten und ist daher im folgenden nur so weit ausgeführt, daß die Gültigkeit des Superpositionsprinzips theoretisch abgeleitet werden kann.

Die Voraussetzungen der folgenden Ableitung sind gegenüber denen Maxwells einerseits eingeschränkt durch die Annahme, daß die Dielektrizitätskonstante $K$ des inhomogenen Mediums durchwegs konstant sei, andererseits erweitert durch die Annahme, daß bei Fortschreiten in einer bestimmten Richtung (der $X$-Achse) das Leitvermögen $\lambda$ nicht sprungweise eine endliche Anzahl von Änderungen, den Werten $\lambda_1$ bis $\lambda_n$ entsprechend, sondern kontinuierlich sich ändere, also durch eine beliebige stetige Funktion $\lambda(x)$ darstellbar sei.

Es sei also gegeben eine unendlich ausgedehnte Platte eines Dielektrikums von der Dicke $l$, die zwischen zwei metallischen Belegungen mit konstanten Potentialen $V = E$ und $V = 0$ sich befinde.

Die Dielektrizitätskonstante habe den konstanten Wert $K$, das spezifische Leitvermögen sei eine gegebene Funktion $\lambda(x)$.

Für einen beliebigen Punkt im Dielektrikum gelten dann die Differentialgleichungen:

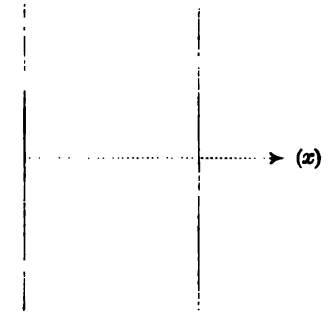


Fig. 1.

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{4\pi}{K}\varrho,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\lambda(x) X],$$

wobei $X$ die elektrische Feldstärke, $\varrho$ die Raumdichte der wahren Ladung bezeichnet.

Daraus erhält man für die Feldstärke $X$ die Differentialgleichung:

$$(3) \qquad \frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\partial[\lambda(x) X]}{\partial x}$$

und durch Integration:

$$(4) \qquad \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \lambda(x) X = \psi(t).$$

$\psi(t)$ ist zunächst eine als Integrationskonstante bei der Integration nach $x$ auftretende willkürliche Funktion der Zeit, die aber dadurch bestimmt ist, daß zu jeder Zeit die Bedingung erfüllt sein muß:

$$(5) \qquad \int_0^l X\,dx = E.$$

Da

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 = \int_0^l \frac{\partial X}{\partial t}\,dx,$$

erhält man aus Gleichung (4):

$$(6) \qquad \psi(t) = \frac{1}{l}\int_0^l \lambda(x) X\,dx.$$

Diese Funktion $\psi(t)$ hat eine einfache physikalische Bedeutung: sie ist der Gesamtstrom pro Flächeneinheit in der Richtung der positiven $x$-Achse; in Gleichung (4) ist die Zerlegung in einen Verschiebungsstrom $\frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$ und einen Leitungsstrom $\lambda(x)X$ angedeutet.

Gleichung (4) liefert nach abermaliger Integration die Formel[1]):

$$(7)\quad \begin{cases} X = e^{-\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t}\left\{\frac{E}{l} + \int_0^t \psi(t)\, e^{+\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t}\, dt\right\} \\ \quad = e^{-\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t}\left\{\frac{E}{l} + \int_0^t dt\left[e^{+\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t}\cdot\frac{1}{l}\int_0^l \lambda(x)\, X\, dx\right]\right\}. \end{cases}$$

Durch diese Integralgleichung ist die Feldintensität $X$ als Funktion von $x$ und $t$ bestimmt; eine explizite Darstellung von $X$ oder $\psi(t)$ daraus zu gewinnen, ist dem Verfasser nicht gelungen. Immerhin genügen die erhaltenen Resultate zum Nachweis des Superpositionsprinzips.

Aus den Gleichungen (4) und (6) folgt, daß bei konstanter Potentialdifferenz die Differentialgleichung gilt:

$$\frac{K}{4\pi}\cdot\frac{\partial X}{\partial t} + \lambda(x)\, X = \frac{1}{l}\int_0^l X\lambda(x)\, dx\,.$$

Wenn also an einem Kondensator, für den $K$, $l$ und $\lambda(x)$ gegeben sind, in zwei Versuchen bloß die Anfangsbedingungen für $t=0$, $X = X_0(x)$ und $X' = X_0'(x)$ sowie die Größen $E$ und $E'$ verschieden sind, so ist in beiden Fällen obige Differentialgleichung erfüllt. Setzt man daher $X_t' = X_t + \Delta_t$, so gilt auch für die Differenz $\Delta_t$ die Gleichung:

$$\frac{K}{4\pi}\frac{\partial \Delta_t}{\partial t} + \lambda(x)\,\Delta_t = \frac{1}{l}\int_0^l \Delta_t\,.\,\lambda(x)\, dx\,,$$

1) *Anmerkung*: Die Formel (7) enthält in der ursprünglichen Publikation (Wiener Sitzungsber. 116. p. 1075) zwei Druckfehler, indem in der ersten Zeile $dx$ statt $dt$, in der zweiten Zeile

$$\int_0^l X\, dx \text{ statt } \frac{1}{l}\int_0^l \lambda(x)\, X\, dx$$

eingesetzt ist.

d. h. der zeitliche Verlauf der Änderung der Feldintensität $X'$ und damit auch der diese Änderung begleitende Rückstandsstrom kann aufgefaßt werden als Superposition der beiden Vorgänge, die sich abspielen würden, wenn zur Zeit $t = 0$ einmal die momentane Verteilung der elektrischen Kraft durch $X_0$, das andere Mal durch $\Delta_0$ gegeben wäre. Wird also in einem beliebigen Stadium der Rückstandsbildung die Potentialdifferenz der Belegungen plötzlich um den Betrag $\Delta E$ und damit die Feldstärke überall um den Betrag $\Delta E/l$ geändert, so ist der weitere Ablauf des Rückstandsstromes gegeben durch die Superposition jenes Stromes, der ohne Änderung der Potentialdifferenz weiter erfolgt wäre, und eines Rückstandsstromes, der durch Anschaltung der Spannung $\Delta E$ an den vorher unendlich lange Zeit ungeladenen Kondensator erzeugt worden wäre.

Die Maxwellsche Theorie der inhomogenen Dielektrika gibt also Aufschluß über die wesentlichsten Eigenschaften, die an den anomalen Dielektrikas tatsächlich vorgefunden werden. Die explizite Darstellung der experimentell beobachtbaren Größen führt aber auf mathematische Schwierigkeiten, so daß eine Prüfung der Theorie durch Vergleich mit der Erfahrung bezüglich der quantitativen Verhältnisse nicht ausgeführt werden kann.

### 4. Anomalien der Leitung.

Eine zweite Möglichkeit der theoretischen Darstellung der Erscheinungen an Dielektrikas besteht darin, die Annahme eines *konstanten* spezifischen Leitvermögens fallen zu lassen und zu ersetzen durch eine solche, die kompliziertere Formen des Leitungsvorganges voraussetzt. Insbesondere in Anlehnung an die bei ionisierten Gasen beobachteten Erscheinungen können die Gesetze der *Ionenleitung* auf flüssige und feste Dielektrika übertragen werden.

Die Theorie der Elektrizitätsleitung in ionisierten Gasen geht von folgenden Voraussetzungen aus:

Durch Wirkung eines „Ionisators" entstehen pro Volum- und Zeiteinheit $q$ Ionenpaare; ein Teil der Ionen verschwindet durch Wiedervereinigung zu neutralen Molekülen („Molisierung"), und zwar ist dieser Betrag, pro Volum- und Zeiteinheit gerechnet, gegeben durch $\alpha n_1 n_2$, wo $n_1$ und $n_2$ die

Zahlen der in der Volumeinheit vorhandenen positiven bzw. negativen Ionen, $\alpha$ ein für eine bestimmte Gattung von Ionenpaaren charakteristischer sogenannter „Wiedervereinigungskoeffizienten" ist. Es gilt also die Gleichung:

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 .$$

In einem elektrischen Felde ist in dieser Gleichung noch ein Glied einzufügen, daß die Differenz der Zahlen der durch den Strom zu- und abgeführten Ionen angibt, also:

$$\frac{dn_1}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 - s_1 ,$$

$$\frac{dn_2}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 - s_2 .$$

Die positiven bzw. negativen Ionen bewegen sich nun in einem elektrischen Felde mit einer der Feldintensität proportionalen Geschwindigkeit $u_1 = c_1 X$, $u_2 = - c_2 X$, worin $c_1$ und $c_2$ die sogenannten spezifischen Geschwindigkeiten oder Beweglichkeiten der beiden Ionenarten sind.

Daraus ergeben sich für den Fall der Elektrizitätsleitung in einem von zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten (in der Distanz $l$) begrenzten ionisierten Gase — bei konstanter Potentialdifferenz $E$ der beiden Platten — folgende Gleichungen:

$$(1) \qquad [n_1 - n_2] \varepsilon = - 4 \pi \frac{\partial X}{\partial x} ,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial n_1}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 - \frac{\partial}{\partial x} [n_1 c_1 X] ,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial n_2}{\partial t} = q - \alpha n_1 n_2 + \frac{\partial}{\partial x} [n_2 c_2 X] ,$$

$$(4) \qquad \int_0^l X dx = E .$$

Die allgemeine Integration dieses Gleichungssystems ist bisher nicht durchgeführt (vgl. J. J. Thomson, Conduction of electricity through Gases p. 64—73, Cambridge 1903); doch sind folgende Resultate leicht ersichtlich:

Durch Einschalten eines elektrischen Feldes wird der ursprüngliche Ionengehalt $n_0 = \sqrt{q/\alpha}$ verringert, die Stromstärke nimmt mit der Zeit ab und erreicht einen stationären

Grenzwert, der bei Anwendung verschiedener Werte der elektromotorischen Kraft nicht dieser proportional ist; das spezifische Leitvermögen eines ionisierten Gases ist also nach Stromschluß zeitlich variabel und im stationären Endzustand eine Funktion der Stromdichte, und zwar eine mit steigender Stromdichte abnehmende.

Die zeitliche Variation erfolgt in Gasen sehr schnell, so daß sie in den meisten Fällen experimentell nicht verfolgt werden kann; die Abhängigkeit des stationären Leitvermögens von der Stromdichte bzw. von der elektromotorischen Kraft zeigt sich in bekannter Weise durch die „Charakteristik", d. i. die Kurve $i = f(E)$, welche zu der Unterscheidung „Ohmscher Strom" (dem Ohmschen Gesetz gehorchender Strom) für kleine Feldintensitäten oder Spannungen, „unvollständig gesättigter Strom" für mittlere und „Sättigungsstrom" (von der elektromotorischen Kraft unabhängiger konstanter Strom) für große Feldintensitäten oder Spannungen geführt hat.

Ferner folgt aus den Gleichungen, daß im stationären Zustande die Ionenzahl pro Volumeinheit nicht mehr räumlich konstant ist: in den den Elektroden benachbarten Schichten sind Ionen des einen (und zwar dem der Elektrode entgegengesetzten) Vorzeichens im Überschusse vorhanden; dadurch ist auch das ursprünglich homogene elektrische Feld gestört, in der Nähe der Elektroden über den Mittelwert erhöht, in der Mitte unter denselben erniedrigt.

Es ist ein naheliegender Gedanke, diese Annahmen auch auf flüssige und feste Dielektrika zu übertragen, die Leitung in diesen Medien als *Ionenleitung* aufzufassen.

Einige anomale Erscheinungen bei der Leitung flüssiger Dielektrika (vgl. im Literaturverzeichnis Abteilung IV), so die zeitliche Abnahme der Stromstärke und die Nichtproportionalität von Stromstärke und elektromotorischer Kraft im stationären Zustande, wurden auch bereits in dieser Weise gedeutet, ja an einigen flüssigen Dielektrikas wurden der Größenordnung nach Ionenbeweglichkeiten und Ionenzahlen bestimmt (Schweidler, IV, 7, 8, 10).

Aber auch die Erscheinungen der Wärmeproduktion, der Rotationen und der Rückstandsbildung lassen sich qualitativ auf diesem Wege ableiten.

Bezüglich der Wärmeproduktion, von der oben nachgewiesen wurde, daß sie nicht als die einem *konstanten* Leitvermögen entsprechende Joulesche Wärme gedeutet werden könne, ist zunächst ersichtlich, daß bei Anwendung alternierender Felder (Wechselstrom) nicht der infolge des Stromdurchganges verringerte Wert des Leitvermögens im stationären Zustande, sondern jener Wert einzusetzen ist, der kurz nach Stromschluß vorhanden ist; es wird damit auch begreiflich, daß das mittlere Leitvermögen abhängig ist von der Dauer der Einwirkung des Feldes in bestimmter Richtung, daß mit abnehmender Periodendauer des Wechselstromes das Leitvermögen immer näher an den — im feldlosen Raume gültigen Wert —

$$(c_1 + c_2)\,\varepsilon\,n_0 = (c_1 + c_2)\,\varepsilon\,\sqrt{\frac{q}{\alpha}}$$

heranrückt.

Bezüglich der Rotationserscheinungen und Drehungsmomente, die nach der im Abschnitt II, 2 angegebenen Formel auf die Leitungskonstanten zurückführbar sind, gilt dasselbe. Insbesondere wird es verständlich, daß das Drehungsmoment $D$ langsamer wächst als $F^2$, da das spezifische Leitvermögen mit steigender Feldintensität abnimmt.

Auch die Rückstandsbildung im engeren Sinne kann zurückgeführt werden auf die durch die Stauung der Ionen in der Nähe der Elektroden bedingten Feldstörungen. Es läßt sich hier einfach die im vorigen Abschnitt behandelte Maxwellsche Theorie der geschichteten Dielektrika anwenden:

Ein Medium mit Ionenleitung ist zwar nicht von vornherein inhomogen, aber es *wird inhomogen* bezüglich seiner Leitfähigkeit infolge des Stromdurchganges; die ursprüngliche Leitfähigkeit im feldlosen Raume wird — wie oben erwähnt — verändert, und zwar in der Nähe der Elektroden stärker erniedrigt als in der Mitte. Somit muß ein derartiges Medium nach einiger Dauer der Einwirkung des elektrischen Feldes das Verhalten eines geschichteten Dielektrikums zeigen.

Wenn so die Annahme von Ionenleitung auch in flüssigen und festen Dielektrikas genügt, die anomalen Erscheinungen in qualitativer Hinsicht zu erklären, so ergeben sich doch Bedenken bei der Anwendung dieser Theorie zur Darstellung der quantitativen Verhältnisse.

Zunächst sind, wie oben erwähnt, Schwierigkeiten mathematischer Natur vorhanden, welche die exakte Lösung des Problems verhindern: in einem Medium, dessen Ionenkonstanten (Ionisierungsstärke $q$, Koeffizient der Wiedervereinigung $\alpha$, Beweglichkeiten $c_1$ und $c_2$) gegeben sind, den Strom als Funktion der Zeit und der elektromotorischen Kraft darzustellen. Diese Schwierigkeiten nun beeinträchtigen wohl die *Anwendbarkeit* der Theorie, ohne natürlich gegen ihre Richtigkeit etwas zu beweisen.

Aber auch in bezug auf die Richtigkeit ergeben sich Bedenken. Wäre die Abnahme des Rückstandsstromes von seinem Anfangswerte auf einen hierzu relativ kleinen Endwert bedingt durch die Entionisierung infolge des Stromdurchganges, so müßte man annehmen, daß der stationäre Strom der unvollkommen oder vollkommen gesättigten Phase angehört (vgl. Fig. 2).

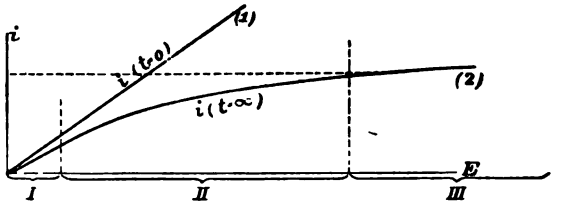



Fig. 2.

I. Phase: Ohmscher Strom.
II. Phase: Unvollständig gesättigter Strom.
III. Phase: Sättigungsstrom.

Es zeigt sich aber tatsächlich, daß der stationäre Endwert des Stromes in einem rückstandbildenden Dielektrikum (z. B. Glas) innerhalb weiter Grenzen dem Ohmschen Gesetze entspricht, d. h. der elektromotorischen Kraft proportional ist (man vergleiche die experimentellen Resultate von E. Warburg, Wied. Ann. 21. p. 622, und F. M. Exner, Verh. d. D. Phys. Ges. 3. p. 26. 1901, sowie E. v. Schweidler (I, 46)). Für den „Ohmschen Strom" (Phase I) aber ist wiederum die Differenz zwischen dem Anfangswerte des Stromes für $t = 0$ (in der Figur durch die Gerade 1 dargestellt) und dem stationären Endwerte (in der Figur Kurve 2) gering.

Die Annahme bloß *einer* Gattung von Ionenpaaren ist also *nicht zulässig.*

Man könnte nun annehmen, daß von jedem Vorzeichen Ionen mit sehr verschiedenen Werten der spezifischen Geschwindigkeit gleichzeitig im Dielektrikum vorhanden seien, so daß bei bestimmter elektromotorischer Kraft für die eine Gattung (die leicht beweglichen) bereits Sättigungsstrom eintritt, während für die anderen (schwer beweglichen) noch Ohmscher Strom herrscht. Aber auch diese kompliziertere Annahme ist vollkommen unvereinbar mit folgender Tatsache:

Nach Einschaltung einer elektromotorischen Kraft vom Werte $E_1$ zur Zeit $t = 0$ beobachtet man einen Strom, darstellbar durch $i_1 = a_1 + f(t)$, wobei $f(t)$ von einem hohen Anfangswerte asymptotisch auf Null absinkt und $a_1$ den stationären Endwert darstellt; wird nach hinreichend langer Zeit $T$, so daß $f(T)$ praktisch gleich Null gesetzt werden kann, die elektromotorische Kraft plötzlich vergrößert, z. B. auf den Wert $E_2 = k E_1$, so beobachtet man tatsächlich einen Strom $i_2$, der als Funktion der Zeit gegeben ist durch die Formel:

$$i_2 = k a_1 + (k - 1) f(t - T),$$

entsprechend der früher erwähnten Proportionalitätsbeziehung zwischen stationärem Teil der Strömung und elektromotorischer Kraft, sowie dem Superpositionsprinzip für den zeitlich variablen Bestandteil des Stromes. Da $f(0)$ groß gegen $a_1$ ist, setzt also unmittelbar nach der Vergrößerung der elektromotorischen Kraft der Strom $i_2$ mit einem Werte ein, der nahezu $(k - 1)$ mal größer ist als der Anfangswert von $i_1$ für $t = 0$.

Der auf Ionenleitung beruhende Strom könnte aber unmittelbar nach Einschaltung der elektromotorischen Kraft $E_2$ höchstens den Wert $k a_1$ erreichen, da ja die Leitfähigkeit des Mediums durch den langdauernden Strom $i_1$ bereits auf den mittleren Betrag von $a_1 / E_1$ herabgedrückt wurde.

Es ist also resumierend über die Anwendung der *Theorie der Ionenleitung* auf flüssige und feste Dielektrika zu sagen, daß die von ihr geforderten anomalen Eigenschaften des spezifischen Leitvermögens (zeitliche Variabilität, Abhängigkeit von Stromdichte) zwar an den tatsächlich beobachteten Erscheinungen *mitbeteiligt* sein können, daß sie aber für sich

allein *nicht ausreichend* ist, die wesentlichen Eigentümlichkeiten der beobachteten Phänomene, vor allem die Gesetze der Rückstandsbildung zu erklären.

### 5. Anomalien des dielektrischen Verhaltens.

Eine dritte Möglichkeit der theoretischen Behandlung liegt in der Annahme von Anomalien des dielektrischen Verhaltens. An Stelle der Voraussetzung, daß die dielektrische Verschiebung (oder Polarisation) zu jeder Zeit der elektrischen Feldstärke proportional sei und daß dieser Proportionalitätsfaktor eben durch den konstanten Wert der Dielektrizitätskonstante gegeben sei, treten kompliziertere Bedingungen, nach denen der jeweilige Wert des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$ nicht allein eine Funktion des simultanen der Feldstärke $\mathfrak{E}$, sondern auch der vorhergegangenen Zustände des Mediums sein soll. Mit anderen Worten: analog wie in bezug auf Elastizität und Magnetismus zeigen viele Medien auch in bezug auf dielektrische Vorgänge *Nachwirkungserscheinungen* oder *Hysteresis* im weiteren Sinne des Wortes.

Allgemein gehaltene Sätze analogen Inhaltes sind oftmals ausgesprochen worden, doch nur wenige Versuche liegen vor, die funktionelle Beziehung zwischen Momentanwert der Verschiebung und der „Vorgeschichte" des Mediums präzise zu formulieren und damit das Fundament für eine eigentliche Theorie der Hysteresiserscheinungen zu schaffen.

#### a) Hysteresis im engeren Sinne.

Unter Hysteresis im engeren Sinne („hysteresis proprement dit") bezeichnen manche Autoren, speziell Beaulard (II, 37) jene Form der Nachwirkungserscheinungen, wie sie an ferromagnetischen Substanzen, besonders an weichem Eisen, experimentell gründlich untersucht und auch theoretisch bis zu einem gewissen Grade befriedigend dargestellt wurden (vgl. Winkelmann, Handbuch der Physik, Bd. V, 1, p. 217—222). Es ist naheliegend, die Gesetze der magnetischen Hysteresis einfach auf die dielektrische zu übertragen: bei variabler Feldintensität ist die einem bestimmten Werte derselben zugeordnete Verschiebung größer bei abnehmendem als bei zunehmendem Gange der Feldintensität; infolgedessen tritt bei zyklischer

Elektrisierung (Wechselspannung) in der graphischen Darstellung eine geschlossene Kurve auf (Hysteresisschleife), deren Flächeninhalt bekanntlich die pro Periode in Wärme umgesetzte Energie angibt. Außerdem führt diese Anschauung zu den Begriffen *„dielektrische Koerzitivkraft"* (durch $OA$) und *„remanente Elektrisierung"* (durch $OB$ dargestellt).

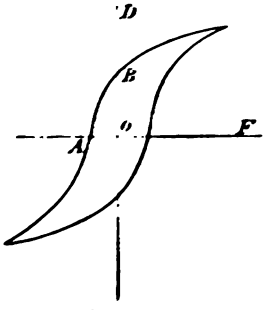


Fig. 3.

Für die Abhängigkeit der Hysteresisarbeit von der Amplitude der periodischen Magnetisierung haben die Versuche im allgemeinen eine Formel ergeben von der Form:

$$W = \eta . H^n, \text{ wo } n = \text{ca. } 1{,}6.$$

Die Übereinstimmung der von Arno (l. c.) gefundenen Beziehung zwischen der elektrischen Hysteresisarbeit und der Effektivspannung ($W$ proportional $E^n$, wo $n$ zwischen 1,5 und 1,96) mit obiger Formel wurde oftmals als Beweis für die Analogie der magnetischen und der dielektrischen Hysteresis betrachtet.

Insbesondere Beaulard (II, 37) hat die Unanwendbarkeit dieser Theorie nachgewiesen. Bei der magnetischen Hysteresis ist die *Amplitude* der periodisch wechselnden magnetischen Feldintensität $\mathfrak{H}$ in erster Linie maßgebend, die *Periodendauer* von minder wesentlichem und noch nicht ganz sicher festgestelltem Einfluß. Die Abhängigkeit der dielektrischen „Hysteresisarbeit" von der Dauer der Periode (vgl. Abschnitt I, 2 und 3) stört die Analogie bedeutend.

Ferner ist darauf hinzuweisen, daß „Remanenz" und „Koerzitivkraft" auf elektrischem Gebiete noch nicht experimentell sichergestellt werden konnten (Germanischskaja, VI, 3) und endlich, daß die Rückstandserscheinungen, bei denen der zeitliche Verlauf des anomalen Stromes das erste Problem bildet, in dieser der magnetischen Theorie nachgebildeten überhaupt nicht darstellbar sind.

### b) Viskose Hysteresis.

$b_1$). Auf Grund der oben angeführten Überlegungen hat eine Reihe von Forschern die Theorie der elektrischen Hysteresis

im engeren Sinne — analog der magnetischen Hysteresis — verworfen und „*viskose Hysteresis*“ (auch „elektrische Viskosität“ genannt) angenommen (Schaufelberger, II, 32, 34; Beaulard, II, 36, 37; Arno in seinen späteren Arbeiten, II, 27; Porter und Morris, II, 22 u. a.).

Hierunter versteht man die Tatsache, daß bei plötzlicher Erregung eines elektrischen Feldes die dielektrische Verschiebung nicht momentan den durch $K\mathfrak{E}$ gegebenen Wert annimmt, sondern ihn erst allmählich ansteigend asymptotisch erreicht. Bei kontinuierlicher (eventuell periodischer) Änderung des Feldes $\mathfrak{E}$ bleibt daher die Verschiebung $\mathfrak{D}$ stets hinter ihrem „Sollwerte“ zeitlich zurück.

Diese, als „dielektrische Nachwirkung“ auch auf dem Gebiete der Rückstandsbildung versuchte Annahme (Boltzmann, Romich und Nowack, I, 7; Hopkinson, I, 9—11; Wüllner, I, 12 u. a.) erfordert nun eine schärfere Fassung.

### $b_2$) Pellats Theorie.

Die einzige bisher tatsächlich erfolgte präzise Formulierung rührt von Pellat her (I, 39, 41 identisch mit II, 33, 39). Der Grundgedanke ist folgender:

Wird an einer Stelle eines dielektrischen Mediums, das hinreichend lange Zeit der Einwirkung eines elektrischen Feldes entzogen war, plötzlich zur Zeit $t=0$ ein Feld von der Intensität $\mathfrak{E}_0$ erzeugt und für $t>0$ konstant erhalten, so nimmt die Verschiebung $\mathfrak{D}$ ebenfalls plötzlich zur Zeit $t=0$ den Wert $K\mathfrak{E}_0$ an, steigt aber dann allmählich an nach der Formel:

$$\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_0 + (1 - e^{-\alpha t})\varepsilon K\mathfrak{E}_0,$$

wo $\alpha$ und $\varepsilon$ zwei Materialkonstanten sind.

Es wird für

$$t = \infty, \quad \mathfrak{D}_t = \mathfrak{D}_\infty = (1 + \varepsilon) K\mathfrak{E}_0.$$

Somit gilt allgemein die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = \alpha e^{-\alpha t} \cdot \varepsilon K\mathfrak{E}_0 = -\alpha(\mathfrak{D}_t - \mathfrak{D}_\infty),$$

d. h, die Verschiebung strebt einem stationären Endwerte $\mathfrak{D}_\infty$ zu und ihre Änderungsgeschwindigkeit ist jederzeit proportional der Differenz dieses Endwertes und des momentanen Wertes.

Bei beliebiger zeitlicher Variation der Feldintensität $\mathfrak{E}_t = f(t)$ gilt ebenfalls die Differentialgleichung:

$$\frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = K\frac{d\mathfrak{E}_t}{dt} + \alpha\varepsilon K\mathfrak{E}_t - \mathfrak{D}_t$$

oder wenn man $\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_t + \mathfrak{D}_t'$ setzt:

$$\frac{d\mathfrak{D}_t'}{dt} = \alpha\varepsilon K\mathfrak{E}_t - \mathfrak{D}_t'.$$

Pellat bezeichnet die Größe $K$ als „wahre Dielektrizitätskonstante", $K\mathfrak{E}$ als „fiktive Polarisation" und $\mathfrak{D}'$ als „wahre Polarisation".

An Stelle dieser — vom Standpunkte der Maxwellschen Theorie aus etwas willkürlich gewählten — Bezeichnungsweise Pellats soll im folgenden $K\mathfrak{E}$ „normale Verschiebung" und $\mathfrak{D}'$ „viskose Verschiebung" genannt werden.

Auf Grund obiger Annahmen ist also ein Dielektrikum im allgemeinen durch vier Materialkonstanten zu charakterisieren: zu Dielektrizitätskonstante $K$ und spezifischem Leitvermögen $\lambda$ treten noch die Größen $\varepsilon$ und $\alpha$; $\varepsilon$ ist von der Dimension einer reinen Zahl und gibt das Verhältnis des stationären Endwertes der viskosen Verschiebung zu der normalen Verschiebung an; $\alpha$ ist von der Dimension einer reziproken Zeit und $1/\alpha$ bedeutet die Relaxationszeit der viskosen Verschiebung.

Es ergeben sich ferner folgende Konsequenzen:

1. Bei konstanter Feldintensität $\mathfrak{E}_0$ ist

$$\mathfrak{D} = K\mathfrak{E}_0 + (1 - e^{\alpha t})\varepsilon K\mathfrak{E}_0$$

und daher der Verschiebungsstrom pro Flächeneinheit

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\alpha}{4\pi}e^{-\alpha t}\varepsilon K\mathfrak{E}_0.$$

Ein diesem Verschiebungsstrom entsprechender Leitungsstrom zirkuliert in der Zuleitung. Hat das Dielektrikum eines Kondensators die Flächengröße der Belegung $f$ und die Dicke $d$, so daß die Potentialdifferenz der Belegungen gegeben ist durch $E = d.\mathfrak{E}_0$, so gilt für den Gesamtstrom in der Zuleitung:

$$J = \alpha\varepsilon CE.e^{-\alpha t}.$$

Wird der Kondensator nach unendlich langer Ladungsdauer entladen, indem zur Zeit $t = 0$ die Belegungen ohne

Einschaltung einer elektromotorischen Kraft direkt leitend verbunden werden, so ist

$$\mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 e^{-\alpha t},$$

$$y_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = -\frac{\alpha}{4\pi} e^{-\alpha t} \varepsilon K \mathfrak{E}_0 = -y_1,$$

d. h. der durch „Freiwerden des Rückstandes" entstandene Strom $y_2$ ist dem rückstandsbildenden Strom" $y_1$ entgegengesetzt gleich. Wird der Kondensator nach der endlichen Ladungsdauer $T$ entladen, so ist

$$\text{für } t = 0;\ \mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T}),$$

$$\text{für } t > 0;\ \mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha t},$$

$$y_2 = \frac{\alpha}{4\pi} \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha t} = \frac{\alpha \varepsilon K \mathfrak{E}_0}{4\pi} [e^{-\alpha t} - e^{-\alpha (t+T)}],$$

d. h. der nun auftretende Strom entspricht dem *Superpositionsprinzip.*

Qualitativ sind also die empirischen Gesetze der Rückstandsbildung aus der Pellatschen Theorie abzuleiten; in quantitativer Beziehung besteht Nichtübereinstimmung bezüglich der Form des zeitlichen Verlaufes, für den die Theorie eine Exponentialfunktion $e^{-\alpha t}$, die Erfahrung die Formel $B t^{-n}$ liefert. Pellat meint, die Versuche J. Curies zitierend (I, 21), daß die Beobachtung nicht hinreichend genau sei, um die Differenz zwischen der theoretischen und der empirischen Formel mit Sicherheit konstatieren zu können. Dies ist wohl ein Irrtum; außer J. Curies haben auch die von Pellat nicht zitierten Experimentaluntersuchungen von Kohlrausch (I, 1), Hopkinson (I, 9, 10, 11), Giese (I, 15), Dieterici (I, 18) u. a. das gleiche Resultat ergeben, und Beobachtungsfehler von der Größe der Differenz der nach beiden Formeln berechneten Stromstärken sind schlechthin ausgeschlossen.

Bezüglich der Gesetze der Rückstandsbildung bedarf also die Pellatsche Theorie jedenfalls einer Modifikation.

2. Für den Fall eines sinusförmigen Wechselfeldes

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

lassen sich die Erscheinungen übersehen, indem man in die im zweiten Teile, Abschnitt 1, angeführten Formeln (p. 722

und 723) für die unbestimmt gelassene Funktion $f(u)$ auf Grund der eben abgeleiteten Resultate setzt:

$$f(u) = \alpha \varepsilon C . e^{-\alpha u}.$$

Man erhält also:

$$i = \frac{2\pi F_0}{\tau}\left\{A \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B \sin \frac{2\pi t}{\tau}\right\},$$

wobei

$$A = \int_0^\infty \alpha \varepsilon C e^{-\alpha u} \cos \frac{2\pi u}{\tau} du = \varepsilon C \frac{\alpha^2 \tau^2}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2},$$

$$B = \int_0^\infty \alpha \varepsilon C e^{-\alpha u} \sin \frac{2\pi u}{\tau} du = \varepsilon C \frac{2\pi \alpha \tau}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2}.$$

Somit — unter weiterer Anwendung der auf p. 723 abgeleiteten Formeln — für die *scheinbare Kapazität* des Kondensators:

$$C' = C\left[1 + \varepsilon \frac{\alpha^2 \tau^2}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2}\right],$$

also mit zunehmender Periodendauer steigende Kapazität, und für den *reziproken Wert des scheinbaren Widerstandes:*

$$L' = L + \varepsilon C \frac{4\pi^2 \alpha}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2},$$

also Zunahme des scheinbaren Leitvermögens und damit der in Wärme umgewandelten Energie mit abnehmender Periodendauer.

Die qualitative Übereinstimmung mit den empirischen Resultaten ist wieder vorhanden.

### $b_3$) Modifikation der Pellatschen Theorie.

Eine Erweiterung der Pellatschen Theorie erhält man durch folgende Annahmen:

Die dielektrische Verschiebung besteht aus einem Bestandteil (normale Verschiebung), der jeweils der momentanen Feldintensität proportional ist, und einer *Summe von Gliedern*, deren jedes für sich nach einem analogen Gesetz, wie es die Pellatsche Theorie annimmt, einem Grenzwert zustrebt, bei denen aber die einer bestimmten Feldintensität entsprechenden Endbeträge und die Zeitkonstanten verschieden sind. Also:

$$\mathfrak{D} = K\mathfrak{E} + \Sigma \mathfrak{D}_i',$$

wobei $\mathfrak{D}_i'$ der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d\mathfrak{D}_i'}{dt} = \alpha_i[\varepsilon_i K\mathfrak{E} - \mathfrak{D}_i'].$$

Im stationären Endzustande bei $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$ und $t = \infty$ wird:

$$\mathfrak{D}_\infty = \mathfrak{E}_0 K\{1 + \Sigma\varepsilon_i\}.$$

Wird ein Kondensator zur Zeit $t = 0$ plötzlich geladen, so ist der Rückstandsstrom gegeben durch:

$$\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_0\{1 + \Sigma\varepsilon_i(1 - e^{-\alpha_i t})\},$$

$$i = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = \frac{K\mathfrak{E}_0}{4\pi}\Sigma\alpha_i\varepsilon_i e^{-\alpha_i t}).$$

Die Zeitfunktion $f(t)$, die den Abfall des Rückstandsstromes darstellt, ist also durch eine Summe von einfachen Exponentialfunktionen gegeben. Da jede Funktion, die stetig abnimmt und deren sämtliche Ableitungen ebenfalls stetig abnehmen, mit beliebiger Annäherung durch eine solche Summe von Exponentialfunktionen darstellbar ist, genügt die modifizierte Theorie jeder empirisch gefundenen Form für $f(t)$, welche obiger Bedingung bezüglich der Derivierten entspricht.

Die Gesetze der Superposition bei beliebig veränderlicher Feldintensität $\mathfrak{E}_t$ gelten natürlich für die Summe der Exponentialfunktionen ebenso wie für die einzelne im früheren Falle der Pellatschen Theorie. Speziell für einfach periodische Wechselfelder ergibt sich:

$$\mathfrak{D} = \sin\frac{2\pi t}{\tau}\cdot K\mathfrak{E}_0\left\{1 + \Sigma\varepsilon_i\frac{\alpha_i\tau^2}{4\pi^2 + \alpha_i^2\tau^2}\right\},$$

$$-\cos\frac{2\pi t}{\tau}\cdot K\mathfrak{E}_0\Sigma\varepsilon_i\frac{2\pi\alpha_i\tau}{4\pi^2 + \alpha_i^2\tau^2}$$

und analog wie früher für die scheinbare Kapazität und die scheinbare Leitfähigkeit Ausdrücke, die nur durch die Einfügung des Summenzeichens modifiziert sind.

Diese Formeln lassen sich nun noch in anderer Weise darstellen. Statt einer endlichen Anzahl von Gliedern der Form $\mathfrak{D}_i = \varepsilon_i K\mathfrak{E}$ kann man eine unendliche Anzahl annehmen, deren Zeitkonstanten $\alpha_i$ kontinuierlich zwischen den Werten 0 und $\infty$ abgestuft sind. An Stelle der Sättigungswerte $\varepsilon_i K\mathfrak{E}$ tritt dann eine Funktion $K\mathfrak{E}\,s(\alpha)\,d\alpha$, die angibt, welcher Betrag vom gesamten Verschiebungsvektor auf jene Bestandteile entfällt, deren

Zeitkonstanten zwischen den Grenzen $\alpha$ und $\alpha + d\alpha$ liegen, analog wie man z. B. in der Theorie der Strahlung die Intensitätsverteilung über verschiedene Wellenlängen $\lambda$ darstellt durch eine Funktion $f(\lambda)$ und die Gesamtintensität setzt:

$$J = \int_0^\infty f(\lambda)\, d\lambda .$$

Die obigen Gleichungen nehmen dann folgende Form an: Im stationären Zustande für $t = \infty$ bei konstanter Feldstärke $\mathfrak{E}_0$:

$$\mathfrak{D}_\infty = K\mathfrak{E}_0 \left\{1 + \int_0^\infty \varepsilon(\alpha)\, d\alpha\right\};$$

bei plötzlicher Einschaltung eines Feldes $\mathfrak{E}_0$ zur Zeit $t = 0$:

$$\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_0 \left\{1 + \int_0^\infty \varepsilon(\alpha)[1 - e^{-\alpha t}]\, d\alpha\right\},$$

$$i = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = f(t) = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{E}_0 \int_0^\infty \alpha \,.\, \varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t}\, d\alpha;$$

bei einfach periodischem Felde $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin 2\pi t/\tau$:

$$\mathfrak{D} = \sin\frac{2\pi t}{\tau} \cdot K\mathfrak{E}_0 \left\{1 + \int_0^\infty \frac{\varepsilon(\alpha)\alpha^2\tau^2}{4\pi^2 + \alpha^2\tau^2}\, d\alpha\right\},$$

$$- \cos\frac{2\pi t}{\tau} \cdot K\mathfrak{E}_0 \int_0^\infty \frac{2\pi\,\varepsilon(\alpha)\,\alpha\,\tau}{4\pi^2 + \alpha^2\tau^2}\, d\alpha .$$

Man kann nun auch umgekehrt die Forderung stellen, die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ zu bestimmen, wenn z. B. der zeitliche Verlauf des Rückstandsstromes $i = f(t)$ empirisch ermittelt ist.

Es wurde bereits erwähnt, daß empirisch mit großer Annäherung sich die Formel $i = f(t) = b\,\mathfrak{E}_0 \,.\, t^{-n}$ ergibt.

Aus der Gleichung:

$$\frac{K}{4\pi}\int_0^\infty \alpha \,.\, \varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t}\, d\alpha = b \,.\, t^{-n}$$

erhält man dann[1]):

$$\alpha \,.\, \varepsilon(\alpha) = \frac{4\pi b}{K} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \alpha^{-(1-n)}$$

oder

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{4\pi b}{K} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \alpha^{-(2-n)}.$$

Da $n<1$, also $(2-n)$ positiv ist, wird für $\alpha=0$ die Funktion $\varepsilon(\alpha) = \infty$; auch müßte im stationären Zustande die durch

$$\mathfrak{D}_\infty = K\mathfrak{E}_0\left(1+\int_0^\infty \varepsilon(\alpha)\,d\alpha\right)$$

gegebene Verschiebung unendlich groß werden, und zwar durch die Integration von Null bis zu einem beliebig kleinen $\alpha_1$, während $\int_{\alpha_1}^{\infty}$ endlich bleibt. Es wurde bereits im Teile I, Abschnitt 1, p. 715, erwähnt, daß die Annahme exakter Gültigkeit der empirischen Näherungsformel $i = b\,.\,t^{-n}$ zu unwahrscheinlichen Konsequenzen führt. Nimmt man an, daß für sehr große Zeiten diese Formel nicht mehr gilt, sondern daß dann die wirkliche Stromstärke rascher absinkt und daß $\int_0^\infty i\,dt$ endlich bleibt, so ist dann auch die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ zu modifizieren, und zwar gerade in jenem Gebiet, für welches $\alpha = 0$ oder sehr klein ist; denn der Rückstandsstrom nach sehr langer Zeit ($t$ groß) ist bedingt durch jene Bestandteile der viskosen Verschiebung, die sich sehr langsam ändern ($\alpha$ sehr klein). Es genügt also im Intervalle von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$, wo $\alpha_1$ sehr klein sein kann, $\varepsilon(\alpha)$ durch eine andere Funktion als die oben angegebene zu ersetzen, die der Bedingung genügt: $\int_0^{\alpha_1} \varepsilon(\alpha)\,d\alpha$ = endlich, für $\alpha<\alpha_1$ aber die obige Form beizubehalten; das Resultat ist, daß $\int_0^\infty \varepsilon(\alpha)\,d\alpha$ endlich bleibt und daß die Stromstärke $i = \int_0^\infty \alpha\,\varepsilon(\alpha)\,e^{-\alpha t}\,d\alpha$ bis zu großen Werten von $t$ durch die Formel $i = b\,.\,t^{-n}$ dargestellt wird, erst dann rascher als nach dieser Formel gegen Null konvergiert und daß die „Rückstandsladung" $\int_0^\infty i\,dt$ endlich bleibt. Für die Vorgänge, die

1) Vgl. Serret, Differential- und Integralrechnung, III/1, p. 190.

sich im periodisch wechselnden Felde abspielen, ist die Form der Funktion $\varepsilon(\alpha)$ für kleine Werte des Argumentes unwesentlich, solange die Periodendauer $\tau$ nicht sehr groß wird, da die dabei auftretenden Koeffizienten $A$ und $B$ durch Integration von Produkten $\alpha\,\varepsilon(\alpha)$, bzw. $\alpha^2\,\varepsilon(\alpha)$ entstehen, somit die Integration im Intervall von 0 bis $\alpha_1$ ($\alpha_1$ sehr klein) Beträge liefert, die unendlich klein von der ersten, bzw. zweiten Ordnung sind.

Die Charakterisierung eines Dielektrikums erfolgt also nach der modifizierten Pellatschen Theorie folgendermaßen:

Außer der Dielektrizitätskonstante $K$ und dem spezifischen Leitvermögen $\lambda$ des Mediums ist noch eine Funktion $\varepsilon(\alpha)$ im Bereich $\alpha = 0$ bis $\alpha = \infty$ anzugeben; das Integral

$$\int_0^\infty \alpha \,.\, \varepsilon(\alpha)\, e^{-\alpha t}\, d\alpha = f(t)$$

liefert dann das Gesetz des zeitlichen Verlaufes des Rückstandsstromes; umgekehrt kann die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ aus der empirisch gefundenen Funktion $f(t)$ ermittelt werden. Vermöge der Gültigkeit des Superpositionsprinzipes, die sich aus den Annahmen der Theorie ergibt, lassen sich dann die Gesetze des Stromverlaufes bei beliebig variierender Feldintensität prinzipiell ableiten, also insbesondere die Vorgänge im Wechselfelde: die scheinbare Kapazitätsänderung bei Variation der Periode und die in Wärme umgewandelte Energie, ferner die damit zusammenhängenden ponderomotorischen Kräfte, die ein Dielektrikum bei relativer Rotation zu einem konstanten elektrischen Felde erfährt.

Die Fassung dieser erweiterten Theorie ist also allgemein genug, um beliebige empirisch gefundene oder noch zu findende Formen des zeitlichen Verlaufes der Rückstandsbildung darstellen zu können und präzisiert genug, um die quantitative, nicht bloß qualitative Ableitung der übrigen Hauptformen anomalen Verhaltens aus der Rückstandsbildung zu ermöglichen.

Bloß in einem Detail ergibt sich ein Widerspruch zwischen den Resultaten der theoretischen Ableitung und dem direkten Ergebnis des Experimentes; die im Wechselfelde umgewandelte Energie und damit die Drehungsmomente im rotierenden Felde

müssen nach der Theorie proportional dem Quadrat der Feldintensität sein, während von einigen Beobachtern eine andere Beziehung (proportional $\mathfrak{E}^n$, wo $n = 1{,}5$ bis $1{,}96$, vgl. p. 720) gefunden wurde. In diesen Fällen spielt vielleicht die anomale Art der Leitung mit, deren Effekte sich über die der dielektrischen Nachwirkung überlagern.

### b$_4$) Molekulartheoretische Bedeutung der modifizierten Pellatschen Theorie.

Die Zerlegung des tatsächlich vorhandenen Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$ in eine beliebig große Anzahl von Teilbeträgen, die alle einer bestimmten Differentialgleichung genügen, aber für die darin enthaltenen Parameter $\alpha$ und $\varepsilon$ verschiedene Werte aufweisen, erscheint auf den ersten Blick als eine gekünstelte, rein mathematische Fiktion, die schließlich nur darauf hinausläuft, für die Darstellung einer komplizierten empirisch gegebenen Funktion beliebig viele Konstanten einzuführen. Es soll nun gezeigt werden, wie diese Fiktion einer einfachen physikalischen Interpretation fähig ist.

In der vormaxwellschen Zeit wurden die dielektrischen Erscheinungen gedeutet als bedingt durch die Einlagerung kleiner (molekularer) *leitender* Teilchen; diese Anschauung gipfelt in der bekannten Clausius-Mosottischen Theorie.

Eine Zeitlang wurden durch die Maxwellsche Formulierung der Grundgleichungen die molekularphysikalischen Betrachtungsweisen auf dem Gebiete der Dielektrika ganz zurückgedrängt.

Die Anschauungen der modernen Ionen- und Elektronentheorie führten aber solche wieder ein, und zwar konnten die Vorstellungen der alten Theorie mit leichten Modifikationen wieder verwendet werden. An Stelle des *leitenden* Partikels oder Moleküls — grob versinnlicht durch eine kleine Metallkugel in einem isolierenden Medium eingebettet — tritt das aus entgegengesetzt geladenen *Ionen* (negatives Elektron und positives Restatom) bestehende Molekül. Die relative Verschiebbarkeit der beiden Bestandteile ersetzt die Leitung im alten Sinne. Die Moleküle als Ionenkomplexe können nun auch als „*Resonatoren*“ aufgefaßt werden, indem die aus der Gleichgewichtslage gebrachten Ionen eine bestimmte Dauer der

Eigenschwingung besitzen. Die Erscheinungen der normalen und anomalen Dispersion elektrischer Wellen, sowie die damit zusammenhängende Absorption werden in der modernen Theorie von diesem Gesichtspunkte aus behandelt.

Es liegt nun nahe anzunehmen, daß neben Molekülen, deren Ionen eine Eigenschwingung von bestimmter Dauer und bestimmtem Dämpfungsverhältnis bedingen, auch solche vorhanden seien, bei denen die Dämpfung so groß ist, daß an Stelle einer Schwingung eine *aperiodisch gedämpfte* Bewegung auftritt. Unter dem Einfluß eines plötzlich auftretenden, dann konstant bleibenden elektrischen Feldes stellt sich dann der neue Gleichgewichtszustand derart her, daß die Abweichung von diesem nach einer Exponentialfunktion $e^{-\alpha t}$ abnimmt.

Die molekularphysikalische Deutung der Pellatschen Theorie wäre daher folgende: Neben den Molekülen, die als Resonatoren mit bestimmter (sehr kleiner) Schwingungsdauer einem relativ langsam veränderlichen elektrischen Felde ohne merkliche Phasendifferenz folgen, sind in einem anomalen Dielektrikum auch Moleküle vorhanden, in denen die Verschiebung der Ionen aperiodisch gedämpft erfolgt, und zwar so, daß die Konstante $\alpha$ der obigen Formel für alle Moleküle den gleichen Wert besitzt. Die Größe $\varepsilon$ gibt an, in welchem Verhältnis der Verschiebungsfluß dieser aperiodisch gedämpften Moleküle zu dem der oszillatorisch beweglichen steht.

In der modifizierten Theorie wird angenommen, daß nicht *eine* Gattung solcher aperiodisch gedämpfter Ionenkomplexe mit bestimmter Zeitkonstante $\alpha$ vorhanden sei, sondern eine große Anzahl verschiedener Gattungen mit verschiedenen Werten ihrer Zeitkonstanten $\alpha_i$, die in verschiedener Anzahl (proportional $\varepsilon_i$) pro Volumeinheit vorhanden sind.

Eventuell kann man die möglichen Werte der Dämpfung als kontinuierlich abgestuft auffassen und die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ gibt an, nach welchem Gesetze die Häufigkeit der von 0 bis $\infty$ variierenden $\alpha$-Werte verteilt ist.

Die Zerlegung einer empirisch gegebenen Funktion in eine Summe einfacher Exponentialfunktionen entspricht daher physikalisch einer Sonderung der Wirkungen, die von verschiedenen Gruppen unter sich gleichartiger Moleküle hervorgebracht werden.

## Dritter Teil.

### Experimentelle Beiträge zur Untersuchung der Rückstandsbildung.

#### 1. Versuchsanordnung.

Um den Rückstandsstrom bezüglich seines zeitlichen Verlaufes, seiner Abhängigkeit von Ladungsdauer, elektromotorischer Kraft, Temperatur usw. zu untersuchen, wurde die Methode der direkten galvanometrischen Messung angewendet. Das benutzte Instrument war ein hoch empfindliches Drehspulengalvanometer, dessen Reduktionsfaktor $3{,}19 \cdot 10^{-10} \frac{A}{\text{pars}}$ betrug; hieraus und aus der Schwingungsdauer und Dämpfung der Spule berechnete sich der ballistische Reduktionsfaktor zu $1{,}34 \cdot 10^{-9} \frac{Cb}{\text{pars}}$.

Nebenstehende Fig. 4 zeigt die Schaltung an; der zu untersuchende Kondensator $K$ ist einerseits mit einem Punkt von konstantem Potential $+E$ verbunden, andererseits über das Galvanometer $G$ zur Erde abgeleitet. Um den heftigen Ausschlag des Galvanometers beim Ein- oder Ausschalten der elektromotorischen Kraft $E$ zu vermeiden, ist ein Schlüssel $S_I$ als Kurzschluß der Galvanometerleitung angebracht; zugleich gestattete es dieser Schlüssel in Verbindung mit dem Schlüssel $S_{II}$ jederzeit, ohne Unterbrechung des den Kondensator durchfließenden Stromes, den Nullpunkt zu prüfen. Bei Anwendung kleiner Werte von $E$ konnte bei geöffnetem Schlüssel $S_I$ aus dem ballistischen Ausschlage die Kapazität des Kondensators $K$ bestimmt werden.

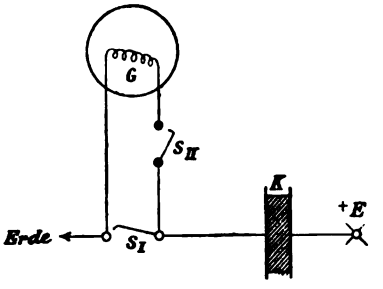


Fig. 4.

Da in verschiedenen Versuchsreihen sehr verschiedene Meßbereiche nötig waren, wurden diese nach Bedarf geändert. Eine Erhöhung des Meßbereiches (Erniedrigung der Empfindlichkeit) auf das Zehn-, Hundert- oder Tausendfache des normalen Wertes wurde in der üblichen Weise durch Anlegen

von Shunts zur Galvanometerspule bewerkstelligt. Um den Meßbereich auch auf schwache Ströme (von etwa $10^{-9}$ Amp. abwärts bis $10^{-11}$ Amp.), die einen für genauere Messung zu geringen Ausschlag erzeugten, auszudehnen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen: Die über das Galvanometer zur Erde führende Stromleitung kann durch einen Schlüssel $S_{III}$ unterbrochen werden. Parallel zu dieser Leitung ist eine zweite geschaltet, die einen Glimmerkondensator $GK$ von 1 Mikrof. Kapazität enthält. Der Glimmerkondensator nimmt dann während der Unterbrechungsdauer $T$ infolge des (als konstant vorausgesetzten) Stromes $i$ die Ladung $iT$ an, welche durch

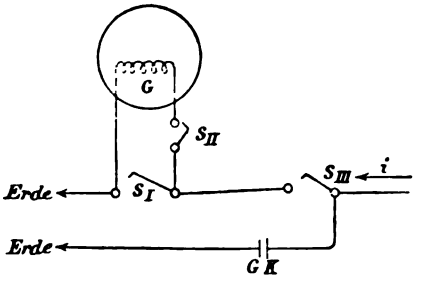



Fig. 5.

Schließen von $S_{III}$ aus dem ballistischen Ausschlag ermittelt werden kann. Ein Strom, der einen Dauerausschlag von 1 pars bewirkt, gibt pro Sekunde der Unterbrechungszeit einen ballistischen Ausschlag von 1/4,21 partes, also bei 500 Sek. Unterbrechungszeit einen Ausschlag von 119 partes, d. i. eine Erhöhung der Empfindlichkeit auf das rund 120fache der normalen. Infolge der großen Kapazität des Glimmerkondensators bleibt das Potential der aufgeladenen Belegung auch nach längerer Zeit klein, z. B. 0,16 Volt nach 500 Sek. im früheren Beispiel, so daß die den Strom $i$ unterhaltende elektromotorische Kraft $E$ (gewöhnlich 100—300 Volt) praktisch als konstant betrachtet werden kann. Der Ladungsverlust durch Leitung und Rückstandsbildung im Glimmerkondensator selbst war zu vernachlässigen.

Unmittelbar nach der Ein- oder Ausschaltung der elektromotorischen Kraft ist die zeitliche Änderung des Rückstandsstromes eine so rapide, daß das infolge seiner starken Dämpfung

träge Galvanometer eine Messung der zu einer bestimmten Zeit vorhandenen Stromstärke durch den gleichzeitig beobachteten Ausschlag unmöglich macht; erst nach etwa einer halben Minute kann der — nun langsamer abnehmende — Ausschlag als Maß des Stromes angesehen werden. Um nun auch kurz nach Stromschluß wenigstens *einen* Wert der Stromstärke zu bestimmen, wurde folgende Schaltung angewendet:

Parallel dem Galvanometer liegt eine Leitung, die den Schlüssel $S_1$ und einen Widerstand $W_1$ ($W_1 = 1$ Ohm) enthält. An den Enden des Widerstandes $W_1$ liegt wieder eine Leitung, die einen Akkumulator $A$ und einen Regulierwiderstand $R$

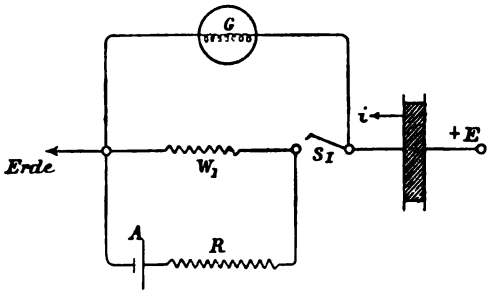



Fig. 6.

enthält. Das Verfahren ist folgendes: Durch einen Vorversuch wird auf dem Wege der Extrapolation *ungefähr* ermittelt, welche Stromstärke zu einer bestimmten Zeit $t_1$ nach Einschaltung der elektromotorischen Kraft im Galvanometer zu erwarten ist. Beim zweiten definitiven Versuche bleibt $S_1$ zunächst geschlossen; der Akkumulator $A$ entsendet einen Zweigstrom (Hilfsstrom) in das Galvanometer, der durch Variation des Regulierwiderstandes $R$ auf eine beliebige Größe gebracht werden kann und einen konstanten Ausschlag $a$ hervorruft. Nun wird zur Zeit $t = 0$ im Hauptkreis die elektromotorische Kraft $E$ eingeschaltet; da $S_1$ geschlossen ist und $W_1$ (1 Ohm) gegenüber dem Widerstande der Galvanometerspule (10000 Ohm) immer noch als Kurzschluß aufgefaßt werden kann, geht der normale Ladungsstrom und der mit hohen Anfangswerten einsetzende Rückstandsstrom $i$ zunächst über $S_1$

und $W_1$ zur Erde, während im Galvanometer der Hilfsstrom den konstanten Ausschlag $a$ erhält. Zu jener Zeit $t = t_1$, für welche auf Grund des Vorversuches zu erwarten ist, daß $i = a$ ist, wird der Schlüssel $S_1$ geöffnet. Es wird damit gleichzeitig der Hilfsstrom $a$ unterbrochen und der zu messende Strom $i$ über das Galvanometer geleitet. War wirklich im Momente der Unterbrechung $i = a$, so bleibt in diesem Momente die abgelenkte Galvanometerspule im Gleichgewichte, um dann der Abnahme von $i$ entsprechend ihren Ausschlag zu verringern; war aber im Momente der Unterbrechung $i$ größer oder kleiner als $a$, so erfolgt auch eine stoßartige Vergrößerung oder Verkleinerung des Ausschlages. Auf diese Weise kann also die Stromstärke $i$ bestimmt werden für eine relativ kurze Zeit (in praxi etwa 10 Sek.) nach Stromschluß.

### 2. Versuchsresultate.

Zunächst soll in drei Beispielen (Versuchsreihen 1, 2 und 3) der auf p. 714 besprochene Unterschied der beiden Typen anomalen Ladungsstromes gezeigt werden.

#### Versuchsreihe 1.

Zylinderkondensator mit *Petroleum* gefüllt; $t$ Zeit in Sekunden von Stromschluß an gerechnet, $E$ Potentialdifferenz in Volt, $i$ beobachteter Strom in Skalenteilen, $a$ stationärer Endwert desselben, $y$ gegeben durch $i - a$.

Von $t = 0$ bis $t = 1000$: $E = 300$ Volt; für $t > 1000$: $E = 0$.

| $t$ | $i$ | $y$ | $t$ | $i$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | — | 180 | 126,3 | 0,8 |
| 15 | 240 | 114,5 | 240 | 126 | 0,5 |
| 30 | 188 | 62,5 | 300 | 126,2 | 0,7 |
| 45 | 168 | 42,5 | 660 | 125,5 | 0,0 |
| 60 | 151 | 25,5 | 900 | 125,5 | 0,0 |
| 90 | 134 | 8,5 | 1000 | — | — |
| 120 | 129 | 3,5 | 1020 | −0,2 | −0,2 |
| 150 | 127 | 1,5 | 1060 | −0,1 | −0,1 |

Versuchsreihe 2.

Plattenkondensator mit *Toluol* gefüllt; Bezeichnung wie bei 1.

$t = 0$ bis $t = 3600$ sec: $E = 200$ Volt; $t > 3600$ sec: $E = 0$ Volt.

| $t$ | $i$ | $y$ | $t$ | $i$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | — | 300 | 110 | 32 |
| 30 | 375 | 297 | 360 | 105 | 27 |
| 60 | 260 | 182 | 420 | 101 | 23 |
| 90 | 182 | 104 | 480 | 99 | 21 |
| 120 | 155 | 77 | 540 | 95 | 17 |
| 150 | 140 | 62 | 600 | 94 | 16 |
| 180 | 130 | 52 | 3600 | 78 | 0,0 |
| | | | | — | — |
| 240 | 117 | 39 | 3650 | −0,5 | 0,5 |

Versuchsreihe 3.

*Glaskondensator* (Eprouvette, als Belegungen innen und außen Schwefelsäure); Bezeichnung wie früher.

Von $t = 0$ bis $t = 900$ sec: $E = 300$ Volt; für $t > 900$ sec: $E = 0$ Volt.

| $t$ | $i_1$ | $y_1 = i_1 - a$ | $t$ | $i_2 = y_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | — | — | 900 | — |
| 10 | 22 | 16 | 910 | −18 |
| 20 | 16 | 10 | 920 | − 9,8 |
| 30 | 12,6 | 6,6 | 930 | − 7,3 |
| 50 | 11,1 | 5,1 | 950 | − 5,0 |
| 80 | 9,1 | 3,1 | 980 | − 3,9 |
| 100 | 9,0 | 3,0 | 1000 | − 3,1 |
| 150 | 8,0 | 2,0 | 1050 | − 2,0 |
| 600 | 6,0 | 0,0 | 1500 | - 0,0 |
| 890 | 6,0 | 0,0 | 1800 | − 0,0 |

Das Resultat ist also, daß in den Versuchsreihen 1 und 2 der Strom allmählich auf einen stationären Endwert abnimmt, nach Ausschaltung der elektromotorischen Kraft aber ein Strom merklicher Intensität überhaupt nicht vorhanden ist, daß dagegen in der Versuchsreihe 3 zunächst analog wie in den ersten beiden Fällen eine Abnahme des Stromes erfolgt, nach Ausschaltung der elektromotorischen Kraft aber ein *entgegen-*

*gesetzt gerichteter* Strom auftritt, dessen Stärke innerhalb der Beobachtungsfehler der Größe $y_1$, d. i. dem Überschusse des Stromes $i_1$ über seinen stationären Endwert, gleich ist.

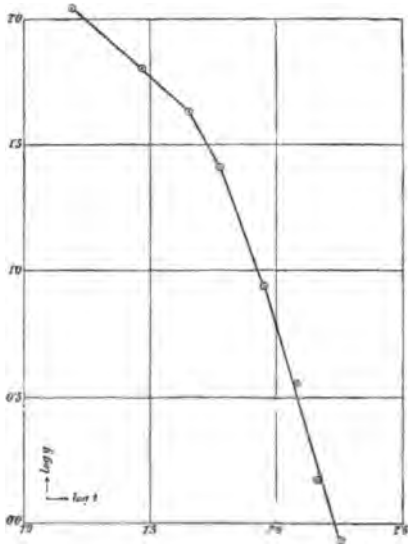



Fig. 7 zu Versuchsreihe 1, Petroleumkondensator.

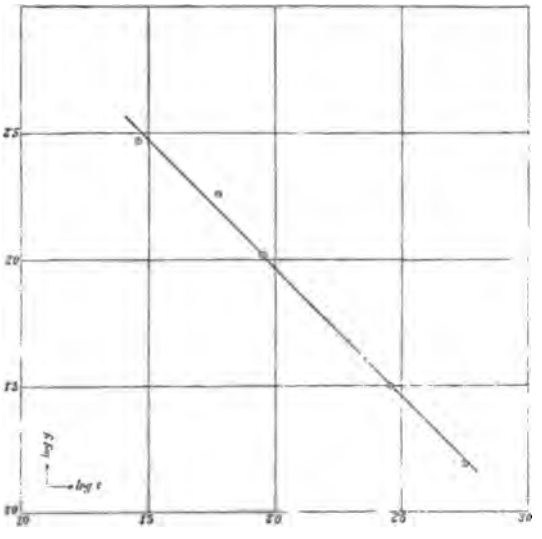



Fig. 8 zu Versuchsreihe 2, Toluolkondensator.

Die Kurven, Figg. 7, 8, und 9 geben ein Bild von den Gesetzen des zeitlichen Verlaufes der variablen Bestandteile

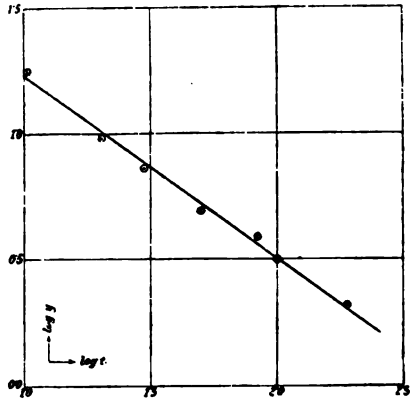



Fig. 9 zu Versuchsreihe 3, Glaskondensator.

$y = i - a$; die Abszissen stellen $\log t$, die Ordinaten $\log y$ dar; für Figg. 8 und 9 erhält man angenähert *Gerade*: also da

$$\log y = \text{Const.} - n \log t,$$

daraus

$$y = B \,.\, t^{-n}.$$

Für Fig. 7 dagegen tritt an Stelle einer Geraden eine stark nach abwärts gekrümmte Kurve, die allerdings dann in eine Gerade überzugehen scheint.

Trotz der mehr oder weniger großen Analogie in der Form des zeitlichen Ganges sind die Fälle 1 und 2 scharf zu sondern von 3. Bei 1 und 2 liegt ein *nicht reversibler* anomaler Ladungsstrom vor, der theoretisch auf die Eigenschaften eines Mediums mit *Ionenleitung* zurückgeführt werden kann. Bei 3 liegt ein *reversibler* anomaler Strom, also eigentliche *Rückstandsbildung* vor. Bei *flüssigen* Dielektrikas ist vom Verfasser immer nur der erste Typus konstatiert worden, bei *festen* Dielektrikas der zweite.

Die von vielen Beobachtern (vgl. p. 716) gefundene und durch den oben angeführten Versuch 3 bestätigte Formel:

$$i_1 - a = -i_2 = B \,.\, t^{-n}$$

für den zeitlichen Verlauf der Rückstandsströme wurde bisher

immer nur für relativ kleine Zeitintervalle (bis zu einer Stunde etwa) experimentell geprüft.

Die beiden folgenden Versuchsreihen erstrecken sich über weit längere Zeiten.

### Versuchsreihe 4.

*Glimmerkondensator* von 1 Mikrofarad Kapazität, durch 69 Stunden = 248400 Sek. auf 300 Volt geladen; zur Zeit $t=0$ entladen; für den Entladungsstrom $i_2$ wurde gefunden:

| $t$ (sec) | $i_2$ (partes) | Temp. $\vartheta$ (° C.) | $t$ (sec) | $i_2$ (partes) | Temp. $\vartheta$ (° C.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | 19,2 | 3000 | 8,8 | 19,6 |
| 40 | (149) | — | 4000 | 7,0 | 19,7 |
| 60 | 104 | — | 6150 | 5,30 | 19,8 |
| 100 | 73 | — | 10000 | 3,92 | 20,0 |
| 150 | 56 | — | 25000 | 2,06 | 20,4 |
| 200 | 46,5 | — | 100000 | 0,64 | 21,2 |
| 300 | 36,0 | — | 110000 | 0,58 | 20,6 |
| 600 | 23,2 | — | 346500 | 0,130 | 21,6 |
| 1000 | 17,0 | 19,4 | 520000 | 0,080 | 22,8 |
| 2000 | 11,3 | 19,5 | | | |

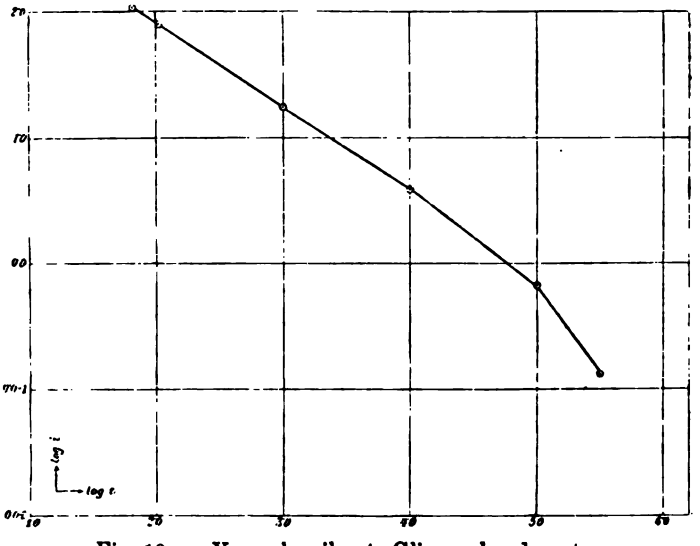



Fig. 10 zu Versuchsreihe 4, Glimmerkondensator.

Die graphische Darstellung gibt bis zu ca. $t = 10000$ sec ($\log t = 4{,}0$) einen linearen Verlauf, also Gültigkeit der obigen Formel; für $t > 100000$ fällt der Strom rascher, als es der Formel entspricht. Doch kann daraus noch nicht auf ihre Ungültigkeit für hohe Werte von $t$ geschlossen werden.

Der Voraussetzung nach sollte die Formel $i = B t^{-n}$ gelten für den anomalen *Ladungsstrom* sowie für den *Entladungsstrom* dann, wenn der Kondensator *unendlich* lange Zeit vorher auf konstanter Potentialdifferenz geladen gehalten wurde. Nach *endlicher* Ladungsdauer $\delta$ ist nach dem Superpositionsprinzipe zu erwarten, daß der Entladungsstrom

$$i_2 = f'(t) - f'(t+\delta) = B[t^{-n} - (t+\delta)^{-n}].$$

Da im vorliegenden Falle $\delta$ zwar groß (rund 250000 sec), aber nicht unendlich ist, so wird beim Entladungsstrom das Glied $(t+\delta)^{-n}$ für kleine Werte von $t$ zu vernachlässigen, für große Werte von $t$ aber merklich sein.

Eine Beobachtung des über den eventuellen konstanten Leitungsstrom übergelagerten *Ladungsstromes*, die direkt $f(t)$ gegeben hätte, mußte aus praktisch-technischen Gründen unterbleiben: die elektromotorische Kraft — durch Abzweigen vom Straßenstrom erhalten — war nicht vollkommen konstant, so daß ihren Variationen entsprechende normale Ladungs- und Entladungsströme sich über den zu beobachtenden Strom überlagerten und unregelmäßige, sehr bedeutende Schwankungen des Ausschlages hervorriefen.

### Versuchsreihe 5.

*Paraffinpapierkondensator* von 5 Mikrof. Kapazität, durch 6 Tage und 5 Stunden = 450000 Sek. auf 300 Volt geladen; zur Zeit $t = 0$ entladen; für den Entladungsstrom $i_2$ wurde gefunden:

| $t$ (sec) | $i_2$ (partes) | Temp. $\vartheta$ (° C.) | $t$ (sec) | $i_2$ (partes) | Temp. $\vartheta$ (° C.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | 20,4 | 180 | 8580 | — |
| 60 | 22500 | — | 200 | 8080 | — |
| 100 | 19000 | — | 300 | 6560 | — |
| 120 | 11200 | — | 600 | 4550 | — |

| $t$ (sec) | $i_2$ (partes) | Temp. $\vartheta$ (° C.) | $t$ (sec) | $i_2$ (partes) | Temp. $\vartheta$ (° C.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 3640 | — | $2{,}17 \cdot 10^6$ | 139 | 19,0 |
| 1500 | 3090 | — | $2{,}33 \cdot 10^6$ | 186,5 | 22,8 |
| 3000 | 2420 | 21,0 | $2{,}42 \cdot 10^6$ | 201,5 | 23,6 |
| 10000 | 1640 | 20,6 | $2{,}51 \cdot 10^6$ | 213 | 24,2 |
| 93000 | 748 | 19,8 | $2{,}68 \cdot 10^6$ | 202 | 24,4 |
| 250000 | 596 | 22,6 | $3{,}11 \cdot 10^6$ | 202 | 26,0 |
| 332000 | 491 | 21,4 | $3{,}19 \cdot 10^6$ | 209 | 27,0 |
| 508500 | 403 | 22,4 | $3{,}72 \cdot 10^6$ | 170 | — |
| 768600 | 287 | — | $10{,}89 \cdot 10^6$ | 17,0 | 17,2 |
| $1{,}20 \cdot 10^6$ | 186,5 | 19,8 | $11{,}69 \cdot 10^6$ | 16,0 | 18,0 |
| $1{,}48 \cdot 10^6$ | 154,5 | 18,4 | $12{,}11 \cdot 10^6$ | 13,1 | 14,0 |
| $1{,}72 \cdot 10^6$ | 162 | 20,2 | $15{,}97 \cdot 10^6$ | 8,2 | 12,8 |
| $1{,}80 \cdot 10^6$ | 155 | 19,7 | $15{,}98 \cdot 10^6$ | 18,0 | 18,8 |
| $2{,}08 \cdot 10^6$ | 155 | 20,0 | | | |

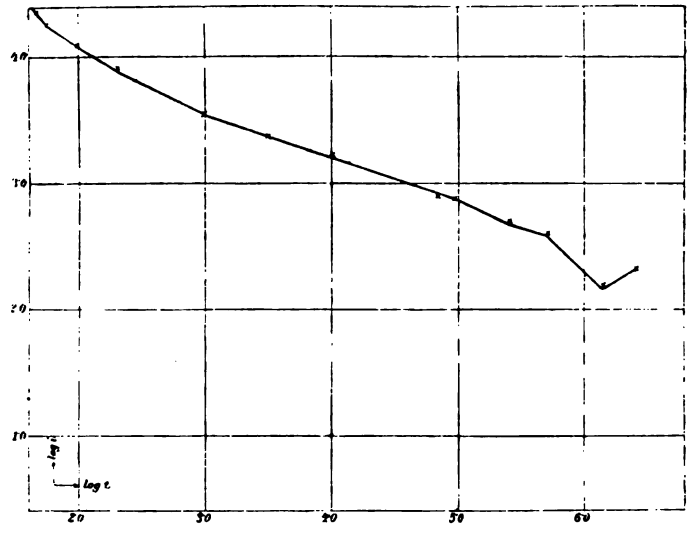



Fig. 11 zu Versuchsreihe 5, Paraffinpapierkondensator.

Wie die graphische Darstellung (Fig. 11) zeigt, ist hier die obige Formel weniger gut erfüllt; $\log i$ fällt zuerst rascher (entsprechend $n = 0{,}86$), dann langsamer (entsprechend $n = 0{,}34$); für große Werte von $t$ ($t > 100000$) wird der Gang ganz unregelmäßig, in offenbarem Zusamenhang mit Temperatur-

schwankungen. Erhöhter Temperatur entsprechen höhere Stromwerte. Nach mehr als einem halben Jahre ($t = 16$ Millionen Sekunden) ist der Rückstandsstrom noch sehr merklich; da die zeitliche Änderung nun eine sehr langsame ist, kommen die Temperatureinflüsse rein zur Geltung. Einer Erhöhung der Temperatur von 12,8° C. auf 18,8° C. entspricht ein Anwachsen der Stromstärke von 8,2 auf 18,0 partes.

Im Anschluß hieran seien einige Versuche über die Beeinflussung der Rückstandsbildung in *Glas* durch die Temperatur mitgeteilt.

### Versuchsreihe 6.

*Glaskondensator*, bestehend aus Kochkolben, Belegungen innen und außen Schwefelsäure; in fünf Versuchen bei verschiedenen Temperaturen wurde der Entladungsstrom gemessen, nachdem der Kondensator in allen fünf Fällen durch eine Zeit $\delta = 1800$ sec auf 300 Volt geladen worden war. Die Temperaturen betrugen:

bei a) . . . . . $\vartheta = 18°$ C.
„ b) . . . . . $\vartheta = 30$ „
„ c) . . . . . $\vartheta = 38$ „
„ d) . . . . . $\vartheta = 40$ „
„ e) . . . . . $\vartheta = 47$ „

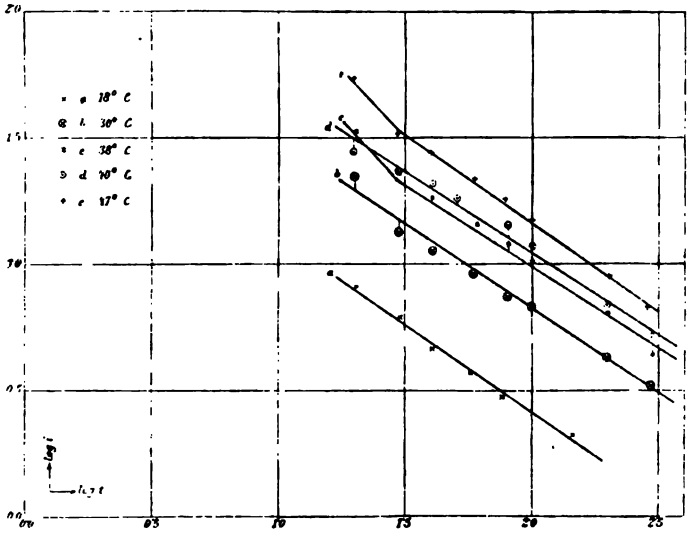


Fig. 12 zu Versuchsreihe 6, Glaskondensator.

Unter Hinweglassung der zugehörigen Zahlentabellen sei direkt auf die graphische Darstellung in Fig. 12 verwiesen.

Es ergibt sich, daß die Kurven $\log i = f(\log t)$ angenähert Gerade von gleicher Neigung sind, aber um so höher liegen, je größer die zugeordnete Temperatur ist. Es gilt also auch angenähert die Formel $i = B.t^{-n}$, und zwar ist $n$ durch die Temperatur *nicht wesentlich* beeinflußt, während $B$ mit *steigender* Temperatur *zunimmt.*

Mit *steigender* Temperatur nimmt also der Rückstandsstrom zu, ohne die Form des zeitlichen Verlaufes erheblich zu ändern.

Die folgende Versuchsreihe enthält eine *Prüfung des Superpositionsprinzips.* Wird ein Kondensator unter sonst gleichen Bedingungen (gleiche elektromotorische Kraft, gleiche Temperatur) bei *variabler Ladungsdauer* $\delta$ geladen und dann der Entladungsstrom gemessen, so sollte bei Gültigkeit des Superpositionsprinzips die Gleichung erfüllt sein:

$$i = Bt^{-n} - B(t+\delta)^{-n}.$$

Versuchsreihe 7.

*Glimmerkondensator* von 1 Mikrof. Kapazität; $E = 300$ Volt, $\delta$ bzw. gleich 2, 10, 60, 600, 1800, 250000 Sek. Die graphische Darstellung in Fig. 13.

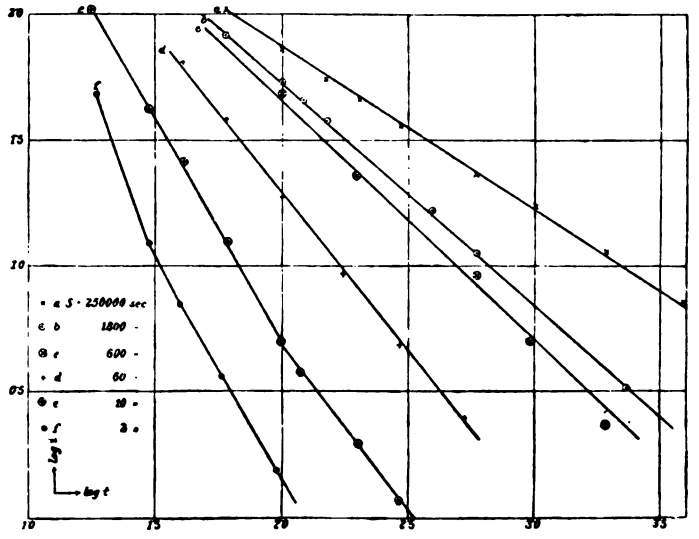



Fig. 13 zu Versuchsreihe 7, Glimmerkondensator.

## Tabelle zur Versuchsreihe 7.

| $t$ | $\delta = 2$ sec | | $\delta = 10$ sec | | $\delta = 60$ sec | | $\delta = 600$ sec | | $\delta = 1800$ sec | | $\delta = 250000$ sec | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ber. | beob. | ber. | beob. | ber. | beob. | ber. | beob. | ber. | beob. | ber. | beob. |
| 0 | $\infty$ | — | $\infty$ | — | $\infty$ | — | $\infty$ | — | $\infty$ | — | $\infty$ | — |
| 10 | 34 | — | 112 | — | 128 | — | 283 | — | 305 | — | 316 | — |
| 30 | 6 | 12 | 26 | 40 | 78 | — | 134 | — | 146 | — | 157 | — |
| 40 | 3,5 | 6,8 | 17,5 | 25 | 59 | 62 | 109 | 112 | 120 | 120 | 131 | (149) |
| 60 | 1,4 | 3,5 | 9,1 | 12 | 35,3 | 36 | 79,4 | 77 | 90,2 | 81 | 101 | 104 |
| 100 | 0,9 | 1,5 | 4,3 | 4,8 | 18,3 | 17,5 | 51,9 | 49 | 62,3 | 53 | 73,3 | 73 |
| 150 | — | — | 1,6 | — | 10,9 | 10,0 | 35,6 | 34,5 | 45,6 | 37,5 | 56,6 | 56 |
| 200 | 0,3 | — | 1,5 | 1,8 | 5,9 | — | 27,7 | 23,0 | 36,2 | — | 47,2 | 46,5 |
| 300 | — | 0,3 | 0,6 | 1,1 | 3,9 | 3,8 | — | — | 26,0 | 20,0 | 36,5 | 36,0 |
| 600 | — | — | — | — | 1,5 | 2,0 | 8,4 | 9,0 | 14,0 | 11,1 | 23,5 | 23,2 |
| 1000 | — | — | — | — | 0,8 | 0,7 | — | — | 8,3 | — | 17,0 | 17,0 |
| 2000 | — | — | — | — | — | — | 1,83 | 2,2 | 4,7 | — | 11,0 | 11,3 |
| 3000 | — | — | — | — | — | — | 1,03 | 1,5 | 1,2 | — | 8,5 | 8,8 |

Eine tabellarische Zusammenstellung der beobachteten und der berechneten Werte von $i$ gibt die Tabelle auf p. 761.

Die beobachteten und die berechneten Werte stimmen für $\delta = 60$ sec und $\delta = 600$ sec gut überein (für $\delta = 250000$ sec ist die ausgeglichene Kurve der beobachteten Werte als berechnete eingesetzt, daher die Übereinstimmung selbstverständlich); im übrigen ist zwar die Größenordnung dieselbe, die Abweichung aber doch eine die Beobachtungsfehler übersteigende.

Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß für kleine Ladungszeiten ($\delta = 2$ sec und 10 sec) der eingesetzte Wert von $\delta$ ungenau ist, ferner daß in den verschiedenen Messungsreihen nicht dieselbe Temperatur zu erzielen war, was ebenfalls Voraussetzung der exakten Übereinstimmung ist.

Weitere Versuche prüfen die Richtigkeit der Annahme, daß bei verschiedenen Werten $E$ der elektromotorischen Kraft die zugehörigen Werte von $B$ in der Formel $i = B \cdot t^{-n}$ der elektromotorischen Kraft *proportional* sind.

### Versuchsreihe 8.

*Glimmerkondensator* von 1 Mikrof. Kapazität, Ladungsdauer $\delta = 600$ sec, $E$ variabel.

Die Versuchsergebnisse sind zusammengestellt in der folgenden Tabelle.

| $t$ (sec) | $E =$ 10 Volt | 20 Volt | 50 Volt | 100 Volt | 300 Volt |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | — | — | — | — |
| 30 | 4,8 | 8,5 | 22 | 47 | — |
| 50 | 2,9 | 5,3 | 13,8 | 29 | 94 |
| 60 | — | 4,3 | 11,6 | 24,1 | 77 |
| 100 | 1,5 | 2,6 | 8,0 | 15,0 | 47 |
| 250 | 0,53 | 1,09 | 2,83 | — | 19 |
| 500 | 0,24 | 0,56 | 1,54 | 2,99 | 9,3 |
| 1000 | 0,13 | 0,21 | 0,60 | 1,20 | 4,7 |

Die Abweichungen liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; die obige Annahme erweist sich also berechtigt bei Variationen der elektromotorischen Kraft im Verhältnis von 1 : 30.

**Anwendung der experimentell gefundenen Resultate.**

Im folgenden soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie aus der Untersuchung des Rückstandsstromes die dadurch bedingten Anomalien anderer Art numerisch berechnet werden können.

Aus Versuchsreihe 4 ergibt sich für einen Glimmerkondensator von 1 Mikrof. Kapazität bei $E = 300$ Volt für den Rückstandsstrom:

$$i = B \cdot t^{-n}; \quad B = 1370 \text{ partes} = 4{,}38 \cdot 10^{-7} A$$
$$n = 0{,}64.$$

Setzt man $B = CE\beta$, so erhält man:

$$\beta = 1{,}46 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}}\right).$$

Die *Rückstandsladung* $R_t = \beta C E \frac{t^{1-n}}{1-n}$ ist somit für

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t =$ 1 sec | 4,8 | Promille | der | disponiblen | Ladung |
| 10 „ | 9,5 | „ | „ | „ | „ |
| 100 „ | 20,9 | „ | „ | „ | „ |
| 1000 „ | 46,0 | „ | „ | „ | „ |

Für die Änderung der scheinbaren Kapazität $C'$ mit der Periodendauer $\tau$ erhält man aus der Formel (vgl. p. 723)

$$C' = C\left[1 + \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \beta\, \Gamma(1-n) \cos\frac{(1-n)\pi}{2}\right]$$

folgende Werte:

| | | |
|---|---|---|
| $\tau =$ 0,0001 sec, | Frequenz = 10000, | $C' =$ 1,000021 $C$ |
| 0,001 | 1000 | 1,000046 |
| 0,01 | 100 | 1,000106 |
| 0,1 | 10 | 1,000248 |
| 1,0 | 1 | 1,000556 |

Analog ergibt sich aus der Formel für den reziproken scheinbaren Widerstand:

$$L' = L + \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{-n} \beta\, C \frac{\pi}{2\,\Gamma(n)\cos\frac{(1-n)\pi}{2}}$$

für den scheinbaren Widerstand des Kondensators infolge seiner Rückstandsbildung $\omega = 1/(L' - L)$ für

| | | |
|---|---|---|
| $\tau$ = 0,0001 sec, | Frequenz = 10000, | $\omega$ = 14000 Ohm |
| 0,001 | 1000 | 61000 |
| 0,01 | 100 | 267000 |
| 0,1 | 10 | 1180000 |
| 1,0 | 1 | 5150000 |

Diesem scheinbaren Widerstand entspricht dann die analog wie die Joulesche Wärme berechnete Energievergeudung im Kondensator.

Eine Zusammenstellung der Werte von $\beta$ und $n$, die in analoger Weise für andere Substanzen die auf Rückstandsbildung beruhenden Phänomene numerisch berechnen läßt, ergibt:

*Glimmer* (Versuch 4) bei ca. 20° C.:

$$\beta = 1{,}46 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}}\right); \quad n = 0{,}64.$$

*Glas* (Eprouvette, Versuch 3) bei ca. 20° C.:

$$\beta = 78 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}}\right); \quad n = 0{,}74.$$

*Glas* (Kochkolben, Versuch 6) bei ca. 18° C.:

$$\beta = 15{,}4 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}}\right); \quad n = 0{,}70.$$

*Paraffinpapier* (Versuch 5) bei ca. 20° C.:

$$\beta = 128 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}}\right); \quad n = 0{,}34.$$

## Vierter Teil.

### Zusammenfassung der Resultate.

I. Es wurde zunächst auf Grund der bisher vorliegenden experimentellen Ergebnisse eine Darstellung der *Hauptformen* anomalen Verhaltens der Dielektrika und der dabei gefundenen Gesetzmäßigkeiten gegeben. Als solche Hauptformen werden unterschieden:

1. die *Rückstandsbildung;*
2. die *Energieverluste* (Wärmeproduktion) in Dielektrikas unter dem Einfluß eines Wechselfeldes;
3. die *ponderomotorischen Kräfte*, die ein Dielektrikum in einem relativ zu ihm rotierenden Felde erfährt;

4. die scheinbare *Abhängigkeit der Kapazität* eines Kondensators von *Ladungsdauer* bei konstanter Spannung, bzw. *Periodendauer* bei Wechselspannung.

II. Es wurde hierauf gezeigt, daß das Vorhandensein von Rückstandsbildung in einem Medium notwendig auch die unter 2. bis 4. genannten Formen anomalen Verhaltens bedingt und daß aus den empirisch gefundenen Gesetzen der Rückstandsbildung auch die Gesetze für diese Formen quantitativ ableitbar sind.

Es wird ferner gezeigt, daß zwar ohne Rückstandsbildung diesen anderen Formen analoge Erscheinungen durch Leitung des Dielektrikums zustande kommen können, daß aber eine Berücksichtigung der bisher gefundenen Ergebnisse quantitativen Charakters diese Erklärung als unzureichend erscheinen läßt.

Die Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten, die Anomalien der Dielektrika theoretisch zu behandeln, führt auf folgende Resultate:

Die Annahme *inhomogener Struktur* des Dielektrikums (Maxwellsche Theorie der geschichteten Dielektrika) führt zu qualitativ richtigen Folgerungen, doch ist infolge mathematischer Schwierigkeiten eine exakte Lösung der gestellten Probleme und damit ein Vergleich von Theorie und Erfahrung in quantitativer Beziehung vorläufig undurchführbar.

Die Annahme *anomaler Leitung* (Ionenleitung) führt teilweise zu qualitativ richtigen Ergebnissen, teilweise aber zu Konsequenzen, die mit der Erfahrung im Widerspruch stehen. Anomale Leitung kann daher in manchen Fällen an den beobachteten Erscheinungen *mitbeteiligt* sein, ohne eine ausreichende Erklärung zu liefern.

Die Annahme *anomaler Vorgänge dielektrischer Natur (dielektrische Nachwirkung, Hysteresis)* ist unzureichend in der Form, wie sie bei den Erscheinungen der magnetischen Hysteresis mit Erfolg verwendet wurde. Die von Pellat präzisierte Annahme einer dielektrischen Nachwirkung (viskosen Hysteresis), daß die dielektrische Verschiebung nach einem bestimmten einfachen Gesetz ihres zeitlichen Verlaufes einem der jeweiligen Feldintensität proportionalen stationären Endwert zustrebe

$$\left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = K\frac{d\mathfrak{E}}{dt} - \frac{d}{dt}[\mathfrak{D} - \varepsilon K\mathfrak{E}]\right)$$

gibt im allgemeinen eine gute Annäherung an die beobachteten Erscheinungen, doch bleiben in einzelnen Punkten Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung bestehen.

Es wird nun eine Modifikation dieser Theorie durchgeführt, die darin besteht, daß die dielektrische Verschiebung in eine Summe beliebig vieler Glieder zerlegt wird, von denen jedes einzelne demselben einfachen Gesetz folgt wie nach der Pellatschen Theorie, doch unter Variation der in der Formel enthaltenen Parameter.

Es folgt eine Interpretation der dieser Theorie zugrunde liegenden Annahmen vom molekularphysikalischen Standpunkte aus.

III. Experimentelle Untersuchungen der Rückstandsbildung mittels einer galvanometrischen Methode bestätigen und ergänzen die schon von anderen Autoren gefundenen Resultate bezüglich des zeitlichen Ganges der Rückstandsbildung, der Gültigkeit des Superpositionsprinzips, des Einflusses der Temperatur und der Proportionalität zwischen Rückstandsstrom und Spannung.

An einem Beispiel wird gezeigt, wie aus zwei Konstanten, deren Werte aus der Untersuchung des Rückstandsstromes ermittelt wurden, die anderen Formen anomalen Verhaltens durch Angabe numerischer Werte dargestellt werden können.

## Literatur.

### I. Rückstand.

1. R. Kohlrausch, Pogg. Ann. **91.** p. 56. 1854.
2. W. v. Bezold, Pogg. Ann. **114.** p. 437. 1861.
3. A. Gaugain, Ann. chim. phys. (4) **2.** p. 276, 313. 1864.
4. R. Clausius, Abh. über mech. Wärmeth. II. p. 135—162. 1867.
5. J. C. Maxwell, Treatise I. p. 374. 1873.
6. A. Wüllner, Pogg. Ann. **153.** p. 22. 1874.
7. L. Boltzmann, Romich u. Nowack, Wiener Sitzungsber. **70.** p. 381. 1874.
8. B. Riemann, Ges. Werke p. 48, 345, 353. 1876.
9. J. Hopkinson, Phil. Trans. **166.** p. 489. 1876.
10. — Phil. Mag. (5) **2.** p. 314. 1876; auch Proc. Roy. Soc. **25.** p. 496. 1876/77.
11. — Phil. Trans. **167.** p. 599. 1877/78.
12. A. Wüllner, Wied. Ann. **1.** p. 247. 1877.

13. H. A. Rowland, Americ. J. of Math. **1.** p. 53. 1878.
14. W. E. Ayrton u. J. Perry, Proc. Roy. Soc. **27.** p. 238. 1878.
15. W. Giese, Wied. Ann. **9.** p. 161. 1880.
16. H. A. Rowland u. E. L. Nichols, Phil. Mag. (5) **11.** p. 414. 1881.
17. H. Hertz, Wied. Ann. **20.** p. 279. 1883.
18. C. Dieterici, Wied. Ann. **25.** p. 545. 1885.
19. A. Wüllner, Wied. Ann. **32.** p. 19. 1887.
20. L. Arons, Wied. Ann. **35.** p. 291. 1888.
21. J. Curie, Ann. chim. phys. (6) **18.** p. 203. 1889.
22. H. Muraoka, Wied. Ann. **40.** p. 328. 1890.
23. E. Bouty, Compt. rend. **110.** p. 846, 1362. 1890; auch Ann. chim. phys. (6) **27.** p. 62. 1892.
24. A. Hess, Lum. electr. **46.** p. 401, 507. 1892; auch Journ. de Phys. (3) **2.** p. 145. 1893.
25. B. Dessau, Rend. R. Acc. d. Linc. (5) **2.** II. p. 86. 1893.
26. F. Bedell u. C. Kinsley, Phys. Rev. **2.** p. 170. 1894.
27. R. Lombardi, Mem. R. Acc. Torino (2) **44.** 1894.
28. A. S. Dunstan, Electr. World **26.** p. 3. 1895.
29. A. Hess, Eclair. electr. **4.** p. 205. 1895.
30. — Eclair electr. **7.** p. 450. 1896.
31. H. V. Carpenter, Phys. Rev. **4.** p. 238. 1896.
32. Th. Wulf, Wiener Sitzungsber. **105.** p. 667. 1896.
33. L. Houllevigue, Journ. de Phys. (3) **6.** p. 113, 120, 153. 1897.
34. J. Hopkinson u. E. Wilson, Proc. Roy. Soc. **60.** p. 425. 1897.
35. F. Hasenöhrl, Wiener Sitzungsber. **107.** p. 1035. 1898.
36. H. A. Rowland u. T. D. Penniman, J. Hopk. Un. Circ. **17.** p. 52. 1898.
37. A. Naccari, Atti Torino **34.** p. 1088. 1899.
38. L. M. Potts, J. Hopk. Un. Circ. **18.** p. 59. 1899.
39. H. Pellat, Compt. rend. **128.** p. 1312. 1899; auch Ann. chim. phys. (7) **18.** p. 150. 1899.
40. L. M. Potts, J. Hopk. Un. Circ. **19.** p. 62. 1900.
41. H. Pellat, Journ. de Phys. (3) **9.** p. 313. 1900.
42. C. V. Drysdale, Electrician **46.** p. 890. 1901.
43. A. W. Ashton, Phil. Mag. (6) **2.** p. 501. 1901.
44. J. Buchanan, Phil. Mag. (6) **3.** p. 240. 1902.
45. E. v. Schweidler, Wiener Sitzungsber. **111.** p. 573. 1902.
46. — l. c. p. 579.
47. U. Seiler, Mitt. Phys. Ges. Zürich Nr. 3. p. 12. 1902.

## II. Hysteresis.

1. W. Siemens, Pogg. Ann. **125.** p. 137. 1864.
2. A. Naccari u. F. Bellati, Journ. de Phys. (2) **1.** p. 480. 1882.
3. J. Borgmann, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. (1) **18.** p. 6. 1886; auch Journ. de Phys. (2) **8.** p. 217. 1888.
4. J. Trowbridge u. W. C. Sabine, Phil. Mag. (5) **30.** p. 328. 1890; auch Phys. Rev. **1.** p. 183. 1892.

5. J. Trowbridge u. W. C. Sabine, Rep. Brit. Ass. Leeds p. 781. 1890.
6. C. P. Steinmetz, Electrician **28.** p. 384, 408, 425. 602. 1892; auch Lum. electr. **44.** p. 95. 1892; auch Elektrotechn. Zeitschr. **13.** p. 227. 1892.
7. R. Arno, Rend. R. Acc. dei Linc. **1.** p. 284. 1892.
8. P. Janet, Journ. de Phys. (3) **2.** p. 337. 1893.
9. A. Hess, Lum. electr. **47.** p. 466. 1893; auch Journ. de Phys. (3) **2.** p. 145. 1893.
10. G. Benischke, Wiener Sitzungsber. **102.** p. 1345. 1893.
11. A. Kleiner, Wied. Ann. **50.** p. 138. 1893.
12. C. Borel, Compt. rend. **116.** p. 1192. 1893; auch Arch. de Genève (3) **30.** p. 45. 1893.
13. W. Weiler, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unt. **7.** p. 1. 1893.
14. H. Fritz, Diss. Zürich 1893.
15. R. Arno, Cim. (3) **33.** p. 15. 1893.
16. — Rend. R. Acc. dei Linc. (5) **2.** I. p. 341. 1893.
17. — l. c. (5) **2.** II. p. 260. 1893.
18. — l. c. (5) **3.** I. p. 585. 1894.
19. — l. c. (5) **3.** II. p. 294. 1894.
20. A. Kleiner, Arch. de Genève (3) **32.** p. 282. 1894.
21. H. Düggelin, Vierteljahrsschr. d. naturf. Ges. Zürich **40.** p. 121. 1895.
22. A. W. Porter u. D. K. Morris, Proc. Roy. Soc. **57.** p. 469. 1895.
23. A. Hess, Eclair. electr. **4.** p. 205. 1895.
24. G. Benischke, Zeitschr. f. Elektrotechn. Heft 16. 1895.
25. H. Eisler, Zeitschr. f. Elektrotechn. Heft 16. 1895.
26. H. F. Weber, Arch. de Genève (4) **2.** p. 519. 1896.
27. R. Arno, Rend. R. Acc. de Linc. (5) **5.** I. p. 262. 1896; auch N. Cim. (4) **5.** p. 52. 1896.
28. A. Hess, Eclair. electr. **7.** p. 450. 1896.
29. L. Houllevigue, Journ. de Phys. (3) **6.** p. 120. 1897.
30. R. Threlfall, Phys. Rev. **4.** p. 457. 1897.
31. — l. c. **5.** p. 21, 65. 1897.
32. W. Schaufelberger, Diss. Zürich 1898; auch Wied. Ann. **65.** p. 635. 1898.
33. H. Pellat, Compt. rend. **128.** p. 1312. 1899; auch Ann. chim. phys. (7) **18.** p. 150. 1899.
34. W. Schaufelberger, Wied. Ann **67.** p. 307. 1899.
35. E. B. Rosa u. A. W. Smith, Phys. Rev. **8.** p. 1. 1899; auch Phil. Mag. (4) **47.** p. 222. 1899.
36. F. Beaulard, Compt. rend. **130.** p. 1182. 1900.
37. — Journ. de Phys. (3) **9.** p. 422. 1900.
38. H. Pellat u. F. Beaulard, Compt. rend. **130.** p. 1457. 1900.
39. — Journ. de Phys. (3) **9.** p. 313. 1900.
40. L. M. Potts, J. Hopk. Un. Circ. **19.** p. 62. 1900; auch Phys. Zeitschr. **2.** p. 301. 1900.
41. P. L. Mercanton, Bull. soc. vaud. Oktober 1901; auch Journ. de Phys. (4) **1.** p. 33. 1902.

42. C. P. Steinmetz, Electric. World **37.** p. 1065. 1901; auch Eclair. electr. **29.** p. 27. 1901; Electrician **47.** p. 412. 1901; Nat. Rundsch. **16.** p. 597. 1901.
43. W. E. Ayrton, Electrician **46.** p. 476. 1901.
44. A. W. Ashton, Phil. Mag. (6) **2.** p. 501. 1901.
45. F. Maccarone, N. Cim. (5) **2.** p. 88. 1901; auch Physik. Zeitschr. **3.** p. 57. 1901.
46. C. E. Skinner, Electr. Rev. **41.** p. 82. 1902.
47. F. Maccarone, N. Cim. (5) **4.** p. 313. 1902.
48. F. Beaulard, Congrès d'Angers de l'assoc. franç. pour l'avance des sciences 1903; auch Eclair. electr. **37.** p. 404. 1903.
49. J. Moscicki u. M. Altenberg, Krak. Anz. p. 46. 1904.
50. C. E Guye u. P. Denso, Arch. de Genève **19.** p. 101. 1905; auch Compt. rend. **140.** p. 433. 1905.
51. O. M. Corbino, N. Cim. (5) **9.** p. 81. 1905; auch Physik. Zeitschr. **6.** p. 138. 1905.
52. V. v. Lang, Wiener Sitzungsber. **115.** p. 211. 1906.

### III. Rotation und Drehmomente.

1. H. Hertz, Wied. Ann. **13.** p. 266. 1881.
2. G. Quincke, Wied. Ann. **59** p. 417. 1896.
3. A. Heydweiller, Verh. d. Physik. Ges. Berlin **16.** p. 32. 1897.
4. A. Boltzmann, Wied. Ann. **60.** p. 399. 1897.
5. E. v. Schweidler, Wiener Sitzungsber. **106.** p. 526. 1897.
6. A. Heydweiller, Wied. Ann. **69.** p. 531. 1899.
7. L. Graetz, Ann. d. Phys **1.** p. 530. 1900.

Vgl. auch Arno, II, 7, 15—19, 27; Weiler, II, 13; Threlfall, II, 30, 31; Schaufelberger, II, 32, 34; v. Lang, II, 52.

### IV. Anomale Leitung.

1. H. Hertz, Wied. Ann. **20.** p. 279. 1883.
2. G. Quincke, Wied. Ann. **28.** p. 529. 1886.
3. H. Koller, Wiener Sitzungsber. **98.** p. 201. 1889.
4. R. Appleyard, Phil. Mag. (5) **38.** p. 396. 1894.
5. — Phil. Mag. (5) **42.** p. 148. 1896.
6. A. Naccari, N. Cim. (4) **8.** p. 259. 1898.
7. E. v. Schweidler, Wiener Sitzungsber. **109.** p. 964. 1900.
8. — Ann. d. Phys. **5.** p. 483. 1901.
9. H. Gädeke, Diss. Heidelberg 1901.
10. E. v. Schweidler, Wiener Sitzungsber. **113.** p. 881. 1904.
11. R. Appleyard, Phil. Mag. (6) **10.** p. 485. 1905.
12. P. Gouré de Villemontée, Compt. rend. **141.** p. 179. 1905.

### V. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Ladungsdauer oder Wechselzahl.

1. N. Schiller, Pogg. Ann. **152.** p. 555. 1872.
2. L. Boltzmann, Wiener Sitzungsber. **67.** p. 17. 1873.

3. L. Boltzmann, Wiener Sitzungsber. **68.** p. 81. 1873.
4. — Wiener Sitzungsber. **70.** p. 307. 1874.
5. J. J. Thomson, Proc. Roy. Soc. **46.** p. 292. 1889.
6. E. Lecher, Wiener Sitzungsber. **99.** p. 480. 1890; auch Wied. Ann. **42.** p. 142. 1891.
7. R. Blondlot, Compt. rend. **112.** p. 1058. 1891.
8. L. Arons u. H. Rubens, Wied. Ann. **42.** p. 581. 1891.
9. — — Wied. **44.** p. 206. 1891.
10. A. Perot, Compt. rend. **115.** p. 38, 165. 1892.
11. J. Sahulka, Wiener Sitzungsber. **102.** p. 773. 1893.
12. D. Mazotto, Rend. R. Acc. dei Linc. (5) **4**, I. p. 240. 1893.
13. B. W. Stankewitsch, Wied. Ann. **52.** p. 700. 1894.
14. L. Graetz u. L. Fomm, Münchener Ber. **24.** p. 184. 1894; auch Wied. Ann. **54.** p. 626. 1895.
15. F. Beaulard, Compt. Rend. **119.** p. 268. 1894.
16. C. Heinke, Wied. Ann. **54.** p. 577. 1895.
17. E. Northrup, Phil. Mag. (5) **39.** p. 78. 1895.
18. D. Mazotto, N. Cim. (4) **1.** p. 308. 1895.
19. A. Lampa, Wiener Sitzungsber. **105.** p. 587, 1049. 1896; auch Wied. Ann. **61.** p. 79. 1897.
20. E. S. Ferry, Phil. Mag. (5) **44.** p. 404. 1897.
21. P. Drude, Zeitschr. f. physik. Chem. **23.** p. 267. 1897.
22. J. Hanauer, Wied. Ann. **65.** p. 577. 1898.
23. F. Marx, Wied. Ann. **66.** p. 411. 1898.
24. W. C. Hormell, Phil. Mag. (6) **3.** p. 52. 1902.
25. J. Kosogonoff, Physik. Zeitschr. **3.** p. 207. 1902.
26. A. de Forest Palmer, Phys. Rev. **16.** p. 267. 1903.
27. H. C. Parker, Ann. New York Ac. **15.** p. 161. 1904.

### VI. Varia.

1. E. Root, Pogg. Ann. **158.** p. 1, 425. 1876.
2. M. v. Hoor, Elektrotechn. Zeitschr. **22.** p. 170, 187, 213, 716, 749, 781. 1901.
3. K. Germanischskaja, Diss. Zürich 1903.
4. V. Cremieu u. L. Malcles, Compt. rend. **139.** p. 790. 1904.

(Eingegangen 15. Oktober 1907.

## 7. *Über zeitliche Beziehungen von Schwingungen in Kondensatorkreisen;* *von Max Dieckmann.*

(Auszug aus der Straßburger Inaugural-Dissertation.)

In einem gewöhnlichen Kondensatorkreise ist der Verlauf des oszillierenden Stromes der Entladung außer der Amplitude durch drei Größen, und zwar Schwingungszahl, Dämpfung und Phasenkonstante charakterisiert. Letztere zu kennen ist notwendig, wenn man zwei Kreise hat und deren zeitlichen Zusammenhang untersuchen will.

Gesetzt wir hätten zwei oszillierende Ströme

$$i_1 = a_1 e^{-\alpha_1 t} \sin(n t + \varphi_1)$$

und

$$i_2 = a_2 e^{-\alpha_2 t} \sin(n t + \varphi_2),$$

so läßt sich die Phasenverschiebung $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)$ ermitteln, wenn man

$$\int_0^\infty i_1^2 \, dt, \quad \int_0^\infty i_2^2 \, dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty i_1 i_2 \, dt$$

kennt.

Am wichtigsten ist die Kenntnis der Stelle, an der dies letzte Integral gleich Null wird; dies entspricht auch bei gedämpften Schwingungen, wie sie bei Kondensatorentladungen in Betracht kommen, einer Phasendifferenz von 90°. Dabei ist zunächst keine Rücksicht zu nehmen auf die Art, wie diese phasenverschobenen Ströme hergestellt werden, sie müssen nur die oben angegebene Form haben.

Es läßt sich andererseits zeigen, daß, wenn man zwei Kondensatorkreise induktiv koppelt, von denen der eine in bekannter Weise eine Funkenstrecke enthält, und man mit $i_1$ und $i_2$ die respektiven Ströme, die nicht mehr von der obigen einfachen Form zu sein brauchen, bezeichnet, allgemein $\int_0^\infty i_1 i_2 \, dt$ verschwindet, falls die Eigenschwingungen beider Kreise über-

einstimmen oder, präziser gesagt, $p_1 c_1$ gleich $p_2 c_2$ ist, wo $p$ und $c$ bezugsweise die Selbstinduktionen und Kapazitäten sind.

Es erschien nun wünschenswert, eine Methode auszuarbeiten, welche durch *eine* Messung den Wert dieses Integrals zu ermitteln gestattet oder hauptsächlich das Nullwerden des Integrals anzeigt, und dann diese Methode anzuwenden

1. auf die Untersuchung einer Anordnung, in welcher phasenverschobene Ströme erzeugt werden, und

2. auf die Untersuchung von zwei induktiv gekoppelten Kreisen.

Als Resultat der zweiten Anwendung ließ sich ein schärferes Kriterium für die Resonanz zweier Kreise erwarten, als bis jetzt in der Bjerknesschen Resonanzkurve gegeben war. Dies stellte gleichzeitig die Möglichkeit in Aussicht, Selbstinduktionen, Kapazitäten und Dielektrizitätskonstanten mit einem größeren Grade von Genauigkeit zu messen.

Die Methode selbst beruht auf gleichzeitiger Anwendung dreier Thermoelemente und ist schematisch in Fig. 1 dargestellt.

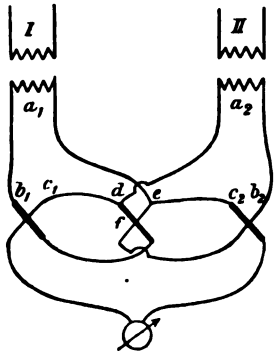



Fig. 1. Skizze des Meßaufbaues.

In I und II fließen die Ströme $i_1$ bez. $i_2$; es sind entweder die phasenverschobenen Ströme oder der primäre bez. sekundäre Strom des gekoppelten Systems.

Im geschlossenen Kreis $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d$, $f$, $e$ wird ein diesem Strom proportionaler Strom induziert unter der Bedingung, daß die Induktanz sehr groß gegen den Ohmschen Widerstand ist; genau ebenso in $a_2$, $b_2$, $c_2$, $e$, $f$, $d$ ein zu $i_2$ proportionaler Strom. Die beiden Kreise haben allerdings den Teil $d$, $f$, $e$ gemeinsam, da aber die Induktanz eines jeden Kreises gegen den Ohmschen Widerstand überhaupt, also gegen den Widerstand des Thermoelementes $d$, $f$, $e$ groß sein soll, bleibt die letzte Überlegung gültig.

Die Thermoelemente sollen gleichempfindlich sein, dann ist die elektromotorische Kraft des Elementes $b_1$, $c_1$ proportional

zu $a^2 i_1^2$, des zweiten zu $b^2 i_2^2$ und des dritten zu $(a i_1 + b i_2)^2$, wo $a$ und $b$ von dem Transformationsverhältnis abhängen. Schaltet man nun die drei Thermoelemente mit einem Galvanometer in Reihe, aber so, daß sich die Spannungen von $b_1 c_1$ und $b_2 c_2$ addieren, aber von der des Thermoelementes $de$ subtrahieren, so erhält man offenbar Ausschläge, welche proportional zu

$$\int_0^\infty (a i_1 + b i_2)^2 dt - \int_0^\infty (a^2 i_1^2 + b^2 i_2^2) dt$$

oder zu

$$\int_0^\infty i_1 i_2 dt$$

proportional sind.

Das $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ (und damit auch die Ausschläge) kann positive und negative Werte haben. Von Wichtigkeit ist namentlich die Beobachtung der Nullwerte.

Alles in allem erfordert der Meßaufbau, über dessen Einzelheiten die Straßburger Dissertation das nähere enthält, hinsichtlich der Vermeidung unerwünschter Induktionen einige Vorsicht. Nach einmal gelungener Abgleichung ergaben jedoch häufige, späterhin gelegentlich vorgenommene Kontrollmessungen die völlige Konstanz der Thermoelemente und der Meßbereitschaft.

A. Für den Fall zweier zeitlich aufeinander bezogenen Schwingungskreise gleicher Wechselzahl läßt sich zeigen, daß dem Verschwinden des $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ eine Phasenverschiebung von sehr nahe zu $\pi/2$ entspricht. Die Rechnung ergibt nämlich, daß für

$$\int_0^\infty i_1 i_2 dt = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{n}{\delta},$$

wo $\delta$ die halbe Summe der Dämpfungsexponenten und $n$ die Schwingungszahl bedeutet. $\delta$ wird aber im allgemeinen sehr klein gegen $n$ sein.

Ein Weg, Phasenverschiebungen herzustellen, wurde von

Hrn. Dr. Mandelstam und Dr. Papalexi angegeben.[1]) Fig. 2 zeigt die zur Verwendung kommende Schaltanordnung.

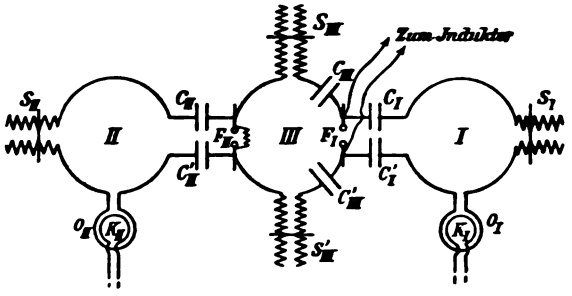



Fig. 2. Kreise zur Herstellung phasenverschobener Schwingungen.

Es sind drei Schwingungskreise I, II und III gebildet. Die Kapazitäten sind unter Hinzufügung der entsprechenden Indizes mit $C$, die Selbstinduktionen mit $S$ bezeichnet.

An der Funkenstrecke $F_I$ des Kreises I liegen die Sekundärpole eines Funkeninduktors. Die Funkenstrecke $F_{II}$ des Kreises II ist durch einen hohen Widerstand $R$ überbrückt. $O_I$ und $O_{II}$ sind Drahtschlingen, welche auf die Meßkreise $K_1$ und $K_2$ induzieren.

Der Kreis III heißt der Koppelkreis, da durch seine Vermittelung der Kreis II zum Schwingen angeregt wird.

Kreis I und II lassen sich so herstellen oder durch Veränderung der Selbstinduktion so einjustieren, daß sie die für den beabsichtigten Zweck erforderliche gleiche Schwingungsdauer haben. Das zeitliche Nachhinken des Kreises II gegen den Kreis I, oder die gegenseitige Phasenverschiebung hängt neben der Beschaffenheit der Funkenstrecke $F_{II}$ von der Größe der Schwingungsdauer des Kreises III + II oder, da II konstant sein soll, von der des Kreises III allein ab. Um diese genügend verändern zu können, sind die Selbstinduktionen $S_{III}$ und $S'_{III}$ in sehr weiten Grenzen variabel.

Kreis I und II sind völlig symmetrisch auf paraffinierten Holzgestellen, wo es angängig war, unter Zuhilfenahme von Glas und Hartgummi fest und stabil montiert. Bei der Her-

1) L. Mandelstam u. N. Papalexi, Physik. Zeitschr. 7. p. 303 bis 306. 1906.

stellung wurde des weiteren berücksichtigt, daß die Funkenstrecke $F_I$ die Funkenstrecke $F_{II}$ des präziseren Einsetzens wegen belichten soll, also der Abstand zwischen ihnen nur sehr klein sein darf, während andererseits I und II, um gegenseitige Induktion auszuschließen, möglichst weit entfernt sein müssen.

Die Funkenstrecken $F_I$ und $F_{II}$ befinden sich demgemäß in etwa 4 cm Abstand auf einem gemeinsamen Gestell, während die entfernt aufgestellten Kreise I und II durch je 60 cm lange, engparallele starre Zuführungen mit den Funkenkugeln verbunden sind. Die Kugeln bestehen aus Zink, sie haben 1,5 cm Durchmesser, der Abstand der Kugeln jeder Funkenstrecke ist fein verstellbar und ablesbar.

Kreis I und II sind nach Möglichkeit so angeordnet, daß nur geringe Streuung vorhanden sein kann. Die Selbstinduktionen bestehen aus Kreissolenoidspulen, auf denen eine Kontaktkurbel zur Regulierung schleift. Neben den Koppelschiebern $O$ ist noch je eine Schlinge vorhanden zum Zwecke der Kontrollmessungen nach der früheren Methode.[1])

Als Kapazitäten aller Kreise dienen Leidener Flaschen von etwa je $2{,}7 \times 10^{-3}$ Mikrof., neuartig ist im Kreise III die Einrichtung der variabeln Selbstinduktion.

Fig. 3 zeigt ihr Schaltschema, Fig. 4 ihre Ausführung. $T$ sind gehörig isolierte und versteifte Kreissolenoidspulen. Der Index $r$ oder $l$ bezeichnet den Sinn der Wickelung als rechts oder links.

Diese Spulen haben jede rund 5400 C.G.S. Einheiten Selbstinduktion. Sie lassen sich paarweise durch Schleifkontakte $X$ symmetrisch mittels eines isolierenden Handgriffes in den Koppelkreis ein- und ausschalten und dienen so zur groben Veränderung der Selbstinduktion. Die Feinregulierung erfolgt durch die aus blankem Draht hergestellten, über paraffiniertes Holz gewickelten Solenoidspulen $U$, von denen gleichfalls durch die isoliert starr verbundenen Schleifkontakte $Y$ verschieden große Stücke in den Kreis gebracht werden können. Es lassen sich also, da die Selbstinduktionen $U$ entsprechend

1) F. Braun, Physik. Zeitschr. 5. p. 193. 1904; J. Zenneck, Elektromagn. Schwing. Stuttgart 1905. p. 462.

bemessen sind, kontinuierlich die Übergangswerte zwischen die großen Stufen einschalten.

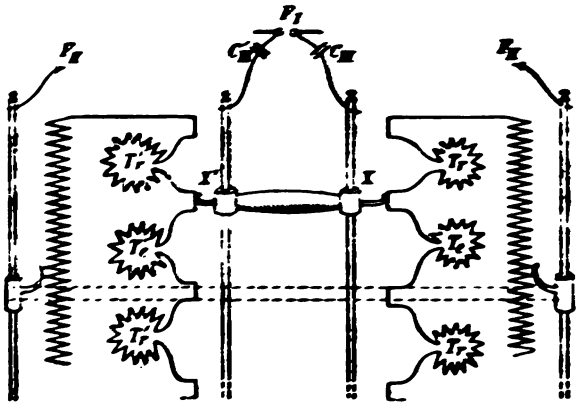


Fig. 3. Schaltschema der Koppelkreisselbstinduktion.

In Wirklichkeit liegen die Spulen nicht so, wie in Fig. 3 der Übersichtlichkeit wegen gezeichnet ist, sondern in zwei Stößen zu je acht Stück, wie es Fig. 4 zeigt, da durch eine derartige Übereinanderschichtung von rechts und links gewundenen Spulen die störende Induktionswirkung nach außen erheblich geschwächt wird. Der ganze Apparat läßt also eine Variierung der Selbstinduktion von wenigen Zentimetern bis rund 100000 cm zu. Zu dieser Selbstinduktion kommen noch zwei dauernd in den Koppelkreis eingeschaltete Solenoidspulen von der ungefähren Größe der Selbstinduktion in Kreis I und II hinzu.

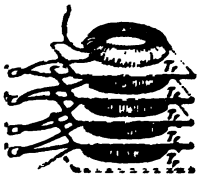


Fig. 4.
Ausführung der Koppelkreisselbstinduktion.

Die Messung bestand in folgendem. Bei konstant gehaltenen Funkenlängen $F_I$ und $F_{II}$ (Fig. 2) wurde, nachdem vorher durch Regulierung der Selbstinduktionen $S_I$ und $S_{II}$ Kreis I auf Kreis II abgestimmt war, $S_{III}$ und $S'_{III}$ variiert und zu jedem Wert dieser Selbstinduktion der entsprechende Ausschlag im Galvanometer abgelesen. Die Verbindung der Meßanordnung mit den Kreisen I und II ist aus der Fig. 2 ohne weiteres ersichtlich.

Eine aus derartigen Beobachtungen gewonnene Kurve stellt Fig. 5 dar. Als Abszissen sind die Werte von $S_{III} S'_{III}$ — als Einheit ein Spulenpaar der Fig. 3, d. i. ca. 11000 cm Selbstinduktion —, als Ordinaten die Galvanometerausschläge aufgetragen. Die Schwingungszahl in diesem Fall betrug rund $3 \times 10^6$ pro Sekunde.

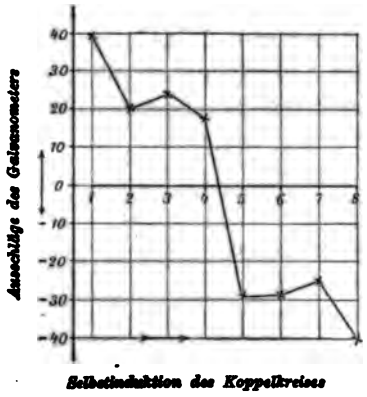



**Fig. 5. Beobachtungskurve zur Konstatierung von $\pi/2$ Phasenverschiebung.**

Wurde nun *der* Wert von $S_{III} S'_{III}$ aufgefunden, für welchen der Ausschlag gleich Null war, so wurde der Bereich dieses Wertes mit der Braunschen Methode untersucht. Zu dem Ende bestand dauernd ein völlig unabhängiger Meßaufbau, der durch Umlegen der Wippe *W* mit dem Galvanometer verbunden werden konnte; auf die Art war es möglich, jederzeit von einer Meßmethode zur anderen überzugehen.

Die Braunsche Methode ergab für diesen Punkt und ebenfalls für alle weiter unten mitgeteilten entsprechenden Beobachtungen bis auf die Versuchsfehler gleiche Galvanometerausschläge für Hinter- und Gegeneinander-Schaltung.

Es entspricht also tatsächlich dieser Punkt einer Phasenverschiebung von $\pi/2$. Solche Kurven wurden nun für verschiedene sekundäre Funkenlängen aufgenommen und schließlich noch die primäre Funkenstrecke variiert.

Es ist im allgemeinen schwierig, die Phasenverschiebung von $\pi/2$ längere Zeit konstant zu erhalten, jedoch ist die Labilität nicht unter allen Umständen gleich stark. Um in diesen Fragen einige Klarheit zu gewinnen, wurden die Ergebnisse benutzt, um eine Fläche aus Karton zu konstruieren, welche übersichtlich die charakteristischen Verhältnisse der untersuchten Anordnung wiedergibt. Die Fläche ist in Fig. 6 nach Art einer Gebirgskarte dargestellt. Die durch die verschiedene Tönung angedeuteten Höhen entsprechen den Galvanometerausschlägen, je nach der Bezifferung positiven oder nega-

tiven Vorzeichens; die Nulllinie bezeichnet die Phasenverschiebung von $\pi/2$.

Es zeigt sich nun zunächst deutlich, daß die Nulllinie die Fläche in Gebieten sehr verschiedener Steilheit schneidet; bei der Selbstinduktion Stufe 4 gehen die Werte sehr schroff von positiven zu negativen Werten über, bei der Selbstinduktion Stufe 6 umgekehrt sehr allmählich. Aber noch ein weiteres

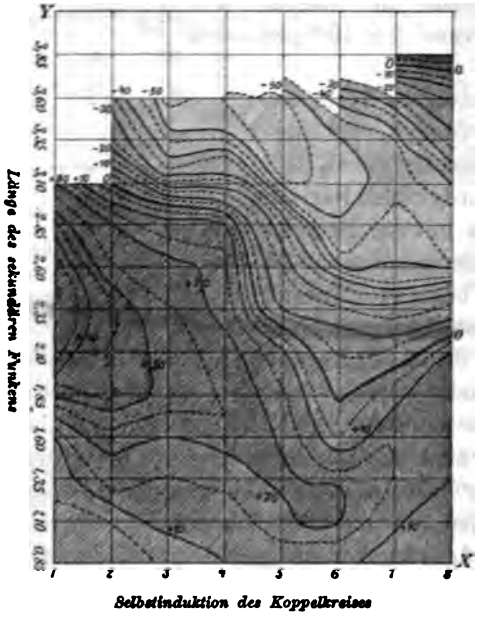



Fig. 6. Beobachtungsfläche als Karte.

ist beachtenswert. Ein Teil der Nullkurve — etwa zwischen den Selbstinduktionsstufen 3 und 4 — läuft nahezu parallel der $X$-Achse, eine kleine Veränderung der Selbstinduktion hat also hier kaum Einfluß, um so mehr macht sich aber eine Inkonstanz der Funkenlänge bemerkbar. Anders liegen die Verhältnisse zwischen den Selbstinduktionswerten 4 und 5. Hier hat die Nullkurve fast die Richtung der $Y$-Achse, und eine Änderung der Funkenlänge bleibt auf den Wert der Phase von geringem Einfluß. Besonders bemerkenswert wegen der völligen Stabilität der Phase ist auch die Stelle der Nullkurve, die man bei Einschaltung der Selbstinduktion 6 und

Funkenlänge 1,82 mm erhält. Es war stets möglich, bei vorheriger, beliebiger Stellung der Funkenstrecke und Selbstinduktion einen bestimmten Punkt der Fläche wiederzuerhalten, und man konnte auf eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ einstellen, auch ohne das Galvanometer zu beobachten. Messungen nach der alten Methode bestätigten auch hier die Richtigkeit der Ergebnisse.

Die oben besprochenen Ergebnisse lassen sich folgendermaßen verwerten.

Da es in der Praxis schwierig ist, die Funkenstrecke längere Zeit unverändert zu erhalten, so wird man, *wenn man dauernd konstante Phase haben will*, jedesmal nach derartigen Stellen, d. h. *derartigen zusammengehörigen Werten von Funkenstrecke und Selbstinduktion, in welchen die Phase wenig von der Funkenlänge abhängt*, suchen müssen und diese dann benutzen.

Diejenigen Stellen, in welchen die Phasenverschiebung sehr stark von der Funkenlänge abhängt, bieten andererseits eine empfindliche Methode, *die Abhängigkeit der Schlagweite vom magnetischen Feld, Beleuchtung etc.* zu untersuchen. Über diesen Gegenstand sollen weitere Untersuchungen angestellt werden.

B. Für den Fall zweier induktiv gekoppelter Kreise ließ sich das Integral

$$\int_0^\infty i_1 i_2 \, dt \quad \text{auf das Integral} \quad \int_0^\infty i_2^2 \, dt,$$

welches bereits gelöst vorliegt, zurückführen und man kann schreiben:

$$\int_0^\infty i_1 i_2 \, dt = \frac{w_2 (p_1 C_1 - p_2 C_2)}{p_{12} (w_1 C_1 + w_2 C_2)} \int_0^\infty i_2^2 \, dt.$$

Die geometrische Form von $\int_0^\infty i_2^2 \, dt$ für lose Koppelung als Funktion der sekundären Schwingungszahl ist durch die Bjerknessche Resonanzkurve bekannt. Für den Fall der losen Koppelung läßt sich also unter denselben Voraussetzungen der Wert von $\int_0^\infty i_1 i_2 \, dt$ als Funktion der sekundären Schwin-

gungszahl darstellen. Führt man nach Zenneck[1]) die Resonanzkurve des Stromeffektes ein, so folgt für die Empfindlichkeit am Resonanzpunkt

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \nu_2}\right)_{\nu_2=\nu_1} = \frac{E_{a0}^2}{8\, p_{12}\, p_2\, \delta_1\, (\delta_1+\delta_2)^2},$$

wo $E_{a0}$ die elektromotorische Kraft des Primärkreises und $\delta$ die Dämpfungsfaktoren bedeuten.

Die Kurve schneidet sehr steil durch den Resonanzpunkt auf der Abszissenachse hindurch.

Die Empfindlichkeit wird ceteris paribus um so größer, je kleiner die Dämpfung und die Koppelung sind. Wie schon oben erwähnt, verschwindet das Integral

$$\int_0^\infty i_1\, i_2\, dt \quad \text{für} \quad p_1\, c_1 = p_2\, c_2$$

bei jeder Koppelung. Bei meinen Versuchen wurde die Koppelung im allgemeinen lose gewählt, weil so die Vergleichsresonanzkurve schärfer wird.

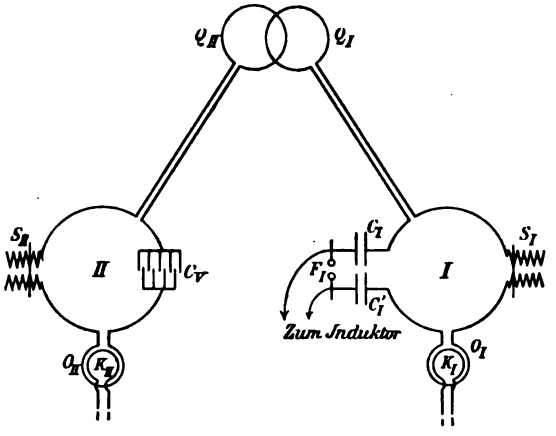



Fig. 7. Induktiv gekoppelte Kreise.

Die zu den Versuchen benutzte Anordnung zweier geschlossener induktiv gekoppelter Kreise zeigt Fig. 7. I ist der Primärkreis, II der Sekundärkreis. Der Primärkreis ist

1) J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen p. 592.

derselbe wie Kreis I unter A., nur ist noch eine weitere Induktionsschlinge $Q_1$ mittels langer, gut isolierter und verlitzter Drähte eingeschaltet. Der Sekundärkreis II hat an Stelle seiner Leidener Flaschen eine variabele Kapazität $C_v$ erhalten. Als Spannungsquelle wurde, wie unter A., ein kleiner, mit städtischem Wechselstrom ohne Unterbrecher betriebener Induktor benutzt, der mit zwei Leidener Flaschen und seiner Sekundärwickelung als Resonanzinduktor arbeitete, oder ein mit Turbinenunterbrecher betriebenes, von sieben Akkumulatoren gespeistes, größeres Induktorium.

Die Messungen wurden so angestellt, daß von Kreis II einmal eine gewöhnliche Bjerknessche Resonanzkurve und sodann mittels der beschriebenen Methode eine $\int_0^\infty i_1 i_2 \, dt$ Kurve aufgenommen wurde. Fig. 8 gibt das Ergebnis einer der-

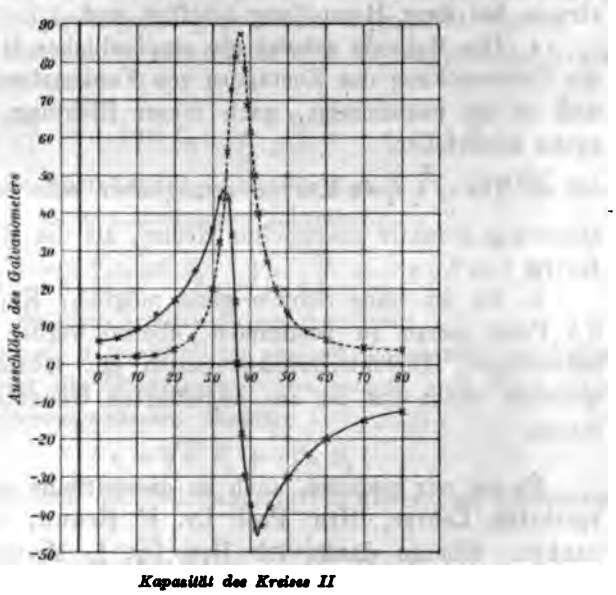



Fig. 8. $\int_0^\infty i_1 i_2 \, dt$ Kurve.

artigen Beobachtung wieder. Als Abszissen sind die Drehungswinkel des variabelen Kondensators aufgetragen, als Ordinaten die Galvanometerausschläge. Da letztere bis auf $\pm$ 0,5 mm

sicher anzugeben sind, so ergibt sich eine Genauigkeit der Kapazitätsmessung von 0,1 Proz.

Die Ergebnisse der Untersuchung lassen sich zum Schluß dahin zusammenfassen:

1. Die Drei-Thermoelement-Nullmethode gestattet Phasenverschiebungen von $\pi/2$ zu konstatieren.

2. Es ist bis zu einem gewissen Grade möglich, beliebige Phasenverschiebungen zwischen zwei mittels eines Koppelkreises gekoppelten Schwingungskreisen durch alleinige Variation der sekundären Funkenlänge zu erzielen.

3. Es zeigt sich für die Konstanz einer Phasenverschiebung von $\pi/2$ von Einfluß, in welchen Beträgen die Selbstinduktion des Koppelkreises und die Funkenlänge der sekundären Funkenstrecke bei ihrer Herstellung beteiligt sind.

4. Die Methode scheint ein empfindliches Hilfsmittel für die Untersuchung des Zustandes von Funkenstrecken zu sein, und es ist beabsichtigt, nach dieser Richtung weitere Versuche anzustellen.

5. Die $\int_0^\infty i_1 i_2 \, dt$ Kurven ermöglichen eine schärfere Abstimmung induktiv gekoppelter Kreise, als die Bjerknessche Kurve.

6. Es ist ohne Schwierigkeit möglich, Kapazitäten auf 0,1 Proz. genau zu bestimmen; ebenso werden sich Selbstinduktionen, Dielektrizitätskonstanten etc. mittels der Nullmethode leicht bis zu der angeführten Genauigkeit messen lassen.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. F. Braun, ergebenst zu danken. Ebenso danke ich Hrn. Dr. L. Mandelstam für die Anregung zu dieser Arbeit und die vielfache Förderung während ihrer Ausführung.

(Eingegangen 5. August 1907.)

## 8. *Nachtrag zur Abhandlung über „Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung“;* von Ludwig Silberstein.

Im 22. Bande dieser Annalen (p. 579—586) habe ich die bivektorielle Darstellung der Maxwellschen Differentialgleichungen sowie der Ausdrücke der elektromagnetischen Energiedichte und des Energieflusses für den *leeren Raum* (oder schließlich für ein Medium mit *gleicher* Dielektrizitätskonstante und Permeabilität) angegeben.[1]) In diesem Nachtrage sollen nun die bivektoriellen Formeln auf ein beliebiges, homogenes und isotropes Dielektrikum ausgedehnt werden.

Bezeichnet man die elektrische bzw. die magnetische Kraft mit $E_1$, $E_2$, so ist

$$K\frac{\partial E_1}{\partial t} = c\,.\,\mathrm{curl}\,E_2\,, \quad \mu\frac{\partial E_2}{\partial t} = -\,c\,.\,\mathrm{curl}\,E_1\,.$$

Führt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = c/\sqrt{K\mu}$ ein, so lassen sich diese Gleichungen schreiben:

$$(1)\qquad \sqrt{K}\frac{\partial E_1}{\partial t} = v\sqrt{\mu}\,\mathrm{curl}\,E_2\,, \quad \sqrt{\mu}\frac{\partial E_2}{\partial t} = -\,v\sqrt{K}\,\mathrm{curl}\,E_1\,,$$

wo man die Wurzeln positiv zu nehmen hat.

Sind nun $K$, $\mu$ gewöhnliche skalare Konstanten, so kann man sie hinter die Operationszeichen setzen, und führt man also den *elektromagnetischen Bivektor*

$$(2)\qquad \eta = \sqrt{K}\,E_1 + i\sqrt{\mu}\,E_2$$

ein, so ziehen sich die Gleichungen (1) in die einzige Gleichung

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\,iv\,\mathrm{curl}\,\eta$$

zusammen.

1) Inzwischen habe ich gefunden, daß Hr. H. Weber schon im Jahre 1901 (Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik 2. p. 348) die beiden Maxwellschen Gleichungen zusammengezogen und nämlich die Gleichung $c\,\mathrm{curl}\,(\mathfrak{E} + i\mathfrak{M}) = i\,\partial\,(\mathfrak{E} + i\mathfrak{M})/\partial\,t$ hingeschrieben hat, ohne jedoch auf den konjugierten Bivektor und auf die Darstellung der Energiedichte und des Energieflusses einzugehen.

Führt man wieder den *konjugierten elektromagnetischen Bivektor* durch die Definition

$$\eta' = \sqrt{K}\, E_1 - i\sqrt{\mu}\, E_2 \tag{3}$$

ein, so wird

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} = i v \operatorname{curl} \eta' . \tag{I'}$$

Diese Gleichung sagt natürlich ganz dasselbe aus wie (I).

Die elektromagnetische *Energiedichte* ist $e = \frac{1}{2}(K E_1^2 + \mu E_2^2)$; man hat also, nach (2), (3), ähnlich wie für den leeren Raum

$$e = \tfrac{1}{2}\eta\eta', \tag{II}$$

wo rechts das *skalare* Produkt der zueinander konjugierten Bivektoren gemeint ist.

Das Vektorprodukt dieser Bivektoren ist, nach der allgemeinen Formel (5) der früheren Abhandlung:

$$V\eta\eta' = 2i\sqrt{K\mu}\, V E_2 E_1 = 2i\frac{c}{v} V E_2 E_1 .$$

Der *Energiefluß* oder der „*Poyntingsche Vektor*" $F = cVE_1 E_2$ wird also den Ausdruck

$$F = \frac{i}{2} v V \eta\eta' \tag{III}$$

bekommen.

Sind auch *eingeprägte* Kräfte vorhanden, und zwar elektrische $E_1'$ und magnetische $E_2'$, so hat man sie in den *curls* der Gleichungen (1) von $E_1$, bzw. von $E_2$ abzuziehen. Führt man also den *eingeprägten elektromagnetischen Bivektor* durch die Definition

$$\zeta = \sqrt{K}\, E_1' + i\sqrt{\mu}\, E_2' \tag{4}$$

ein, so hat man als Ersatz der beiden diesbezüglichen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = i v \operatorname{curl}(\zeta - \eta). \tag{IV}$$

Beispiele von Anwendungen der letzteren Gleichungsform hoffe ich in einer künftigen Arbeit angeben zu können.

Warschau, im November 1907.

(Eingegangen 10. November 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 15.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 24.

## 1. *Einige neue Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen höchster hörbarer und unhörbarer Töne. — Anwendung auf die Töne der Galtonpfeife und die Bestimmung der oberen Hörgrenze*[1]; *von F. A. Schulze.*

Die nachstehende Arbeit zerfällt in zwei wesentlich verschiedene Abschnitte. Im ersten Abschnitt (A) werden einige neue Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen sehr hoher Töne beschrieben. Der zweite Abschnitt (B) enthält eine Bestimmung der oberen Hörgrenze unter Anwendung der Methoden des ersten Abschnittes.

### A. Messung sehr hoher Schwingungszahlen.

#### 1. Messung der Schwingungszahl durch Absuchen der Knoten und Bäuche stehender Wellen mittels kreisförmiger Platten mit festgeklemmtem Rande.

An der Galtonpfeife in der von M. Th. Edelmann verbesserten Ausführung wurde zunächst eine Methode näher ausprobiert, über die ich[2]) vor einigen Jahren an anderer Stelle nur ganz kurz berichtet hatte.

Sie besteht darin, daß man den zu untersuchenden Ton an einer horizontalen Ebene, etwa der Tischplatte, reflektieren

1) Eine kurze vorläufige Mitteilung der Methoden und Resultate ist von mir in den Marburger Sitzungsber. dieses Jahres gegeben; eine eingehendere Darstellung der Bestimmungen der oberen Hörgrenze in der demnächst neu erscheinenden Zeitschrift: Beiträge zur Anatomie, Physiologie, Pathologie und Therapie des Ohres, der Nase und des Kehlkopfes; herausgegeben von A. Passow und Karl L. Schäfer; Verlag von S. Karger, Berlin.

2) F. A. Schulze, Marburger Sitzungsber. 1902. p. 66. Solche Plättchen hatte ich auch früher schon als Ersatz des Ohres bei der Bestimmung unhörbarer hoher Schwingungen bei der Messung mit der Quinckeschen Interferenzröhre benutzt; Wied. Ann. 68. p. 99. 1899.

läßt und so stehende Wellen erzeugt. Man führt nun die Glimmerplatte auf der Lotlinie von der Tonquelle nach der reflektierenden Ebene auf und ab. In den Bäuchen wird der Sand auf der Platte aufgewirbelt, in den Knoten bleibt er völlig in Ruhe. Man erhält so als Abstand zweier Knoten oder Bäuche die halbe Wellenlänge. Bei einigermaßen intensiven Tönen stellt man am besten auf das Bewegungsminimum, bei schwachen Tönen auf das Maximum ein. Bei sehr geringer Intensität wählt man am besten ein Plättchen, dessen Eigenschwingung in Resonanz mit dem zu untersuchenden Tone steht. Die auf diese Weise erhaltenen Schwingungszahlen sind in guter Übereinstimmung mit den nach anderen Methoden gemessenen. Natürlich ist dieses Verfahren auch auf Töne oberhalb der Hörgrenze anwendbar und hier angewendet worden.

Im einzelnen ist zu dieser Messung wenig zu bemerken. Es ist je nach der Tonstärke usw. der zweckmäßigste Abstand der Pfeife von der reflektierenden Platte auszuprobieren. Die Messungen erfolgen am besten in der Nähe der Platte, nicht in der Nähe der Pfeife. Bis zu Schwingungszahlen von ca. 30000 zeigte sich die Methode durchaus anwendbar. Bei nicht zu hohen Tönen ist die Einstellung auf das Minimum der Bewegung bei nicht zu geringer Tonintensität ganz außerordentlich scharf. Die geringste Verschiebung aus dem Knoten bringt sofort Bewegung des Sandes hervor.[1]) Zu den Messungen dienten die im folgenden Abschnitt genauer beschriebenen Platten.

### 2. Messung der Schwingungszahl mittels der Chladnischen Klangfiguren am Rande festgeklemmter Platten und Berechnung der zugehörigen Tonhöhe.

Man kann derartige dünne, am Rande festgeklemmte Platten in noch einfacherer Weise zur Messung hoher Töne auch weit über das hörbare Gebiet hinaus benutzen mit Hilfe der Feststellung des Obertones, in dem sie gerade mit dem

1) Für tiefere Töne ist diese Methode bereits von A. Seebeck angewendet worden; Pogg. Ann. 59. p. 177. 1843; über Messungen an Pfeifen in derselben Weise siehe W. Kohlrausch, Wied. Ann. 8. p. 584. 1879.

zu untersuchenden Ton in Resonanz ist, und theoretische Berechnung der zugehörigen Tonhöhe. Stellt man sich eine Reihe solcher Platten von verschiedener Dicke und verschiedenem Durchmesser her, so wird immer einer der zahlreichen Obertöne sehr nahe dem zu untersuchenden liegen.

### a) Berechnung der Schwingungszahlen.

Vorbedingung für die Anwendbarkeit dieser Methode auf die Bestimmung von Schwingungszahlen ist nun aber, daß die berechnete Tonhöhe wirklich der tatsächlichen Schwingungszahl entspricht. Für Platten aus Glas und Kupfer ist dies, wie im folgenden gezeigt wird, der Fall, dagegen nicht für Platten aus Papier.

Für anisotrope Platten, wie es Glimmerplatten sind, gelang die Berechnung der Eigenschwingungen nicht.

Da die Berechnung der Eigenschwingungen von isotropen ebenen kreisförmigen Platten mit festgeklemmtem Rande bisher noch nicht durchgeführt zu sein scheint, so möge sie hier mitgeteilt werden.

Die wesentlich schwierigere Berechnung der Schwingungen von isotropen ebenen kreisförmigen Platten mit freiem Rand ist von G. Kirchhoff[1]) gegeben.

Hier, wo die Grenzbedingungen viel einfacher sind als bei freiem Rande, gestaltet sich natürlich auch die Rechnung bedeutend einfacher.

Die allgemeine Lösung des Problems ist für die senkrechte Entfernung $w_n$ aus der Gleichgewichtslage gegeben durch[2]):

$$(1) \qquad w_n = P \cos(n\vartheta)\{J_n(\varkappa r) + \lambda J_n(i\varkappa r)\}\cos(p t - \varepsilon).$$

$J_n$ ist dabei die Besselsche Funktion, $i = \sqrt{-1}$, $P$ ist eine belanglose Amplitudenkonstante, $\vartheta$ der Winkel, den der Radiusvektor mit einem willkürlich gewählten Ausgangsvektor bildet,

---

1) G. Kirchhoff, Ges. Abh. p. 287; Crelles Journ. 40. 1850; Pogg. Ann. 81. 1850.

2) Lord Rayleigh, Die Theorie des Schalles, übersetzt von F. Neesen, 1. p. 396. Braunschweig 1880, Vieweg und Sohn.

$n$ eine positive ganze Zahl einschließlich Null, $\varepsilon$ eine Phasenkonstante. $p$ ist maßgebend für die Schwingungszahl. Mit $\varkappa$ hängt es zusammen durch die Beziehung

$$p = \varkappa^2 c^2,$$

wo

$$c^2 = \frac{D}{R^2}\sqrt{\frac{1}{12(1-\mu^2)}}\cdot\sqrt{\frac{E}{\varrho}}.$$

Hierin bedeutet $D$ die ganze Dicke der Platte, $R$ den Radius, $E$ den Elastizitätsmodul, $\varrho$ die Dichte, $\mu$ die Elastizitätszahl.

$n = 0$ gibt die Schwingungen, die nur Kreise als Knotenlinien haben, $n = 1$ die Schwingungen, die außer Kreisen einen Durchmesser als Knotenlinie haben usw.

$\varkappa$ und $\lambda$ bestimmen sich aus den für festgeklemmten Rand geltenden Grenzbedingungen

$$\left.\begin{aligned} (2)\quad & w_n = 0 \\ (3)\quad & \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \end{aligned}\right\} \text{für } r = R.$$

Zur Abkürzung sei gesetzt $\varkappa r = \varrho$. Aus (2) und (3) folgt

$$(4)\qquad J_n(\varrho)_{r=R} + \lambda J_n(i\varrho)_{r=R} = 0,$$

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial J_n(\varrho)}{\partial r}\right)_{r=R} + \lambda\left(\frac{\partial J_n(i\varrho)}{\partial r}\right)_{r=R} = 0.$$

Aus (4) und (5) folgt durch Elimination von $\lambda$

$$(6)\qquad \frac{J_n(\varrho)_{r=R}}{J_n(i\varrho)_{r=R}} = \frac{\left.\frac{\partial J_n(\varrho)}{\partial r}\right|_{r=R}}{\left.\frac{\partial J_n(i\varrho)}{\partial r}\right|_{r=R}}.$$

Aus (6) ergeben sich die numerischen Werte von $\varkappa$ für jeden Wert von $n$. Mit Hilfe dieses Wertes von $\varkappa$ erhält man dann am bequemsten aus (4) die Werte für $\lambda$.

Die Berechnungen sind durchgeführt für $n = 0, 1, 2$. Zur Verwendung gelangten dabei die in R. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen, p. 71 ff. B. G. Teubner, Leipzig 1900 abgedruckte Tabellen für $J_0$ und $J_1$, ferner außer der gewöhnlichen Reihenentwickelung von $J_n$ die für große Werte des Argumentes sehr bequemen Formeln:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} J_n(x) = {} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}}} \Big\{ \Big(\cos\big(x - \tfrac{1}{2} n\pi\big) + \sin\big(x - \tfrac{1}{2} n\pi\big)\Big) \\ & \Big(1 - \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1.2} \frac{1}{(8x)^2} \\ & \quad + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)(49-4n^2)}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{(8x)^4} + \dots \Big) \\ & + \Big(\sin\big(x - \tfrac{1}{2} n\pi\big) - \cos\big(x - \tfrac{1}{2} n\pi\big)\Big) \\ & \Big( \frac{(1-4n^2)}{1} \frac{1}{8x} - \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1.2.3} \frac{1}{(8x)^3} + \dots \Big) \Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} J_n(ix) = {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^x}{\sqrt{\frac{x}{2}}} \Big\{ 1 + \frac{1-4n^2}{1} \cdot \frac{1}{8x} + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1.2} \cdot \frac{1}{(8x)^2} \\ & \quad + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1.2.3} \frac{1}{(8x)^3} + \dots \Big\}. \end{aligned}\right.$$ [1])

Für $x$ ergeben sich aus (6) zu jedem $n$ eine unendliche Reihe von Werten, die dem Grundton und den Obertönen entsprechen.

Unter Benutzung der Relation $J_0'(x) = -J_1(x)$ ergibt sich aus den Formeln (7) und (8) leicht, daß für $n = 0$ die Werte von $x$ in der Nähe von $\pi$, $2\pi$, $3\pi$ ... liegen müssen und diesen Zahlen um so näher kommen, je höher die Ordnungszahl von $x$ ist (je größer $x$).

Ähnlich findet man, daß für $n = 1$ die Werte von $x$ sind:

$$\tfrac{5}{4}\pi, \quad \tfrac{9}{4}\pi, \quad \tfrac{13}{4}\pi \dots$$

bei Benutzung der Relation

$$J_1' = J_0 - \frac{1}{x} J_1$$

und der Gleichungen (7) und (8).

Zu jedem Wert von $x$ kann man ferner diejenigen Werte von $r$ berechnen, die kleiner als $R$ sind und

$$w_n = J_n(\varkappa r) + \lambda J_n(i\varkappa r)$$

zu Null machen. Diese Werte von $r$ geben dann also die Radien der Knotenkreise.

1) G. Kirchhoff, l. c. p. 274. An Stelle des dortigen $2x$ ist hier $x$ zu setzen.

Die Rechnung ergab folgendes ($R = 1$ gesetzt):

$n = 0$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_I = 3{,}19$ | Knotenkreis | $r = 1$ (Peripherie) | $\lambda_I = 0{,}0558$ |
| $x_{II} = 6{,}306$ | Knotenkreise | $r_1 = 0{,}3803$ | $\lambda_{II} = -0{,}00253$ |
| | | $r_2 = 1$ | |
| $x_{III} = 9{,}425$ | „ | $r_1 = 0{,}255$ | $\lambda_{III} = +0{,}00011$ |
| | | $r_2 = 0{,}584$ | |
| | | $r_3 = 1$ | |
| $x_{IV} = 12{,}56$ | „ | $r_1 = 0{,}190$ | $\lambda_{IV} \cong 0$ |
| | | $r_2 = 0{,}435$ | |
| | | $r_3 = 0{,}684$ | |
| | | $r_4 = 1$ | |
| $x_V = 15{,}71$ | „ | $r_1 = 0{,}155$ | $\lambda_V \cong 0$ |
| | | $r_2 = 0{,}364$ | |
| | | $r_3 = 0{,}551$ | |
| | | $r_4 = 0{,}752$ | |
| | | $r_5 = 1$ | |

$n = 1$ (1 Knotendurchmesser).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_I = 4{,}612$ | Knotenkreis | $r_1 = 1$ | $\lambda_I = 0{,}0152$ |
| $x_{II} = 7{,}80$ | Knotenkreise | $r_1 = 0{,}491$ | $\lambda_{II} = -0{,}00055$ |
| | | $r_2 = 1$ | |
| $x_{III} = 10{,}95$ | „ | $r_1 = 0{,}350$ | $\lambda_{III} = +0{,}00001$ |
| | | $r_2 = 0{,}640$ | |
| | | $r_3 = 1{,}0$ | |

$n = 2$ (2 Knotendurchmesser).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_I = 5{,}904$ | Knotenkreis | $r_1 = 1$ | $\lambda_I = -0{,}0292$ |
| $x_{II} = 9{,}40$ | Knotenkreise | $r_1 = 0{,}542$ | $\lambda_{II} = 0{,}00017$ |
| | | $r_2 = 1{,}00$ | |

Die Schwingungszahl ist

$$N = \frac{p}{2\pi} = \frac{x^2 \sigma^2}{2\pi} \text{ v. d.}$$

Für den Grundton $N_0$ ($n = 0$, $x = 3{,}19$), wo die Platte als Ganzes schwingt, ergibt sich demnach

$$\text{für } \mu = 0{,}25: \quad N_0 = 0{,}463 \frac{D}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \text{ v. d.}$$

$$\text{für } \mu = 0{,}5: \quad N_0 = 0{,}540 \frac{D}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \text{ v. d.}$$

Es sei die Zahl der Durchmesser mit $n'$, die der Kreisknotenlinien mit $\nu$ bezeichnet. Dann gilt für die Tonhöhe folgende Tabelle (wenn der Grundton $N_0$ zu 1 angesetzt wird).

| $\nu$ | $n'=0$ | $n'=1$ | $n'=2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2,07 (1,59) | 3,42 (2,14) |
| 1 | 3,90 (2,80) | 5,98 (2,92) | 8,68 (3,50) |
| 2 | 8,70 (3,60) | 11,76 | |
| 3 | 15,50 | | |

Die in Klammern beigefügten Zahlen geben die entsprechenden Tonhöhen einer Membran. Der Vollständigkeit wegen sei auch noch die entsprechende Tabelle für die Radien der Knotenkreise angegeben (der Radius der Platte = 1 gesetzt):

| $\nu$ | $n'=0$ | $n'=1$ | $n'=2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,38 (0,44) | 0,49 (0,55) | 0,54 (0,61) |
| 2 | 0,26 (0,28)<br>0,58 (0,64) | 0,35<br>0,64 | |
| 3 | 0,19<br>0,44<br>0,68 | | |

b) Versuche.

Für Platten aus Glas und Kupfer zeigten sich die abgeleiteten Beziehungen hinreichend bestätigt. Die Plättchen wurden auf Messingringen von ca. 5 mm Dicke und etwa 10 mm Breite aufgeklebt und in die Nähe der tönenden Galtonpfeife gebracht. Durch feinen Sand markierten sich haarscharf die Knotenkreise bzw. Knotendurchmesser. In vielen Fällen waren die Knotenkreise etwas elliptisch, wohl infolge kleiner Spannungen, nicht überall gleicher Dicke, ungleicher Befestigung usw.

Es mögen nur einige aus dem vorliegenden Material willkürlich herausgegriffene Zahlen mitgeteilt werden.

Es hätten zu einer genauen Prüfung natürlich die Werte von $E$, $\varrho$ und $\mu$ für jedes benutzte Stück gemessen werden müssen. Ich habe wegen der erwähnten kleinen Fehler mich damit begnügt, mit bekannten Mittelwerten zu rechnen.

Bei Glas ist gesetzt

$$\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \quad \mu = 0{,}25;$$

bei Kupfer ist gesetzt

$$\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = 3{,}7 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \quad \mu = 0{,}25.$$

Glas.

Es wurden käufliche Deckgläschen benutzt; die Dicke war genügend gleichmäßig.

Es entstanden meist nur die Knoten*kreise*.

Unter „gefunden" sind diejenigen Schwingungszahlen eingetragen, die der betreffenden Pfeifenlänge, Windstärke und Maulweite der Galtonpfeifen nach den Messungen mit anderen Methoden, meist mit Staubfiguren, zukommen.

Die Einstellung auf Resonanz war sehr präzis. Es wurde dazu diejenige Pfeifenlänge ermittelt, bei der die Bewegung des Sandes noch auf die weiteste Entfernung hin sichtbar war (oft fast 1 m).

1. Rundes Deckglas. $D = 0{,}169$ mm, $R = 6{,}05$ mm.

| | |
|---|---|
| Grundton berechnet . . . . . | 10540 v. d. |
| gefunden . . . . . | 10500 |

2. Rundes Deckglas. $D = 0{,}169$ mm, $R = 8{,}3$ mm.

| | |
|---|---|
| Grundton berechnet . . . . . | 6450 |
| gefunden . . . . . | 5560 |
| Oberton mit 1 Kreisknotenlinie berechnet | 22400 |
| gefunden | 23000 |
| Radius des Knotenkreises berechnet . . | 3,19 mm |
| gefunden . . | 3,15 mm |

3. Rundes Deckglas. $D = 0{,}190$ mm, $R = 12{,}75$ mm.

Der Grundton ist mit der Galtonpfeife nicht zu erhalten, also jedenfalls kleiner als 3300 (berechnet 2670).

| | |
|---|---|
| Oberton mit 1 Kreisknotenlinie berechnet | 10900 |
| gefunden | 10500 |
| Radius des Knotenkreises berechnet . . | 9,7 mm |
| gefunden . . | 9,8 mm |
| Oberton mit 2 Kreisknotenlinien berechnet | 23460 |
| gefunden | 23000 |

4. Rundes Deckglas. $D = 0{,}165$ mm, $R = 11{,}05$ mm.

Grundton nicht auf der Galtonpfeife, also kleiner als 3300 (berechnet 3100).

| | |
|---|---|
| Oberton mit 1 Knotenkreis berechnet . | 12100 |
| gefunden . | 11000 |

Oberton mit 2 Knotenkreisen berechnet 27500
gefunden 26000

5. Rechteckiges Glas auf Ring mit kreisförmigem Loch.
$D = 0{,}130$ mm, $R = 9{,}13$ mm.

Oberton mit 1 Knotenkreis berechnet . 14980
gefunden . 14500

Knotenlinie elliptisch. Durchmesser des
Knotenkreises berechnet . . . . . 6,94 mm
gefunden . . . . . 6,8—7,6 mm

Oberton mit 2 Knotenkreisen berechnet 30700
gefunden 32400

6. Rechteckiges Glas. $D = 0{,}160$ mm, $R = 9{,}125$ mm.

Grundton berechnet . . . . . 4420
gefunden . . . . . 4300

Oberton mit 1 Knotenkreis berechnet . 17230
gefunden . 18400

Durchmesser des Knotenkreises berechnet 6,94 mm
gefunden 7,0—7,3 mm

7. Rundes Deckglas. $D = 0{,}190$ mm, $R = 12{,}75$ mm.

Oberton mit 1 Durchmesser und 1 Knotenkreis
berechnet 15900
gefunden 15000

## Kupfer.

1. $D = 0{,}051$ mm, $R = 15{,}05$ mm.

Oberton mit 2 Knotenkreisen berechnet 3880
gefunden 3800

Oberton mit 3 Knotenkreisen berechnet 6900
gefunden 5900

Oberton mit 4 Knotenkreisen berechnet 10760
gefunden 10000

2. $D = 0{,}051$ mm, $R = 10{,}0$ mm.

Oberton mit 1 Knotenkreis berechnet 3400
gefunden 3450

Oberton mit 2 Knotenkreisen berechnet 7650
gefunden 7200

3. $D = 0{,}051$ mm, $R = 10{,}08$ mm.

Oberton mit 1 Knotenkreis berechnet 3400
gefunden 3400

Oberton mit 2 Knotenkreisen berechnet 7650
gefunden 7900

| | | |
|---|---|---|
| Oberton mit 3 Knotenkreisen | berechnet | 13600 |
| | gefunden | 13900 |
| Oberton mit 4 Knotenkreisen | berechnet | 21280 |
| | gefunden | 22100 |

| Durchmesser der Knotenkreise | |
|---|---|
| berechnet | gefunden |
| 15,5 | 15,04 |
| 11,1 | 11,02 |
| 7,3 | 7,28 |
| 3,1 | elliptisch |

Die Übereinstimmung ist bei diesen Substanzen im allgemeinen wohl als befriedigend zu bezeichnen. Dagegen wurde die Theorie durchaus nicht bestätigt bei Platten aus Papier.

### Papier.

Da ich keine Angaben über den Elastizitätsmodul von Papier fand, bestimmte ich ihn durch Biegung schmaler Streifen von etwa 2 mm Breite, 20 mm Länge bei einseitiger Festklemmung. Er ergab sich für die benutzte Sorte (Schreibpapier) zu 230 kg-Gew./mm². Die Dichte war 1,01.

1. $D = 0{,}096$ mm, $R = 7$ mm.

| | | |
|---|---|---|
| Oberton mit 1 Knotenkreis | berechnet . . . | 61600 |
| | gefunden . . . | 11000 |

2. $D = 0{,}096$ mm, $R = 15{,}0$ mm.

| | | |
|---|---|---|
| Oberton mit 2 Knotenkreisen | berechnet . . | 3100 |
| | gefunden . . | 4700 |

3. $D = 0{,}096$ mm, $R = 6{,}0$ mm.

| | | |
|---|---|---|
| Grundton | berechnet . . . . . | 2160 |
| | gefunden . . . . . | 3700 |
| Oberton mit 1 Knotenkreis | berechnet . . . | 8600 |
| | gefunden . . . | 11500 |

In ähnlicher Weise weichen die Schwingungszahlen bei allen Versuchen von den berechneten ab.

Es kann das nicht daher rühren, daß etwa der Elastizitätsmodul nach verschiedenen Richtungen (etwa infolge des Walzens bei der Herstellung) verschieden ist. Denn es fand sich dieser aus Biegungsversuchen an dünnen Streifen innerhalb der Beobachtungsfehler unabhängig von der Richtung. Am wahrscheinlichsten ist wohl, da die gefundenen Schwingungszahlen stets

größer waren als die berechneten, daß beim Aufkleben eine Spannung des Papiers eintrat, trotzdem ich mich möglichst bemühte, dies zu vermeiden. Diese Spannungselastizität tritt dann zu der Eigenelastizität der Papierplatte hinzu.

Auch fand sich beim Papier folgende Eigentümlichkeit. Während bei Glas, Kupfer und Glimmer der Sand nur in der unmittelbaren Nähe der Eigentöne in lebhafte Bewegung kam und sich zur Chladnischen Klangfigur anordnete, war bei Papierplatten stets eine mehr oder minder gut ausgeprägte Klangfigur, stets ein Mitschwingen der Platte in irgendwelcher Art vorhanden, welche Höhe der Ton auch hatte, wenn er nur nicht zu tief unter dem Grundton lag. Es erinnert dieses Verhalten an dasjenige des Trommelfelles, das auch auf alle ankommenden Töne in Mitschwingen gerät.

Die Chladnischen Klangfiguren gingen also hier vollkommen stetig ineinander über, und es ließ sich dieser stetige Übergang bei Verschieben des Stempels der Pfeife genau verfolgen.

Wir wollen ausgehen von derjenigen Kreisfigur, die etwas oberhalb des ersten Obertones mit einem Kreisknoten entsteht; und es werde nun der Ton allmählich vertieft. Die allmählichen Übergänge sind dann folgende:

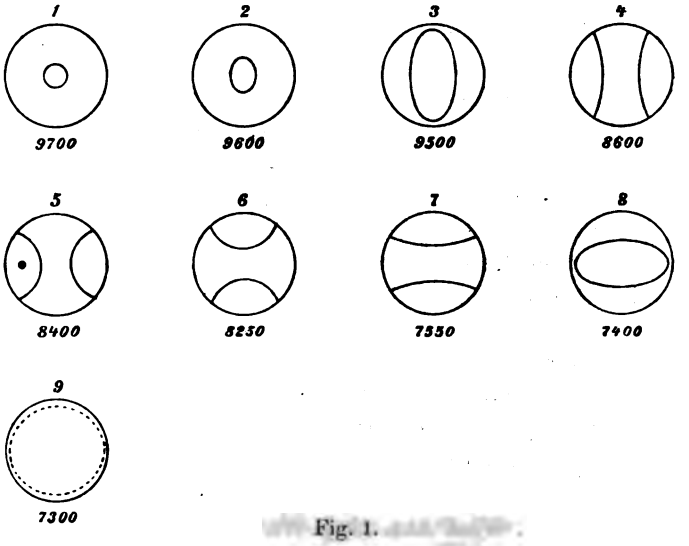
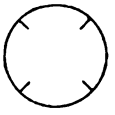



Fig. 1.

Der Übergang der Formen ineinander ist, wie gesagt, ein vollkommen kontinuierlicher und genau zu verfolgen.

Bei höheren Tönen sind die Figuren ähnlich, nur komplizierter. Die beigefügten Zahlen geben die zugehörigen Schwingungszahlen an. Am merkwürdigsten sieht der Übergang von 5 in 6 aus, wo die Figur sozusagen in einer zu der vorigen senkrechten Lage umschlägt. Dabei war ein Moment vorhanden, wo sehr starke Resonanz bestand, die Knotenlinien aber kaum feststellbar waren; sie schienen nebenstehende Gestalt zu haben.



8300

Fig. 2.

Diese Figuren sind nun vollkommen gleich mit denjenigen, die bereits, ebenfalls an Platten aus Papier, Pappe und dergl. mit kreisförmigen aber freiem Rand, A. Elsas[1]) erhalten hat, indem er sie in horizontaler Lage an einem in ihrem Mittelpunkt befestigten Faden frei schwingen ließ, dessen anderes Ende mit etwas Klebwachs an der Zinke einer horizontal liegenden Stimmgabel befestigt war, deren Stiel in einem Schraubstock eingeklemmt wurde. Auch die für höhere Töne erhaltenen Figuren sind durchaus den von Elsas abgebildeten analog. Ich kann deshalb wegen weiterer Einzelheiten auf diese Abhandlung und die ihr beigegebenen Figuren verweisen. Der Unterschied besteht eben nur darin, daß ich die Figuren an Platten mit festgeklemmten, A. Elsas an solchen mit freiem Rand erhielt. Ferner bekommt man bei Anblasen mit der verstellbaren Galtonpfeife den vollen stetigen Übergang der Figuren. Beide Male handelt es sich um erzwungene Schwingungen.

Eine Berechnung dieser Figuren dürfte große Schwierigkeiten bieten. Es teilt sich die Platte eben in solcher Weise, daß jeder Teil für sich frei schwingend die Schwingungsdauer des erregenden Tones gibt. Da sie nur bei Papier, Pappe und derartig weichen Substanzen auftreten, nicht bei Glas, Metall, Glimmer, so mag diese Unschärfe der Resonanz, oder besser Ansprechen auf weite Intervalle von der Dämpfung durch innere Reibung herrühren. Da sie Elsas auch bei Platten aus Gipspulver erhalten hat, ist irgendeine Anisotropie, an die man bei Papier leicht denken könnte, als Grund der

1) A. Elsas, Wied. Ann. **19.** p. 474. 1883.

Erscheinung wohl ausgeschlossen, wenn auch offenbar immer zwei zueinander senkrechte ausgezeichnete Richtungen auftreten.

### Glimmer.

Am bequemsten für die Versuche sind wohl die Platten aus Glimmer, da man sich hier die verschiedensten Dicken bei vollkommener Planparallelität herstellen kann. Die Chladnischen Klangfiguren entstehen hier auch am leichtesten und deutlichsten bis hinauf zu sehr hohen Obertönen. Es wurden z. B. leicht noch erhalten die Figuren mit drei Knotenkreisen und zwei Knotendurchmessern, mit einem Knotenkreis und drei Knotendurchmessern, mit vier Knotenkreisen usw.; bei der Kleinheit der Platten (Durchmesser von etwa 10 mm an) geben diese Figuren einen sehr zierlichen Anblick. Bei sehr dünnen Blättchen ist die Empfindlichkeit sehr groß, wenn man gerade Resonanz hat. Es ließ sich dann im ganzen Zimmer, auf etwa 8 m Entfernung, die Erregung des Sandes gut nachweisen. Da hier in der Spaltfläche des Glimmers der Elastizitätsmodul nach verschiedenen Richtungen verschieden ist[1]), so läßt sich die nur für isotrope Substanzen geltende Theorie hier nicht anwenden.

Es traten hier bei Glimmer die Obertöne der Platten bis zu sehr hohen Ordnungen, drei Knotenkreise und zwei Knotendurchmesser und dergl. leicht auf. Merkwürdigerweise hatten die Klangfiguren hier fast stets diejenigen Formen, die abweichend von der typischen scharfe exakte Knotenkreise und Knotendurchmesser enthaltenden Form, nach den Versuchen von Chladni[2]), in seiner „Akustik" abgebildet, öfters bei Platten mit freiem Rand entstehen. Es seien hier besonders genannt die Figg. 109b und 111c in Chladnis „Akustik".

Besonders auffallend war hierbei die aus einer Ellipse und einem diese einschließenden Fünfeck bestehende Klangfigur, die sehr oft auftrat (Fig. 109b).

Bei der Verwendung dieser Glimmerplatten zur Messung hoher Töne wird man sie am besten nach irgendeiner anderen (etwa nach der im folgenden Abschnitt beschriebenen) Methode eichen.

1) L. A. Coromilas, Dissert. Tübingen 1877; Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 407. 1877.

2) E. F. F. Chladni, Akustik, Leipzig 1830. Breitkopf & Härtel.

3. Messung der Schwingungszahlen mittels der Chladnischen Klangfiguren von Platten mit freiem Rande (Deckgläschen) und Berechnung der zugehörigen Tonhöhe.

Auch die Schwingungen von kleinen dünnen Platten mit *freiem* Rande, deren Berechnung wir Kirchhoff verdanken, lassen sich in einfacher Weise zur Messung hoher Schwingungszahlen verwenden.

Ich habe hierzu kreisrunde Deckgläschen für Mikroskope benutzt, wie sie im Handel erhältlich sind. Legt man ein

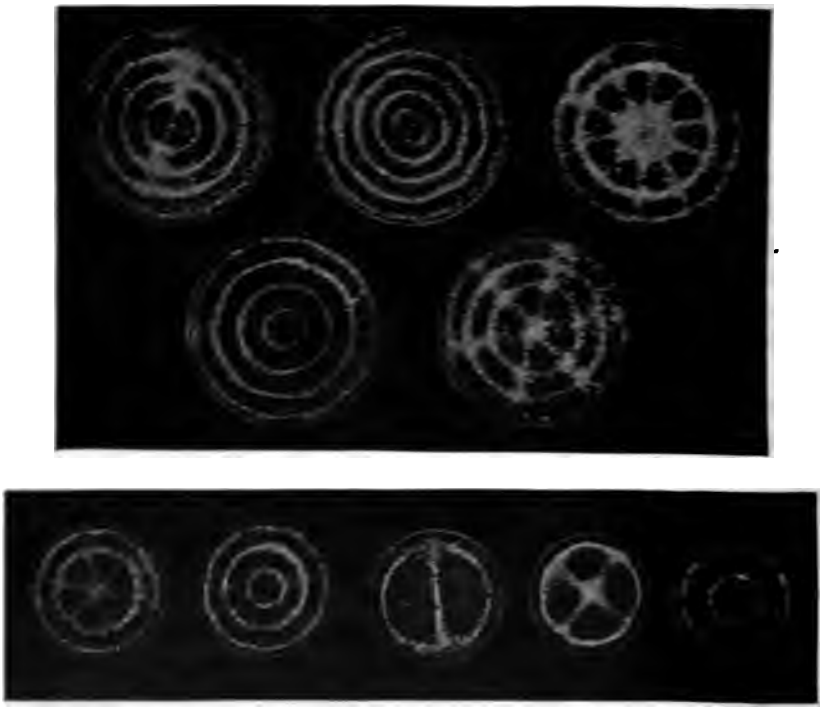


Fig. 8. Natürliche Größe.

solches, mit feinem Sande bestreut, auf ein sehr weitmaschiges Drahtnetz (etwa 3—4 mm Maschenweite) und hält dieses über die tönende Pfeife, so entstehen in überraschender Leichtigkeit und Schärfe die Chladnischen Klangfiguren, wenn der Pfeifenton mit einem der Eigentöne der Platte in Resonanz steht.

Vorstehend sind einige der so erhaltenen Klangfiguren in natürlicher Größe abgebildet. Sie sind (nach Vorschlag von Hrn. Prof. Schaum) durch direktes Auflegen auf Kopierpapier photographiert.

Bei nicht zu hohen Obertönen gerät die Platte in leichte Bewegung auf dem Drahtnetz. Bei dem ersten und zweiten Oberton springt sogar die ganze Platte bei Resonanz lebhaft etwa 1—2 cm in die Höhe. Die Einstellung ist sehr scharf; geringe Änderungen der Schwingungszahl sind am Ausbleiben der Klangfigur zu erkennen. Es hat sich, soweit die bisherigen Messungen reichen, eine befriedigende Übereinstimmung mit der Kirchhoffschen Theorie ergeben, sowohl in bezug auf die absolute Höhe der Töne, als auch in bezug auf die Größe der Radien der Knotenkreise.[1] [2])

Die Kirchhoffsche Theorie (Ges. Werke p. 283) gibt für den Grundton der freien Scheibe von der Dicke $D$, dem Radius $R$, dem Elastizitätsmodul $E$ und der Dichte $\varrho$

$$(9)\quad \begin{cases} \text{a)} & N = 0{,}261\,\dfrac{D}{R^2}\sqrt{\dfrac{E}{\varrho}} \text{ v. d. pro sec, für } \mu = \frac{1}{4}, \\ \text{b)} & = 0{,}256\,\dfrac{D}{R^2}\sqrt{\dfrac{E}{\varrho}} \text{ v. d. pro sec, für } \mu = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

(Die Angabe von Kirchhoff, l. c., bezieht sich auf *einfache* Schwingungen, wie zwar nicht ausdrücklich gesagt, aber sich durch Nachrechnen aus der allgemeinen Theorie ergibt.)

Die Klangfigur besteht natürlich aus Durchmessern und Kreisen. Die Zahl der Durchmesser sei mit $n$, die der Radien mit $\nu$ bezeichnet. Nach der Theorie von Kirchhoff ist die Höhe der Eigentöne der freien Platte, den Grundton gleich 1 gesetzt, in folgender Tabelle (für $\mu = \frac{1}{4}$) gegeben.

| $\nu$ | $n=0$ | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | 1,0000 | 2,3124 | 4,0485 | 6,1982 |
| 1 | 1,6131 | 3,7032 | 6,4033 | 9,6445 | 13,3937 | 17,6304 |
| 2 | 6,9559 | 10,8383 | 15,3052 | 20,3249 | | |
| 3 | 15,9031 | 21,25? | | | | |

1) Bisher scheint die Kirchhoffsche Theorie nur in bezug auf die *relative* Tonhöhe verifiziert zu sein.

2) Über die Erzeugung Chladnischer Klangfiguren an sehr kleinen im Mittelpunkt befestigten Platten durch Anstreichen mit dem Bogen vgl. R. König, Wied. Ann. 69. p. 729. 1899.

Es seien nun p. 801—803 einige Messungen mitgeteilt. Unter $N_{ber.}$ sind diejenigen Werte von $N$ angegeben, die man erhält, wenn man in (9a) $\sqrt{E/\varrho}$ zu $5 \cdot 10^5$ cm/sec annimmt, was ungefähr einem für Glas gültigen Durchschnittswert von $\sqrt{E/\varrho}$ entspricht.

In den Versuchen wurde eine neue mir von Hrn. Geheimrat C. Stumpf freundlichst zur Verfügung gestellte Galtonpfeife nach Edelmann benutzt. Unter $N_{Staubfigur}$ sind, soweit ein Vergleich zulässig, die mittels Staubfiguren ermittelten Schwingungszahlen angegeben. Der Winddruck bstrug stets 900 mm.

In der „Pfeifenton" überschriebenen Kolonne bedeuten die Ziffern 0 Grundton der Pfeife, 1 erster Oberton der Pfeife (= 3 mal Grundton), 2 zweiter Oberton der Pfeife usw.

In Anbetracht des Umstandes, daß hier für $\sqrt{E/\varrho}$ nur mit einem Mittelwert gerechnet ist, darf man wohl die Übereinstimmung der durch die Chladnischen Klangfiguren an den freien kreisförmigen Platten bestimmten mit der nach der Staubfigurenmethode ermittelten als durchaus befriedigend bezeichnen. Es ist dadürch einmal eine gewisse Bestätigung der Kirchhoffschen Theorie gegeben; ferner ist nun aber weiter auch damit gezeigt, daß diese so erregten Schwingungen freier Platten sich zur Bestimmung sehr hoher Schwingungszahlen vorzüglich eignen. Ich möchte diese Methode, zumal für sehr hohe Töne, als wesentlich bequemer empfehlen, als die Methode der Kundtschen Staubfiguren. Bei sehr hohen Tönen entstehen diese sehr viel schwerer als die Chladnische Klangfigur.

Im allgemeinen sind die mit Kundtschen Staubfiguren ermittelten Schwingungszahlen etwa 10 Proz. höher als die aus der Chladnischen Klangfigur bestimmten. Es ist sehr wohl möglich, daß der für $\sqrt{E/\varrho}$ angesetzte Mittelwert $5 \cdot 10^5$ cm/sec um 10 Proz. zu niedrig ist. Die Schallgeschwindigkeit im Glas ist oft höher als $5 \cdot 10^5$ cm/sec gefunden.

Eine besondere Bestimmung der Werte von $E$, $\mu$ und $\varrho$ für die verwendeten Gläser zur exakten Prüfung der Kirchhoffschen Theorie ist in Vorbereitung. Die relativen Werte der Schwingungszahlen stimmen gut mit der Theorie, ebenso die Durchmesser der Knotenkreise.

| Dicke in mm | Durchmesser in mm | Grundton ber., v. d. pro sec | Maulweite | Pfeifenlänge in mm | Klangfigur $n$ | Klangfigur $\nu$ | $N_{\text{ber.}}$ in v. d. | $N_{\text{Staubfigur}}$ | Pfeifenton | Knotendurchmesser ber. | Knotendurchmesser gef. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1765 | 17,65 | 2957 | 0,90 | 6,3 | 1 | 2 | 31629 | | 2 | 8,85; 15,40 | 8,60; 15,10 |
| " | " | " | " | 3,8 | — | 3 | 47010 | | 2 | | |
| " | " | " | " | 2,9 | 1 | 1 | 18923 | 20500 | 0 | | |
| " | " | " | " | 2,6 | — | 2 | 20578 | 22460 | 0 | 6,90; 14,89 | 7,0; 14,60 |
| " | " | " | " | 11,3 | 2 | 2 | 45286 | | 3 | | |
| " | " | " | " | 15,3 | — | 3 | 47010 | | 4 | | |
| " | " | " | " | 1,0 | 1 | 2 | 31629 | | 0 | | |
| " | " | " | " | 10,8 | — | 3 | 47010 | | 3 | | |
| " | " | " | " | 18,6 | 2 | 2 | 45286 | | 5? | | |
| " | " | " | " | 22,3 | 2 | 2 | 45286 | | 6? | | |
| " | " | " | " | 0,2 | 2 | 2 | 45286 | | 0 | | |
| " | " | " | 2,0 | 6,8 | 1 | 1 | 10989 | 11630 | 0 | | |
| " | " | " | " | 15,8 | — | 1 | 4798 | 5270 | 0 | | |
| 0,256 | 15,50 | 5750 | 2,0 | 2,1 | 1 | 1 | 21276 | | 0 | | |
| " | " | " | " | 8,25 | — | 1 | 9247 | 9470 | 0 | 10,55 | 10,70 |
| " | " | " | " | 11,40 | 1 | 1 | 21276 | | 0 | | |

| Dicke in mm | Durchmesser in mm | Grundton ber., v. d. pro sec | Maulweite | Pfeifenlänge in mm | Klangfigur | | $N_{ber.}$ in v. d. | $N_{Staubfigur}$ | Pfeifenton | Knotendurchmesser | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $n$ | $\nu$ | | | | ber. | gef. |
| 0,176 | 17,70 | 3179 | 2,0 | 6,0 | 1 | 1 | 10932 | 12040 | 0 | | |
| „ | „ | „ | „ | 15,9 | — | 1 | 4756 | 5220 | 0 | | |
| 0,176 | 17,80 | 3150 | „ | 5,8 | 1 | 1 | 10832 | 12170 | 0 | | |
| „ | „ | „ | „ | 16,2 | — | 1 | 4712 | 5170 | 0 | | |
| 0,146 | 17,70 | 2484 | „ | 7,7 | 1 | 1 | 9005 | 10000 | 0 | | |
| „ | „ | „ | „ | 19,8 | — | 1 | 3917 | 4110 | 0 | | |
| 0,177 | 17,70 | 2949 | 1,4 | 5,85 | 1 | 1 | 10955 | 12110 | 0 | 13,80 | 13,78 |
| „ | „ | „ | „ | 15,90 | — | 1 | 4765 | 5200 | 0 | | |
| „ | „ | „ | 0,70 | 0,8 | 1 | 2 | 32094 | | 0 | | |
| „ | „ | „ | „ | 2,8 | 3 | 2 | 60163 | | 1? | | |
| „ | „ | „ | „ | 0,9 | 1 | 3 | 62769? | | 1? | | |
| 0,1765 | 17,65 | 2957 | 0,90 | 7,7 | 2 | 2 | 45237 | | 2 | 9,91; 15,70 | 9,65; 15,75 |
| „ | „ | „ | „ | 7,8 | — | 3 | 47010 | | 2 | 4,55; 10,44<br>15,82 | 4,35; 10,25<br>75,65 |

| Dicke in mm | Durchmesser in mm | Grundton ber., v. d. pro sec | Maulweite | Pfeifenlänge in mm | Klangfigur | | $N_{ber.}$ in v. d. | $N_{Staubfigur}$ | Pfeifenton |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $n$ | $\nu$ | | | |
| 0,147 | 15,75 | 3096 | 1,0 | 0,90 | 1 | 2 | 33405 | 34720 | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 2,60 | — | 2 | 21520 | 22650 | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 6,10 | 1 | 2 | 33405 | | 1 |
| „ | „ | „ | „ | 11,10 | 1 | 2 | 33405 | | 2 |
| „ | „ | „ | 0,75 | 1,00 | 1 | 2 | 33405 | 34650 | 0 |
| „ | „ | „ | 2,0 | 5,7 | 1 | 1 | 11457 | 12300 | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 2,15 | 2 | 1 | 19828 | | |
| „ | „ | „ | „ | 15,4 | — | 1 | 4984 | 5310 | 0 |
| 0,160 | 15,75 | 3373 | 2,0 | 5,25 | 1 | 1 | 12481 | 13080 | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 14,80 | — | 1 | 5481 | 5760 | 0 |
| 0,291 | 16,00 | 5929 | „ | 7,0 | — | 1 | 9557 | 10830 | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 9,7 | 1 | 1 | 21940 | | 1 |
| „ | „ | „ | „ | 25,8 | — | 1 | 9557 | | 1 |
| „ | „ | „ | 1,0 | 0,8 | — | 2 | 41271 | | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 0,6 | 1 | 1 | 37930 | | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 2,3 | 1 | 1 | 21940 | | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 4,5 | — | 2 | 41271 | | 1 |
| „ | „ | „ | „ | 8,3 | — | 2 | 41271 | | 2 |
| „ | „ | „ | „ | 9,3 | 2 | 1 | 37930 | | 2 |
| „ | „ | „ | „ | 9,9 | 1 | 1 | 21941 | | 1 |
| „ | „ | „ | 0,75 | 2,3 | 1 | 1 | 21941 | | 0 |
| „ | „ | „ | „ | 4,6 | — | 2 | 41271 | | 1 |
| „ | „ | „ | „ | 9,8 | 1 | 1 | 21941 | | 1 |
| „ | „ | „ | „ | 20,6 | — | 2 | 41271 | | 5 |

Bei der Bestimmung hoher Schwingungszahlen wird man am besten an einem schon auf anderem Wege bestimmten Ton den Faktor der Gleichung (9) empirisch ermitteln. Für die Obertöne der Pfeife ergeben sich durchaus wahrscheinliche Werte. Wie schon früher von mir, Schwendt und Edelmann gefunden wurde, sind sie stets etwas kleiner als das theoretische Vielfache des Grundtones. Während früher aber nur die Obertöne mit Staubfiguren bis höchstens zum zweiten gefunden sind, zeigt sich hier, daß sie bei kleiner Maulweite und relativ großer Pfeifenlänge leicht bis zum sechsten nachzuweisen sind.

Die Schwingungszahl des Tones mit drei Knotenkreisen und einem Knotendurchmesser ist von Kirchhoff nicht mehr berechnet worden. Sie ist hier, bezogen auf den Grundton, zu 21,25 angesetzt auf Grund der Bemerkung von Kirchhoff, daß sich die Obertöne immer mehr den Quadraten von $n + 2\nu$ nähern. Dementsprechend ist eine der berechneten Schwingungszahlen (in den Tabellen mit ? bezeichnet) als unsicher anzusehen.

Auffällig ist, daß es nicht gelang, diejenigen Chladnischen Klangfiguren zu erhalten, die nur Knotendurchmesser, keine Knotenkreise haben. Daß sie sich bei der gebrauchten Versuchsanordnung schwerer bilden als die anderen, ist allerdings sehr plausibel. Man wird sie wohl bekommen, wenn man die Platte nicht auf Drahtnetze, sondern auf entsprechende Drahtsterne auflegt.

Es ist zu erwarten, daß man nach dieser Methode auch leicht die freien Schwingungen dünner, kleiner Stäbchen erhalten wird. Es wird so z. B. möglich sein, die relativen (und vielleicht auch die absoluten) Werte von $E$ für Glimmer in den verschiedenen Richtungen zu messen.

#### 4. Messung der Schwingungszahl durch Beugung.

Die Empfindlichkeit der Glimmer- und Papierplatten ließ es als möglich erscheinen, mit ihrer Hilfe Beugungsvorgänge bei hohen Tönen zu verfolgen.[1]) Es wurden zwei Beugungs-

1) In sehr vollkommener Weise ist die Beugung kürzlich von W. Altberg bei den sehr hohen Tönen, die bei oszillierenden Funkenentladungen entstehen, zur Messung der Wellenlänge verwandt worden (Ann. d. Phys. **23**. p. 267. 1907).

gitter benutzt. Sie wurden aus einem großen Kartonpapierbogen durch Ausschneiden von Streifen hergestellt. Die Länge der Streifen betrug bei beiden 25 cm, die Breite sowohl der ausgeschnittenen wie der stehenbleibenden Streifen im ersten Gitter 15 mm, im zweiten 10 mm. Die Anzahl der Öffnungen betrug bei beiden Gittern 5.

Die Pfeife wurde in etwa 20—25 cm Abstand unter dem horizontal liegenden Gitter aufgestellt. Durch Pappschirme wurde dafür Sorge getragen, daß kein Schall direkt zu der Glimmerplatte gelangen konnte, mit der nun der Raum oberhalb der Gitterebene abgesucht wurde.

In der Tat war die Beugung gut nachweisbar, wenn man eine Platte benutzte, die mit dem zu untersuchenden Ton in Resonanz war. Die aus dem Beugungswinkel berechnete Schwingungszahl stand in befriedigender Übereinstimmung mit der nach anderen Methoden gemessenen. Die Genauigkeit ist zwar nicht so groß, wie bei anderen Meßmethoden, wenigstens für die benutzte Anordnung, aber immerhin ist die Größenordnung der Schwingungszahl gut zu messen. Die Einstellung ist oft überraschend scharf. In der skizzierten Anordnung ist $g\,g$ das Gitter und $A$ die Pfeife. $a$ ist von der Mitte des Gitters gerechnet.

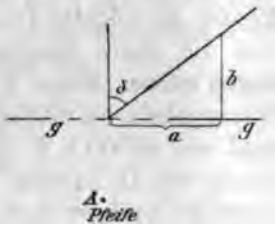


Fig. 4.

Es seien einige Messungen mitgeteilt.

Gitterkonstante 30 mm. Pfeifenlänge 3,9, Winddruck 80 mm.

| $a$ | $b$ |
|---|---|
| 15 cm | 12 cm |
| 20 | 17 |
| 25 | 21 |
| 30 | 28 |
| 35 | 25 |
| 40 | 28 |
| 45 | 32 |

Hieraus berechnen sich als extreme Werte:

$$\delta_1 = 54{,}5^\circ$$
$$\delta_2 = 49{,}5^\circ.$$

Dies ergibt die Schwingungszahlen:

$$N_1 = 14000$$
$$N_2 = 14900.$$

Nach anderen Methoden fand sich $N = 15600$. Der Ton war hörbar.

Ein anderer Ton, der zu $N = 21000$ bestimmt war, ergab mittels Beugung die Schwingungszahl zwischen 17700 und

20900. Der Ton lag an der Hörgrenze. Meist war er für mich unhörbar.

Ein Ton von $N = 24000$ v. d., *für mich ganz unhörbar*, ergab durch Beugung $N = 23900$ bei der Messung mit dem Gitter von der Gitterkonstante 20 mm ($\delta = 45°$). Ich zweifle nicht, daß man mit diesen Platten auch z. B. den Fresnelschen Spiegelversuch wird anstellen können.

### B. Bestimmung der oberen Hörgrenze.

#### 1. Allgemeines.

Die Angaben über die obere Hörgrenze des menschlichen normalen Ohres haben im Laufe der Zeit große Schwankungen erfahren. Namentlich auf Grund der Schwingungszahlen, die A. Appunn[1]) den von ihm verfertigten Stimmgabeln und Pfeifen für höchste Töne zuschrieb, bestand lange die Meinung, daß die obere Hörgrenze beträchtlich oberhalb 40000 v. d. liegen müsse. Schon F. Melde[2]) zeigte, daß die Appunnschen Stimmgabeln bei weitem nicht die angegebene hohe Schwingungszahl von 40000 v. d. geben, sondern viel tiefere Töne. Später wurde von C. Stumpf und M. Meyer[3]) mit der Differenztonmethode nachgewiesen, daß auch die Appunnschen Pfeifen nicht die von ihm angegebenen hohen Schwingungszahlen geben, sondern beträchtlich tiefere. Zwar bemühte sich A. Appunn[4]) Gegenbeweise für die Richtigkeit seiner Angaben zu bringen, doch ergab eine erneute Prüfung von mir[5]) nach drei verschiedenen Methoden, mit Appunns eigener optischer Methode, durch Kundtsche Staubfiguren, und durch die Quinckesche Interferenzröhre die vollständige Richtigkeit der von Stumpf und Meyer durch Differenztöne ermittelten Schwingungszahlen.

Zuverlässige Methoden zur Bestimmung der oberen Hörgrenze waren gegeben in den von Rudolph König in Paris angefertigten Klangstäben, sowie durch die Stimmplatten von F. Melde.[6]) Die Bestimmungen der hohen Schwingungszahlen

1) A. Appunn, Wied. Ann. **64.** p. 409. 1898.
2) F. Melde, Wied. Ann. **51.** p. 661; **52.** p. 238. 1894.
3) C. Stumpf u. M. Meyer, Wied. Ann. **61.** p. 773. 1897.
4) A. Appunn, Wied. Ann. **67.** p. 217. 1899.
5) F. A. Schulze, Wied. Ann. **68.** p. 99. 1899.
6) F. Melde, l. c.; Marburger Sitzungsber. Mai 1898.

wurde sehr erleichtert durch die zuerst von A. Schwendt[1]), kurz darauf unabhängig von Schwendt von mir[2]) angegebene Verwendung der Kundtschen Staubfiguren, die sowohl bei Schwingungen fester Körper, als auch bei Pfeifen anwendbar ist.

A. Schwendt[3]) hat diese Methode zur Bestimmung der oberen Hörgrenze auf die Königschen Klangstäbe, die Königschen Stimmgabeln, die Königsche Galtonpfeife und schließlich die Edelmannsche Galtonpfeife angewandt. Er findet dabei der Reihe nach als obere Hörgrenze: 20480, 21845, 21845, 27361 v. d. Mit Hilfe der Meldeschen Stimmplatten findet sich die obere Hörgrenze je nach dem Alter zwischen 16000 und 20000.

Als für das folgende wichtig sei hier gleich hervorgehoben, daß die Galtonpfeifen hierbei mit dem Gummiball angeblasen wurden.

Im Gegensatz zu Schwendt fand ich[4]) die obere Hörgrenze bei einer Edelmannschen Galtonpfeife wesentlich tiefer als 27000, nämlich bei einem Winddruck von

| | | | |
|---|---|---|---|
| 90 | mm | Wasser | 16340 v. d. |
| 240 | „ | „ | 17200 „ |
| 500 | „ | „ | 19000 „ |

Die Tonhöhe wurde dabei gemessen mit Hilfe der Quinckeschen Interferenzröhre, und zwar, soweit die Töne hörbar waren, mit dem Ohre, darüber hinaus durch eine das Ohr ersetzende auf Korkring geklebte Glimmerplatte, die auf die Schallaustrittsöffnung gesetzt wurde.

Die Methode der Kundtschen Staubfiguren, die ich in jener Abhandlung bereits im Jahre 1899 zur Messung der Töne der Edelmannschen Galtonpfeife benutzt hatte, wandte nun später M. Th. Edelmann[5]) im Jahre 1900 von neuem auf die Bestimmung der Tonhöhe der von ihm mit besonderer Präzision gearbeiteten Galtonpfeifen mit verstellbarer Maulweite an. In betreff der oberen Hörgrenze kam Edelmann

1) A. Schwendt, Naturf. Ges. Basel 12. Heft 2, 8. Febr. 1899; Archiv f. d. ges. Physiol. 75. p. 346. 1899.

2) F. A. Schulze, Wied. Ann. 68. p. 99 u. 869. 1899.

3) A. Schwendt, l. c. p. 23.

4) F. A. Schulze, Wied. Ann. 68. p. 869. 1899.

5) M. Th. Edelmann, Zeitschr. f. Ohrenheilkunde 36. p. 330. 1900; Ann. d. Phys. 2. p. 469. 1900.

hierbei zu dem auffallenden, mit fast allen früheren [1]) Bestimmungen im Gegensatz stehenden Resultat, daß die obere Hörgrenze etwa bei 50000 v. d. läge. Hiernach wäre also die alte frühere Angabe von Appunn, daß die Hörgrenze über 40000 v. d. läge, wieder als richtig erwiesen, trotzdem seine objektive Bestimmung der Schwingungszahl seiner Pfeifen und Stimmgabeln nicht richtig war. Edelmann bläst hierbei die Pfeife mit dem Gummiballgebläse an.

Nun haben bereits Stumpf und Meyer [2]) darauf aufmerksam gemacht, daß es zu Fehlern führen kann, wenn man zum Anblasen der Galtonpfeife das Gummiballgebläse benutzt, anstatt mit einer bestimmten gleichmäßigen Anblasestärke zu arbeiten.

Auch Wachsmuth [3]) hat auf die Unzulässigkeit dieser Anblasemethode hingewiesen.

Eine ausführliche experimentelle Bearbeitung dieses Gegenstandes verdanken wir Charles S. Myers.[4]) Er hat die Töne der Galtonpfeife bei verschiedenen Anblasestärken untersucht an einem von Edelmann mit Kundtschen Staubfiguren geeichten Exemplar. Beim Anblasen mit dem Druck auf den Gummiball, wie es Edelmann vorschreibt, steigt der Anblasewind schnell von Null auf einen beträchtlichen Wert, um ebenso schnell wieder auf Null herabzusinken. Bei sehr kleinen Pfeifenlängen, die nach Edelmanns Messungen mit Kundtschen Staubfiguren außerordentlich hohen Tönen von 30000 v. d. und mehr entsprechen, ist nun ein Ton sowohl zu Anfang wie zu Ende des Druckes auf den Gummiball hörbar.

In der zitierten Abhandlung hat nun Myers bei verschiedenen Pfeifenlängen die Tonhöhe bei verschiedenen jeweils konstant gehaltenen Anblasestärken gemessen mittels der Methode der empfindlichen Flamme, die darin besteht, daß die empfindliche Flamme zwischen Tonquelle und einer vertikalen

1) F. Bezold fand mit den älteren Edelmannschen Galtonpfeifen die Hörgrenze durchschnittlich bei der Pfeifenlänge 2,0, was etwa 20000 v. d. entspricht. Über die funkt. Prüf. d. menschl. Hörorgans. Wiesbaden 1897, p. 123; Zeitschr. f. Ohrenheilkunde 28. p. 254. 1892.

2) C. Stumpf u. M. Meyer, l. c.

3) R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. 14. p. 469. 1904.

4) Ch. S. Myers, Journ. of Physiology 28. p. 417. 1902.

reflektierenden Wand aufgestellt wird. In Knoten der entstehenden Schallwellen wird die Flamme weniger affiziert, als im Bauch. Durch Verschieben der Flamme kann so die Wellenlänge ermittelt werden. Bei genügender Windstärke wurden die Messungen auch nach der Staubfigurenmethode gemacht. Es wurde bis herunter zu einer Pfeifenlänge von 1,3 mm festgestellt, daß stets bei schwachem Winddruck bedeutend tiefere Töne auftreten als bei starken. So fand sich für diese kleinste Pfeifenlänge von 1,3 mm, bei der nach Edelmann die Pfeife den Ton 28000 v. d. geben sollte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| bei | 86 mm | Wasserdruck die Tonhöhe | 5673 v. d. |
| | 109 „ | | 10942 |
| | 680 „ | | 23315 |
| | 800 „ | | 28332 |

Ähnlich ist es bei größeren Pfeifenlängen. Es ist demnach fast sicher, daß man bei Anblasen mit dem Gummiball nicht den hohen durch die Kundtschen Staubfiguren gemessenen, bei hohem Druck entstehenden Ton hört, sondern den bedeutend tieferen zu Anfang und zu Ende bei geringem Druck auftretenden Ton. Demnach liegt also auch die obere Hörgrenze nicht so hoch, wie Edelmann angibt, sondern wahrscheinlich beträchtlich tiefer. Als obere Hörgrenze gibt Myers 20000—25000 v. d. an.

Trotzdem hierdurch bereits die Behauptung Edelmanns, die obere Hörgrenze liege um 50000, fast zwingend widerlegt war, sind doch noch seine Angaben bisher meist als richtig beibehalten und auch wissenschaftlichen Untersuchungen zugrunde gelegt worden.[1]) Auch A. Schwendt[2]) hat in dieser Weise die obere Hörgrenze als zwischen 37162 und 48000 liegend gemessen.

Auf freundliche Anregung von Hrn. Geheimrat C. Stumpf habe ich es deshalb unternommen, die Schwingungen der Edelmannschen Galtonpfeifen nochmals einer Untersuchung zu unterziehen.

---

Das Resultat meiner Versuche war, um es gleich hier schon zu sagen, im wesentlichen dasselbe, zu dem bereits

1) N. Stücker, Wiener Ber., Math.-naturw. Kl. 116. Abt. IIa. 1907.
2) A. Schwendt, Archiv f. Ohrenheilkunde 49.

Ch. S. Myers gekommen ist: Bei den kurzen Pfeifenlängen entstehen bei *schwachem* Anblasewind Töne, die gehört werden, aber verhältnismäßig tief sind (um 11000 v. d.). Bei Verstärkung des Anblasewindes verschwinden allmählich diese Töne, und von einem gewissen Anblasewind an entstehen die hohen, durch die Kundtschen Staubfiguren meßbaren Töne, die aber unhörbar sind. Die tatsächliche obere Hörgrenze finde ich auch wieder um 20000 v. d.

Ich bin jedoch bei diesen Messungen in der Pfeifenlänge erheblich unter die Pfeifenlänge von 1,3 mm gegangen, bis zu der herunter Myers untersucht hat, und zwar bis zu den Pfeifenlängen, bei denen ich überhaupt bei der auf dem Eichschein angegebenen Maulweite eben noch einen Ton hörte, nämlich bis 0,2 mm, für welche Stellung der hohe „Staubfigurenton" 48000 v. d. beträgt. Ferner habe ich auch wesentlich andere Meßmethoden benutzt wie Myers, sowohl für die hohen wie für die tiefen Töne.

Für die Messungen standen mir drei Edelmannsche Galtonpfeifen zur Verfügung. Zwei davon, sie seien mit $G_{\mathrm{I}}$ und $G_{\mathrm{II}}$ bezeichnet, gehören dem hiesigen Physikalischen Institut und stammen aus dem Jahre 1897. Sie sind nicht von Edelmann mit Kundtschen Staubfiguren geeicht, gleichen aber im Bau bereits vollkommen den neuen Edelmannschen Exemplaren. Namentlich also ist die „Maulweite", die Entfernung des ringförmigen Anblasespaltes vom Pfeifenrand variabel. Die Peripherie der die Anblasespalte tragenden Schraube war jedoch noch nicht, wie bei den neuen Edelmannschen Galtonpfeifen, mit einer Teilung versehen. Ferner kam ein vollkommen neues Exemplar, $G_{\mathrm{III}}$, von Edelmann mit einem Eichschein versehen, zur Untersuchung.

Zunächst wurde festgestellt, bis zu welcher Pfeifenlänge hinunter ich bei Anblasen mit dem Gummiball nach der Vorschrift von Edelmann noch einen klaren Ton hörte. Es fand dies statt für $G_{\mathrm{I}}$ und für $G_{\mathrm{II}}$ bis zu einer Pfeifenlänge von 0,6 mm hinunter bei Maulweiten zwischen 0,95 und 1,7.

Bei kleinen Pfeifenlängen konnte ich bei $G_{\mathrm{I}}$ und $G_{\mathrm{II}}$ bei Anblasen mit dem Gummiball keinen Ton mehr hören.

Bei wesentlich kleinerer Pfeifenlänge konnte ich bei Anblasen mit dem Gummiball bei $G_{\mathrm{III}}$ noch einen Ton gut hören,

nämlich bei einer Pfeifenlänge von 0,25 und der von Edelmann auf der beigegebenen Eichtabelle angegebenen Maulweite 0,73.

Es war deutlich erkennbar, daß diese Töne nur am Anfang und am Ende des Druckes auf den Gummiball gehört wurden. Nach der beigegebenen Eichtabelle sollte bei $G_{III}$ die Pfeifenlänge 0,25 und die Maulweite 0,73 einen Ton von etwa 46300 v. d. liefern, eine Pfeifenlänge von 0,6 etwa den Ton 37000.

**2. Messung der Schwingungszahl der tiefen, bei geringem Winddruck und kleinen Pfeifenlängen auftretenden Töne.**

Es handelte sich nun zunächst darum, die Tonhöhe dieses hörbaren, im vorigen besprochenen, bei sehr kleinen Pfeifenlängen auftretenden Tones und die Bedingungen seines Auftretens zu ermitteln.

Um bestimmte Anblasestärken zu benutzen, wurde die zu untersuchende Pfeife an ein Wasserstrahlgebläse angeschlossen. Der Winddruck wurde durch ein Wassermanometer gemessen.

Bis auf geringfügige Unterschiede zeigten sich die Pfeifen $G_{I}$ und $G_{II}$ in ihrem Verhalten gleich, so daß sie im folgenden zusammen behandelt werden mögen. Es wurde sowohl Pfeifenlänge wie Winddruck, wie Maulweite variiert.

Die Tonhöhe wurde nach der bereits früher von mir[1]) benutzten Methode mittels der *Quinckeschen Interferenzröhre bestimmt.* Zu einer genauen Messung der Maxima und Minima erwies es sich hierbei als nötig, die dem Ohre zugeführte Tonenergie möglichst gering zu machen. Die besten Einstellungen, meist auf das Tonminimum, wurden gemacht, wenn *beide* Ohren mit Watte verstopft wurden, und das Ende der Glasröhre, die durch Gummischlauch mit der Ausführungsöffnung verbunden war, in die Nähe des einen Ohres gebracht wurde. Allgemein wurde gefunden: Bei derselben Maulweite nimmt die Tonhöhe mit dem Winddruck zu, bei demselben Winddruck mit der Maulweite ab.

1) l. c.

Aus dem Beobachtungsmaterial für $G_{\text{I}}$ und $G_{\text{II}}$ seien folgende Zahlen herausgegriffen:

**Pfeifenlänge 2,0.**

Der gehörte Ton entsteht bei einem Winddruck von 50 mm und vergeht wieder bei 180 mm.

| Winddruck | Maulweite | Tonhöhe |
|---|---|---|
| 50 mm | 1,25 | $N$ = 5570 |
| | 3,30 | 1550 |
| 110 „ | 1,0 | 11000 |
| | 2,70 | 4250 |
| 180 „ | 1,2 | 14160 |
| | 1,75 | 4250 |

**Pfeifenlänge 1,5.**

| Winddruck | Maulweite | Tonhöhe |
|---|---|---|
| 50 mm | 1,25 | $N$ = 5480 |
| | 2,9 | 2040 |
| 100 „ | 0,9 | 12140 |
| | 2,7 | 5150 |
| 150 „ | 1,0 | 11700 |
| | 1,9 | 5500 |
| 180 „ | 1,25 | 12140 |
| | 1,75 | 8500 |

**Pfeifenlänge 1,0.**

| Winddruck | Maulweite | Tonhöhe |
|---|---|---|
| 115 mm | 1,0 | $N$ = 11330 |
| | 1,2 | 10000 |
| | 1,40 | 8500 |
| | 1,70 | 7080 |
| 155 „ | 1,10 | 12600 |
| | 1,60 | 9440 |
| 190 „ | 1,50 | 13080 |
| | 1,60 | 11330 |

**Pfeifenlänge 0,7.**

| Winddruck | Maulweite | Tonhöhe |
|---|---|---|
| 105 mm | 1,0 | $N$ = 11000 |
| | 1,6 | 8500 |
| 190 „ | 1,5 | 6450 |

Bei einer Pfeifenlänge von 0,5 traten nur noch unbestimmte hörbare Töne auf, bei noch kleineren Pfeifenlängen waren bei keinem Winddruck und keiner Maulweite mehr irgendwelche Töne hörbar. Bemerkt sei, daß die in diesen Tabellen vorkommenden extremen Winddrucke und Maulweiten immer die Grenzen für beide sind, bei denen noch gute klare Töne auftreten.

Sie treten bei Winddrucken von ca. 50 mm auf und verschwinden wieder bei ca. 240 mm. Das Maulweitenintervall, bei dem die Töne auftreten, ist verschieden, je nach Pfeifenlänge und Winddruck und liegt zwischen etwa 0,95 und 3,0. Selbst der höchste dieser tiefen, bei schwachem Winddruck entstehenden Töne (ca. 14000) liegt noch durchaus innerhalb der allgemein anerkannten Hörgrenze. Es ist also nicht weiter erstaunlich, daß er gehört wird.

Die Höhe dieses tiefen, bei schwachem Anblasewind auftretenden hörbaren Tones wurde mit der Quinckeschen Interferenzröhre auch bei $G_{III}$ gemessen. Hier jedoch nur bei der Maulweite 0,73, die von Edelmann auf dem Eichschein angegeben war. Bei kleineren Maulweiten trat dieser Ton nicht mehr hörbar auf, und bei größeren Maulweiten war er tiefer. Für vorliegenden Zweck genügte es also, die Tonhöhe nur bei dieser Maulweite zu messen.

Die Erscheinung war hier folgende:

Bei 40 mm Winddruck trat zuerst ein gut hörbarer Ton auf, der dann bei 50 mm wieder verschwand. Er war für mich hörbar bis zur Pfeifenlänge 0,26 herunter.

Seine Tonhöhe war fast ganz unabhängig von der Pfeifenlänge 11300 v. d.

Nachdem dieser Ton bei dem Winddruck 50 mm verschwunden ist, tritt wieder ein hörbarer Ton (bei stets gleichbleibender Maulweite 0,73) auf bei einem Winddruck von etwa 100 mm, der dann wieder verschwindet bei einem Winddruck von ca. 180 mm.

Jedoch tritt dieser zweite Ton nur bei Pfeifenlängen von 0,9 an auf. Das Winddruckintervall $W$ dieses Tones hängt von der Pfeifenlänge ab in folgender Weise:

| Pfeifenlänge | Winddruckintervall |
|---|---|
| 0,9 | 180—150 |
| 1,0 | 130—150 |
| 1,3 | 110—200 |
| 1,6 | 110—200 |
| 1,8 | 110—200 |
| 2,0 | 100—180 |
| 2,3 | 80—180 |
| 2,6 | 80—160 |

Für die Tonhöhe wurde folgendes gefunden:

| Winddruck | Pfeifenlänge | Tonhöhe |
|---|---|---|
| 140 mm | 1,5 | 11300 |
| | 2,0 | 10460 |
| | 2,3 | 10000 |
| | 2,6 | 9440 |
| 180 mm | 1,4 | 11780 |
| | 1,6 | 11530 |
| | 1,8 | 11330 |
| | 2,0 | 10600 |

Die Tonhöhe des bei schwachem Winddruck, 45 mm Wasserdruck, bei $G_{III}$ zuerst entstehenden hörbaren Tones wurde mit der Quinckeschen Interferenzröhre ebenfalls gemessen. Es wurde dabei auch stets die vorgeschriebene Maulweite 0,73 benutzt.

Es fanden sich folgende Schwingungszahlen:

| Pfeifenlänge | Schwingungszahl | Pfeifenlänge | Schwingungszahl |
|---|---|---|---|
| 0,3 | 12140 | 1,3 | 12140 |
| 0,5 | 11700 | 1,6 | 13100 |
| 0,7 | 11000 | 1,8 | 12000 |
| 0,8 | 11300 | 2,0 | 11300 |
| 0,9 | 11300 | 2,3 | 11300 |
| 1,0 | 11300 | 2,6 | 11300 |

Die Hörgrenze war für mich bei 0,26, doch war der Ton hier schon zu unsicher, um meßbar zu sein.

Wenn also auch kleine Unterschiede in dem Verhalten der Pfeife $G_{III}$ gegenüber den Pfeifen $G_{I}$ und $G_{II}$ bestehen, so ist die Erscheinung wieder im wesentlichen dieselbe. Die Ton-

höhe des bei kleinen Pfeifenlängen bei schwachem Anblasen entstehenden Tones liegt vollständig im Bereich der allgemein als hörbar anerkannten Töne. Die unteren Grenzen derjenigen Pfeifenlängen, bei welchen so bei konstantem schwachen Winddruck noch für mein Ohr hörbare Töne gefunden wurden, nämlich 0,6 bei $G_{\mathrm{I}}$ und $G_{\mathrm{II}}$, und 0,26 bei $G_{\mathrm{III}}$, sind nun auch genau dieselben, bei denen ich auch bei Anblasen mit dem Gummiball noch einen Ton höre. Hiermit wäre es im Prinzip bereits völlig klargestellt, daß diejenigen Töne, die bei sehr kleinen Pfeifenlängen gehört werden, nicht diejenige Höhe haben, die man beim Anblasen mit dem Gummiball mittels der Kundtschen Staubfiguren mißt, sondern ganz wesentlich tiefer sind, so daß die Bestimmung der oberen Hörgrenze nicht durch Anblasen mit dem Gummiball erfolgen darf.

### 3. Messung der Schwingungszahlen der bei stärkerem Winddruck auftretenden Töne.

Zur Vervollständigung der Untersuchung und zur erneuten direkten Bestimmung der oberen Hörgrenze wurden nun auch die bei stärkerem Winddruck entstehenden Töne der Galtonpfeife nochmals untersucht. Es erschien mir dabei dem Zweck der vorliegenden Untersuchung entsprechend, nicht nur die Kundtschen Staubfiguren, sondern sowohl zum Nachweis der Existenz der hohen unhörbaren Töne, sowie zur Messung ihrer Schwingungszahl noch andere feinere Methoden anzuwenden. Einmal hätte die Untersuchung mit Kundtschen Staubfiguren wohl nichts Neues gegen die früheren Bestimmungen von mir, A. Schwendt und M. Th. Edelmann ergeben, und ferner erfordert das Entstehen der Kundtschen Staubfiguren eine nicht unbeträchtliche Intensität der Töne, so daß das erste Auftreten der Töne nicht beobachtet werden kann. Auch sind sie nur in seltenen Fällen[1]) dazu geeignet, das gleichzeitige Bestehen mehrerer Töne nachzuweisen.

Hierbei kamen nun die im vorigen Abschnitt A ausführlich beschriebenen Methoden zur Verwendung. Es sei hauptsächlich betont, daß sich hierbei die Angaben der Schwingungs-

1) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 13. p. 1067. 1904.

zahlen, so wie sie mit der Methode der Kundtschen Staubfiguren gemessen, auf dem Eichschein verzeichnet waren, durchaus gut bestätigten, und daß alle die verschiedenen Methoden unter sich vollständig befriedigende Übereinstimmung ergaben. Die Angaben des Eichscheines gelten allerdings für Anblasen der Pfeife mit dem Gummiball, so daß die Stärke des Anblasewindes, von dem die Tonhöhe abhängig ist, unbestimmt ist. Es sei deshalb hier nur eine Tabelle mitgeteilt, die einen Vergleich der mit Kundtschen Staubfiguren und mit der im Abschnitt A beschriebenen Methode mittels Chladnischer Klangfiguren von Plättchen mit freiem Rand gemessenen Schwingungszahlen enthält (bei 900 mm Winddruck); sie ist also nur ein Auszug der größeren im Abschnitt A mitgeteilten Tabelle. Doch sind die Zahlen $N_{ber.}$ der dortigen Tabelle um 10 Proz. vergrößert (vgl. die Bemerkung auf p. 800).

Winddruck 900 mm Wasser.

| Maulweite | Pfeifenlänge | $N$ aus Chladnischen Klangfiguren | $N$ aus Kundtschen Staubfiguren |
|---|---|---|---|
| 1,00 | 0,90 | 34720 | 36745 |
| 0,75 | 1,00 | 34720 | 36745 |
| 1,00 | 2,60 | 23670 | 22650 |
| 0,90 | 2,60 | 22640 | 22460 |
| 0,90 | 2,90 | 20810 | 20500 |
| 2,00 | 5,80 | 11910 | 12170 |
| 1,40 | 5,85 | 12050 | 12110 |
| 2,00 | 6,00 | 12020 | 12040 |
| 2,00 | 6,80 | 12030 | 11030 |
| 2,00 | 7,70 | 9910 | 10000 |
| 2,00 | 8,25 | 9170 | 9470 |
| 2,00 | 15,80 | 5280 | 5270 |
| 1,40 | 15,90 | 5240 | 5200 |
| 2,00 | 15,90 | 4310 | 4110 |

Im allgemeinen treten bei den sehr kleinen Pfeifenlängen diese hohen, mit Kundtschen Staubfiguren meßbaren Töne erst bei einem Winddruck auf, der etwas höher ist als derjenige, bei dem die tiefen hörbaren Töne verschwinden, über deren Schwingungszahl eben im vorigen Abschnitt berichtet ist. Die

Menge der zur Messung des hohen bei stärkerem Winddruck entstehenden „Staubfigurentones" der Galtonpfeife nun schon verwandten Methoden und die Übereinstimmung der nach allen Methoden erhaltenen Resultate gibt diesen wohl völlige Sicherheit. Es sind dies im ganzen sechs Methoden: Kundtsche Staubfiguren, Quinckesche Interferenzröhre, Chladnische Klangfiguren an Platten mit festem und mit freien Rand, Absuchen der Knoten und Bäuche stehender Wellen mit Platten, Beuguug.

Die ersten Spuren dieses hohen Tones treten bei kleinen Pfeifenlängen etwa bei 120 mm Wasserdruck auf, wie mit dünnen Glimmerplatten festgestellt wurde.

#### 4. Obere Hörgrenze, bestimmt mit der Galtonpfeife.

Nachdem nun also die Schwingungszahlen genau bekannt und durchgemessen waren, war es ein Leichtes, die obere Hörgrenze festzustellen.

Eine ganz exakte Angabe, etwa auf eine Schwingung, läßt sich nicht machen. Indem ich vorausschicke, daß ich ein durchaus normales Gehör zu besitzen glaube, gebe ich über meine obere Hörgrenze folgendes an: *Alle Töne über 20000 v. d. sind für mich durchaus unhörbar*, auch wenn sie so stark waren, daß ihre Existenz und Tönhöhe mittels der schwingenden kleinen Glimmerplättchen noch in vielen Zentimetern Entfernung von der Pfeife bis zu einer Pfeifenlänge von 0,2 herunter ohne Mühe aufs Deutlichste gemessen werden konnte.

Ferner ergab sich folgendes für mein Ohr. Oberhalb 20000, etwa bis 19000 herunter, war keine Tonempfindung vorhanden, auch wenn das Ohr nahe an die Pfeife gebracht war; es trat jedoch noch etwas oberhalb 20000 v. d. bis etwa 21000 v. d. eine ganz leise Tonwahrnehmung ein, wenn bei den Versuchen unter A, 1 der Raum zwischen Pfeife und reflektierender Tischplatte mit dem resonierenden Plättchen abgesucht wurde, und zwar immer dann, wenn das Plättchen sich im Bauch der stehenden Welle befand, also heftig mitschwang. Befand sich das Plättchen im Knoten der stehenden Welle, so war nichts zu hören. Die Erscheinung war

so deutlich, daß ich, ohne auf das Plättchen selbst zu sehen, angeben konnte, ob es sich im Bauch oder Knoten befand.

Von etwa 17000 v. d. Schwingungen an abwärts war der Ton immer deutlich zu hören. Ein Ermüdungseinfluß schien mir sehr deutlich. Die obere Hörgrenze war immer etwas gesunken, nachdem die hohen Töne längere Zeit eingewirkt hatten.

Kneift man bei einer Pfeifenlänge, die einen unhörbaren Ton gibt, etwa 1,5, die Windzuführung ab, so hört man dabei deutlich im letzten Augenblick den tiefen Ton, der bei schwachem Winddruck auftritt. Hr. Prof. Richarz hat sich von der Richtigkeit dieser Beobachtung, sowie von der objektiven Existenz der unhörbaren durch Chladnische Klangfiguren nachweisbaren Schwingungen ebenfalls überzeugt. Auch haben mir mehrere Herren des hiesigen Instituts diese Beobachtungen bestätigen können.

Die hohen unhörbaren Schwingungen sind bisher stets als Grundton der Pfeife besprochen.

Man erhält jedoch auch leicht, wie aus der Tabelle p. 801 bis 803 ersichtlich, bei kleinerer Maulweite bei großer Pfeifenlänge die Obertöne bei genügender Windstärke. Auch hier konnte stets festgestellt werden, daß diese unhörbar sind, sobald sie über etwa 20000 hinausgehen.

Für Pfeifenlängen über etwa 8 mm sind diese Obertöne bereits früher von mir, A. Schwendt und Edelmann mit Kundtschen Staubfiguren nachgewiesen.

Nach allem darf wohl als *Resultat* der vorliegenden Versuche ausgesprochen werden:

*Die obere Hörgrenze liegt auch für die starken Töne der Galtonpfeife im Einklang mit früheren Versuchen ungefähr bei $N = 20000$ v. d.*

*Die bei sehr kurzen Pfeifenlängen der Galtonpfeife bei Anblasen mit dem Gummiball wirklich gehörten Töne sind die bei schwachem Winddruck entstehenden und liegen weit unterhalb 20000. Die bei starkem Anblasen entstehenden, etwa durch*

*Kundtsche Staubfiguren oder andere Methoden meßbare Töne sind unhörbar, sobald sie über ungefähr $N = 20000$ liegen.*

Einer besonderen Erörterung bedarf noch folgende Frage Wie nachgewiesen ist, hat der bei ganz kleinen Pfeifenlängen bei sehr geringem Winddruck auftretende gehörte Ton nur verhältnismäßig geringe Tonhöhe von rund ca. 10000 v. d., liegt also jedenfalls weit unter der normalen oberen Hörgrenze. Ferner ist bei konstanter Maulweite und Anblasestärke diese Tonhöhe so gut wie unabhängig von der Pfeifenlänge.

Trotzdem ist, wie vielfach gefunden, und wie ich selbst wieder konstatieren konnte, die kleinste Pfeifenlänge, bei der dieser Ton bei Anblasen mit dem Gummiball eben noch gehört wird, individuell sehr verschieden. Es wäre ja sonst auch nicht möglich, daß bei Anblasen mit dem Gummiball unter Benutzung der Edelmannschen Eichtabelle die obere Hörgrenze für verschiedene Individuen ganz verschieden gefunden wurde. So war bei dem von mir gebrauchten Exemplar für mich die Hörgrenze bei einer Pfeifenlänge von 0,26, schwankte aber bei vier anderen durchaus normal hörenden Personen zwischen 0,15 und 0,6. Es ist dies wohl nur so zu erklären, daß für Töne dieser Höhe sich die kleinen Unterschiede der Reizschwelle sehr bemerkbar machen. Mit abnehmender Pfeifenlänge wird wohl auch die Intensität dieses Tones abnehmen, und demgemäß die Grenze seiner Hörbarkeit für verschiedene Ohren verschieden sein.[1])

Es wäre nun auch anzugeben, welchen Ursprung dieser tiefe hörbare, bei kleinsten Pfeifenlängen auftretende Ton hat. Ich muß gestehen, hierüber kein sicheres Urteil zu haben. Ich möchte vermuten, daß es einer der von A. Wachsmuth u. a. eingehend studierte Schneidenton ist; jedenfalls kann es nicht der eigentliche Pfeifenton sein. Dieser wird wohl der durch Kundtsche Staubfiguren gemessene Ton sein, da dieser ganz kontinuierlich mit abnehmender Pfeifenlänge ohne Sprung in die Höhe geht.

---

1) Derartige individuelle Unterschiede der Reizschwelle hat M. Wien (l. c.) bei 6000 v. d. zahlenmäßig nachgewiesen.

### 5. Nebenerscheinungen.

Anhangsweise möge noch über einige Erscheinungen berichtet werden, die vielleicht nicht ohne Interesse sind.

a) Zunächst sei erwähnt, daß bei den Galtonpfeifen bei größeren Pfeifenlängen bei gewissen auszuprobierenden Maulweiten gleichzeitig der Grundton und der nächste Oberton der Pfeife ertönen, wie das Gehör leicht feststellen kann. Man hört in diesen Fällen sehr gut einen Differenzton der beiden Töne. Am besten tritt er auf bei Pfeifenlängen zwischen 10 und 20 mm. Dieser Differenzton ist verhältnismäßig tief; er fängt bei schwachem Winddruck in einer Höhe von etwa 400 v. d. an und geht bei steigendem Anblasewind schnell in sehr große Tiefe. Bei gleichbleibendem Winddruck steigt die Tonhöhe dieses Differenztones mit der Maulweite. Ich vermute, daß es der Ton $3t-h$ ist, wo $t$ die Schwingungszahl des tiefen Grundtones, $h$ diejenige des Obertones ist. Denn die Schwingungszahl des Obertones ist, wie aus den früheren Messungen von mir, Schwendt und Edelmann schon bekannt ist, nicht genau das Dreifache des Grundtones. Nimmt man an, was wohl möglich sein dürfte, daß mit steigender Anblasestärke die Schwingungszahl des in Frage kommenden Obertones sich dem Dreifachen des Grundtones nähert, so ist damit das Verhalten des Differenztones bei steigender Windstärke erklärt.

b) Im allgemeinen steigt die Tonhöhe des Grundtones mit dem Winddruck. Jedoch kommen auch Fälle vor, in denen die Tonhöhe umgekehrt sinkt. So trat bei der Pfeifenlänge 19,7 und der Maulweite 1,5 folgendes ein: Geht man mit dem Winddruck von ca. 180 mm abwärts, so sinkt der Ton ganz allmählich; bei einem Winddruck von 100 mm geht er aber plötzlich um etwa einen ganzen Ton in die Höhe, um dann wieder bei 70—80 mm auf die frühere Tonhöhe ebenso schnell wieder herabzusinken.

### 6. Bestimmung der oberen Hörgrenze durch Longitudinalschwingungen dünner Drähte.

Die Bestimmung der oberen Hörgrenze für mein Ohr mittels der Galtonpfeife zu ca. 18000—19000 hat sich durch

Versuche mit einer ganz anderen Tonquelle gut bestätigt, nämlich an Longitudinalschwingungen von dünnen Drähten.[1]) Es kamen Drähte aus Stahl und aus Messing zur Verwendung. Sie wurden unter Spannung durch 2—3 Pfund im Weberschen Monochord eingespannt und durch Anreiben mit einem mit Kolophonium bestrichenen Lederlappen oder auch zwischen Daumen und Zeigefinger, die mit Kolophonium versehen waren, zu longitudinaler Schwingung angeregt. Mit einer Flachzange wurde dann eine Stelle des Drahtes festgehalten und das so verkürzte Drahtstück in Schwingung versetzt. Es wurde dann bei sukzessiver Verkürzung diejenige Drahtlänge ermittelt, die eben noch einen hörbaren Ton angab. Die Tonhöhe wurde bei großer Drahtlänge mit einem Sonometer festgestellt, und für die höheren Schwingungszahlen dann umgekehrte Proportionalität mit der Drahtlänge vorausgesetzt.

Bei einem Stahldraht von 0,39 mm Durchmesser ergab sich die Schwingungszahl bei 1200 mm Länge zu 2080 v. d. Ein Ton wurde eben noch gehört bei Verkürzung bis auf 14,0 cm Länge. Demnach ist die obere Hörgrenze **17800** v. d.

Ein Messingdraht von 0,26 mm Durchmesser gab bei 1200 mm Länge den Ton 1408 v. d. Ein hörbarer Ton war vorhanden bis zur Länge von 9,2 cm. Hieraus resultiert als obere Hörgrenze **18360** v. d. Daß bei beiden Drähten noch bei viel kürzeren Längen tatsächlich Schwingungen vorhanden waren, wurde durch lebhafte Einwirkung auf die sensible Flamme konstatiert.

Diese Longitudinaltöne sind sicher beträchtlich schwächer gewesen, als die sehr intensiven Töne der Galtonpfeife. Da trotzdem für die obere Hörgrenze bei beiden Tonquellen nahezu dieselben Schwingungszahlen gefunden wurden, dürfte dieses Resultat eine Stütze sein für die Ansicht, daß die obere Hörgrenze von der Tonintensität nicht sehr abhängig ist. Annähernd dieselbe Hörgrenze ist bereits oft auch mit einer Reihe von

---

1) Longitudinalschwingungen von Stäben sind zur Bestimmung der oberen Hörgrenze schon benützt von F. Savart, Pogg. Ann. **20.** p. 290. 1830 und von E. Panchon, Phil. Mag. (5) **15.** p. 371. 1883. Über die Möglichkeit der Verwechslung mit Transversaltönen bei Erzeugung der Longitudinalschwingungen von Stäben vgl. R. König, Wied. Ann. **69.** p. 729. 1899.

anderen Tonquellen, Königschen Klangstäben, Meldeschen Stimmplatten, Stimmgabeln, gefunden worden, so daß man wohl berechtigt ist zu der Vermutung, daß dieses die tatsächliche obere Hörgrenze ist, unabhängig von der Intensität, wenn diese nur gewisse Minimalwerte übersteigt. Ebenso ist wohl die Grenze des sichtbaren Spektrums von einer gewissen Lichtintensität unabhängig von dieser; genauere Versuche darüber sind mir allerdings nicht bekannt.

Für die freundliche Anregung zur nochmaligen genauen Prüfung der Töne der Galtonpfeife, sowie für die Beschaffung von zwei Exemplaren dieser Pfeife bin ich Hrn. Geheimrat C. Stumpf zu großem Dank verpflichtet.

Marburg i. H., Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 27. November 1907.)

## 2. *Über die innere Reibung und Dichte der Bunsenflamme; von A. Becker.*

Im Anschlusse an Messungen der Diffusion leuchtender Metalldämpfe in Flammen[1]) hat vor einigen Jahren Hr. Jessel auf Veranlassung von Hrn. Lenard versucht, die innere Reibung der Bunsenflamme zu ermitteln. Da seine hierauf bezüglichen Beobachtungen zu keinem einwandfreien Ergebnis führten, habe ich, zunächst gemeinsam mit Hrn. Dr. F. Conrat[2]), den Gegenstand auf Anregung des Hrn. Lenard erneut aufgenommen. Neben dem erhöhten Interesse, welches in neuerer Zeit die nähere Untersuchung des allgemeinen physikalischen Verhaltens der Lichtquellen für unsere Kenntnis von den Vorgängen der Lichtemission gewinnt, verheißt das spezielle Studium der inneren Reibung in Flammen einen Einblick in die daselbst vorhandenen Molekularbewegungen und Kräfte und gestattet einen Vergleich mit denjenigen Bewegungen und Kräften, welche, modifiziert durch die gleichzeitig sich abspielenden Vorgänge der Dissoziation und Molekularaggregation, nach der bis jetzt bewährten Vorstellung von Sutherland[3]) sonst in unveränderlichen Gasen zu bestehen scheinen.

Die Ermittelung der inneren Reibung und der Dichte der Bunsenflamme stützt sich auf Beobachtungen des Auftriebes, welchen kleine Kugeln fester Körper im Innern der Flamme erleiden. Für die Abhängigkeit dieses Auftriebes einerseits von der Dimension der festen Körper und der Geschwindigkeit

1) Vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 17. p. 198. 1905.

2) Der Mitarbeit des Hrn. Dr. Conrat verdanke ich einen Teil der unter 1. bis 7. im folgenden mitgeteilten Ergebnisse und einige relative Beobachtungen, welche den angenähert linearen Zusammenhang zwischen Kugelradius und Auftrieb im inneren Flammenmantel andeuten.

3) W. Sutherland, Phil. Mag. (5) 36. p. 507. 1893.

der strömenden Gase, andererseits von der inneren Reibung und der Dichte der letzteren, hat die ältere Erfahrung die Gültigkeit des Newtonschen[1]) oder des Stokesschen[2]) Gesetzes wahrscheinlich gemacht. Besondere neue, der gegenwärtigen Anordnung angepaßte Beobachtungen in bekannten strömenden Gasen haben indes merkliche Abweichungen des Auftriebes von den genannten Gesetzen ergeben und gezeigt, daß der Auftrieb fester Kugeln in beliebigen strömenden Gasen sich innerhalb des untersuchten Geschwindigkeitsbereiches von etwa 40 und 150 cm/sec darstellen läßt durch die Summe

$$W = k\eta r . v + \tfrac{4}{3}\pi\gamma\delta r^3 v^2,$$

deren erster Summand die Form des Stokesschen und deren zweiter Summand die Form des Newtonschen Ausdruckes für den Gaswiderstand besitzt.

Das Ergebnis der Anwendung der neu gefundenen Gesetzmäßigkeit auf die Messungen in der Bunsenflamme läßt eine ähnliche Abhängigkeit der inneren Reibung von dem Ort in der Flamme erkennen, wie sie schon von Bunsen[3]) für die thermische und chemische Wirkung und von Hrn. Lenard[4]) für die Lichtemission beobachtet wurde, und gestattet, daran zusammenfassende Betrachtungen über die Vorgänge in der Flamme zu knüpfen. Wohl vereinbar damit ist der für die Dichte sich ergebende Wert, zu dem mit guter Übereinstimmung auch der nach Gouys[5]) Methode beobachtete Verlauf der Strömungslinien führt.

### Versuchsanordnung.

1. Zur Auftriebsmessung habe ich mich einer in nachstehender Fig. 1 dargestellten Torsionswage aus 81 cm langem, 0,24 mm dickem horizontal gespanntem Messingdraht bedient, den ein leichtes, in seiner Mitte befestigtes Kapillarröhrchen zur Drehachse hat. Die benutzten Auftriebskörper, meist kleine Kugeln aus Flintglas, wurden durch beliebig tiefes Ein-

1) J. Newton, Philos. nat. princ. math. 2. Sect. 2 u. 7. 1710.
2) G. G. Stokes, Cambr. Philos. Trans. 9. p. 8. 1850.
3) R. Bunsen, Flammenreaktionen, Heidelberg 1880.
4) P. Lenard, Ann. d. Phys. 17. p. 197. 1905.
5) M. Gouy, Ann. de chim. et phys. (5) 18. p. 1. 1879.

schieben eines in sie eingeschmolzenen Platindrahtes in die Kapillare am Dreharm befestigt und zur Vermeidung starker und bei verschiedenen Perlen stark ungleicher Torsion des Horizontaldrahtes durch ein Gegengewicht an der Verlängerung des Hebelarmes nahezu äquilibriert. Zur Abschirmung störender Luftbewegung, wie sie einerseits durch die Strömung der Flammengase, andererseits durch die Erwärmung in der Umgebung der Flamme verursacht werden konnte, dienten zum

Fig. 1.

kleinen Teil der Glaskasten *A*, zum wesentlicheren Teil mehrere das ganze Meßinstrument einschließende Metall- und Metallpapierschirme, die den die Perle *P* tragenden Dreharm nur einige Zentimeter lang durch einen schmalen Spalt hervortreten ließen. Genügende Dämpfung der Torsionsbewegung ließ ein in der Drahtmitte vertikal nach unten angebrachtes Stäbchen mit Glimmerscheibe erreichen, die in eine geeignet gewählte Mischung *D* aus Glyzerin und Wasser tauchte.

2. Zur Ermittelung des Auftriebes wurde die Perle jeweils durch Drehung des Torsionskopfes *T* so weit gehoben, bis die Ansatzstelle des Platindrahtes eine feste Nullmarke in einem auf die Perle gerichteten Beobachtungsmikroskop mit Mikrometerteilung erreichte. Dann wurde die zu untersuchende Flamme, wie es die Fig. 2 zeigt, genähert und nach Einführung der Perle in die Flamme und Herstellung des Temperaturgleichgewichtes diejenige Winkellage des Torsionskopfes, zum großen Teil durch Nachdrehen, zum kleineren Teil durch Interpolation aus der Mikroskopablesung, ermittelt, welche die Drahtansatzstelle in ihre alte Lage zurückführte. Eine wiederholte Einstellung der Nullage nach Entfernen der Flamme

gewährte Unabhängigkeit des Messungsergebnisses von etwaiger schwacher Durchbiegung des Platindrahtes in der Glühhitze oder Formänderung der in manchen Fällen in der Flamme schmelzenden Perle.

Fig. 2.

Die so gewonnenen Auftriebswerte enthalten noch den Einfluß des die Perlen tragenden Platindrahtes. Sein nicht unbeträchtlicher Anteil am beobachteten Auftrieb war durch Parallelversuche mit Drähten ohne Perle zu eliminieren. Erforderlich war hierbei, daß die Eintauchtiefe der einzelnen Drähte in der Flamme mit derjenigen in den ersten Versuchen genau identisch war und daß die Flamme während der Dauer beider zusammengehöriger Versuche genügende Konstanz bewahrte. Die erste Bedingung ließ sich durch die Einstellung der Drahtenden auf festgesetzte Marken im Beobachtungsmikroskop erfüllen [1]), und die Konstanz der Flammenströmung war nach Herstellung eines konstanten Temperaturgefälles im Brennerrohr befriedigend durch Einschaltung eines Druckregulators mit gleichzeitiger Benutzung eines empfindlichen Manometers mit geneigter Wassersäule in der Gaszuleitung aufrecht zu erhalten. Von trotzdem etwa auftretenden Schwankungen sollte das Resultat durch geeignete Kombination der verschiedenen Versuche und Häufung der Zahl der Einzelmessungen befreit werden.

8. Zur Untersuchung gelangten drei verschiedene Leuchtgas–Luftflammen, die mir durch den betreffenden Rohrdurch-

1) Daneben wurde der Einfluß verschieden großer Eintauchtiefen festgestellt und zu Interpolationszwecken benutzt.

messer und die Höhe des blauen Konus fürs erste genügend charakterisiert scheinen: zwei gewöhnliche Bunsenflammen, über einem 1,4 cm weiten Eisenrohr brennend, von 4—5 bzw. 6—7 cm Konushöhe und eine Bunsenflamme mit getrennt meßbarer und dabei variierbarer Gas- und Luftzufuhr, über einem 1,5 cm weiten Messingrohr brennend, von 6 cm Konushöhe.

Die Reproduzierbarkeit dieser Flammen war durch die Benutzung des genannten Druckregulators und Manometers gesichert, und mit Hilfe einer die Brenner tragenden Gleitvorrichtung aus Spiegelglasplatten wurde die beliebig häufige Einführung der Perlen an fest gewählte Flammenorte ermöglicht.

4. Der Vergleich der mit verschiedenen Auftriebskörpern erhaltenen Resultate untereinander und die Auswertung derselben für die Gewinnung der gesuchten Konstanten erforderte Zurückführung der direkten Beobachtungswerte auf gleiche Empfindlichkeit der Drehwage und Festlegung derselben in absolutem Maß. Da die Drehwage bei etwas ungleicher Belastung durch die Perlen kleine Empfindlichkeitsunterschiede aufwies, habe ich sie für jeden Versuch mit Hilfe eines kleinen Reitergewichtes neu geeicht. Im Durchschnitt ergab eine am Ort der Perle wirkende Kraft von 0,2 Dynen ein Drehmoment, das durch Drehung des Torsionskopfes um 1° kompensiert werden konnte; eine Kraft von 0,1 Dynen war sonach bei konstanter Flammenströmung noch mit guter Sicherheit meßbar.

### Messungen in der Bunsenflamme.

5. Die Gewinnung des die Widerstandswerte in der Flamme beherrschenden Gesetzes war in erster Annäherung von der Benutzung von Glaskugeln verschiedener Durchmesser zu erwarten. Dieselben wurden aus schwer schmelzbarem Glas in der Gebläseflamme am Ende je eines Platindrahtes von geeigneter Dicke gebildet und, am Dreharm der Torsionswage befestigt, mit ihrem Zentrum tunlichst genau an ein und dieselbe Stelle der Flamme nacheinander gebracht, während für konstante Strömungsgeschwindigkeit der Flamme durch Konstanthaltung des Gasdruckes gesorgt wurde.

Die ersten in dieser Weise angestellten Messungen führten indes zu wenig befriedigenden, in manchen Fällen sogar wider-

sprechenden Resultaten, indem der Auftrieb ein und derselben Perle nicht nur zu verschiedenen Zeiten in der bei konstant gehaltenem Gasdruck brennenden Flamme stark variierte, sondern auch in kleineren und damit langsameren Flammen größere Werte annehmen konnte als in der größeren Flamme. Zu einem Verständnis dieser Unregelmäßigkeiten führte die Beobachtung, daß die Höhe des blauen Konus in der ersten Zeit nach Anzünden der Flamme mit wachsender Brenndauer trotz konstantem Gasdruck zunahm, und daß der Auftrieb der Perlen regelmäßig um so kleiner wurde, je mehr deren Abstand von der Konusspitze sich verringerte. Es war damit eine sehr merkliche Variation der Widerstandsgröße mit dem Flammenort angedeutet, die zunächst durch besondere Versuche sichergestellt wurde.

### A. Variation des Auftriebes in der Flammenachse mit der Höhe.

6. Benutzt sind Glaskugeln mit 0,11, 0,20 und 0,29 cm Radius. Gemessen wurde der Auftrieb derselben in der Achse

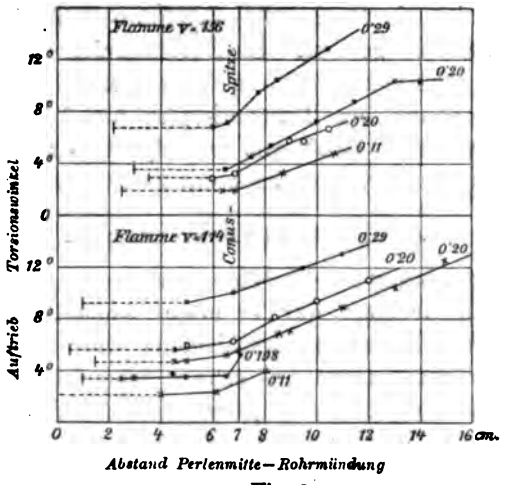



Fig. 3.

der Flamme für verschiedene Abstände ihrer Mitten von der Brenneröffnung und der Konusspitze. Das Ergebnis ist für die beiden Flammen von 4—5 bzw. 6—7 cm Konushöhe in der Fig. 3 graphisch verzeichnet derart, daß der Ort der Konus-

spitze für alle Fälle auf die Abszisse 7 fällt, während die Lage der Brenneröffnung durch kurze vertikale Striche markiert ist.

Es zeigt sich, daß die Größe des Auftriebes nicht so sehr von dem Abstand von der Brenneröffnung als von dem Abstand der Perle von der Konusspitze abhängt. Im ganzen Innern des Konus besitzt der Auftrieb nahezu denselben Wert, steigt mit Annäherung der Perle an die Konusspitze langsam und mit Eintritt in die eigentliche Flamme stark an und nimmt hier um so größere Beträge an, je mehr sich der Perlenort von der Konusspitze entfernt. Der höchste Wert findet sich etwa in der äußersten Flammenspitze[1]), um darüber hinaus, in der dort vorhandenen gänzlich unkontrollierbaren Gasbewegung, allmählich in unregelmäßiger Weise abzunehmen. Einige Anhaltspunkte für den letzteren Verlauf geben besondere Versuche, die mit sehr niedrigen Flammen von etwa 1 cm Konus- und 6 cm Gesamthöhe, in denen die mit der Höhe der Perlen wachsenden Schwankungen der Ablesungen nur erst geringfügige waren, angestellt wurden. Die Steigerung des Auftriebes mit der Erhebung im inneren Flammenmantel[2]) erfolgt um so schneller, je rascher die Annäherung an die Flammenspitze erfolgt, in der kleineren Flamme also schneller als in der großen, und es ist infolgedessen die gegenseitige Zuordnung zweier Flammenpunkte verschiedener Flammen von gleichem Abstand von der Konusspitze ebensowenig statthaft wie die Zuordnung von Punkten mit gleichem Abstand von der Brenneröffnung. Dagegen scheint innerhalb derselben Flamme jeder Punkt in seinem physikalischen Verhalten eindeutig definiert durch seine relative Lage zur Konus- und Flammenspitze.

### B. Verteilung der Auftriebsgröße über den Flammenquerschnitt.

7. Nach Kenntnis der vorgenannten Verhältnisse war die Untersuchung des Perlenauftriebes an verschiedenen Punkten des Flammenquerschnittes von Interesse. Werden die Auf-

1) Deren Abstand von der Brenneröffnung betrug bei den beiden Flammen — gemessen bis zu der ohne Flammenfärbung vorhandenen Grenze der Sichtbarkeit — 15 bzw. 21 cm.

2) Man vergleiche die einzelnen Bezeichnungen der Flammenzonen bei P. Lenard, Ann. d. Phys. 17. p. 215. 1905.

triebe an je zwei zur Flammenachse symmetrisch liegenden Punkten mit $\alpha$, $\beta$ und $a$, $b$ bezeichnet, so ist der Auftriebsunterschied zwischen $a$ und $\alpha$ oder $b$ und $\beta$ unter Herausfallen des Drahteinflusses durch $b - \beta - (\alpha - a)/2$ gegeben. Die beistehende Fig. 4 gibt das Resultat eines Versuches dieser Art, der mit 3,96 mm dicker Perle an der großen Flamme mit 6,4 cm Konushöhe in zwei Querschnitten ausgeführt wurde, die 1,4 cm unter und 1,1 cm über der Konusspitze lagen. Es ergibt sich, wie man sieht, eine sehr befriedigende Annäherung an die vorgenannten Beobachtungen, insofern auch hier eine deutliche Zunahme des Widerstandes mit Annäherung an den äußeren Flammenmantel und danach Abnahme im Flammensaum eintritt.

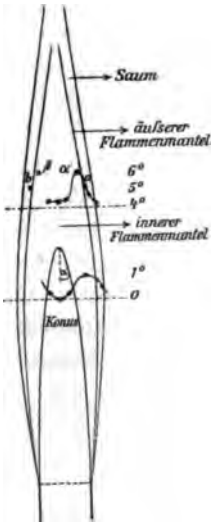


Fig. 4.

### C. Geschwindigkeitsmessungen in der Flamme.

8. Da die Größe des Auftriebes in erster Linie durch die Geschwindigkeit der Gasströmung bestimmt sein wird, lassen sich die mitgeteilten Beobachtungswerte erst nach Kenntnis der Geschwindigkeit zu Aussagen über bestimmte Vorgänge in der Flamme verwerten. Es schien nicht unwichtig, die erforderliche Messung der Strömungsgeschwindigkeit, soweit die Methode dies ermöglichte, auf mehrere verschiedene Orte der Flamme auszudehnen, da fürs erste zu vermuten war, daß die beobachtete Variation des Auftriebes vielleicht zum Teil die unmittelbare Folge einer entsprechenden Variation der Geschwindigkeit sei, wenn das Vorhandensein derart großer Geschwindigkeitsunterschiede, wie sie zur vollständigen Erklärung der gefundenen Tatsachen notwendig wären, auch von vornherein sehr zweifelhaft war.

9. Die Ausführung der Geschwindigkeitsmessung geschah in folgender Weise:

An die beiden Zinken einer Stimmgabel wurde je ein

Kartonblatt oder dünnes Metallblech $S_1$ und $S_2$ (Fig. 5) mit je einem sehr feinen vertikalen Spalt $s_1$ und $s_2$ befestigt. Bei ruhender Gabel koinzidieren die Spalte miteinander; sie werden verdeckt bei gegenseitiger Annäherung oder Entfernung der Zinken. An der Seite der einen Zinke $Z_1$ ist ein enges Messingröhrchen mit seiner Längsrichtung senkrecht zur Zeichenebene und zur Schwingungsrichtung der Gabel angeschraubt. Dasselbe verengt sich vorne zu einer sehr feinen Öffnung, die in der durch die beiden Spalte zu legenden Ebene liegt und deshalb bei ruhender Gabel durch die Spalte hindurch sichtbar ist. Wird das Röhrchen mit Naphthalin gefüllt und mit seiner engen Öffnung in die Flamme gebracht, so bildet sich infolge der Verbrennung des Naphthalins ein heller Lichtstreifen in der Flamme aus, der bei gleichzeitiger Schwingung der Stimmgabel die Form einer Welle annimmt, deren Länge mit Hilfe der durch die Spaltvorrichtung erreichten Momentbeobachtung meßbar wird. Die Flammengeschwindigkeit ergibt sich dann aus $v = N\lambda$, wo $\lambda$ die gemessene Wellenlänge und $N$ die Schwingungszahl des schwingenden Systems ist.

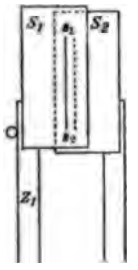


Fig. 5.

10. Die Resultate der auf die drei genannten Flammengrößen ausgedehnten Messung sind die folgenden:

a) *Kleine Bunsenflamme, Konushöhe 5 cm:* Die Öffnung des Naphthalinröhrchens befand sich 0,5 cm über der Konusspitze. Mit Hilfe einer Stimmgabel, deren Schwingungszahl bei der durch die Versuchsanordnung bedingten Belastung sich, auf der rotierenden Trommel gemessen, zu 120,8 ergab, wurden die Wellenlängen

$$\lambda = 9{,}5 \quad 10{,}0 \quad 9{,}2 \quad 9{,}4 \quad 9{,}5 \qquad \text{Mittel } 9{,}5 \text{ mm}$$

gefunden. Die Flammengeschwindigkeit ist hiernach $v =$ 114,76 cm/sec. Der Versuch, ähnliche Messungen 3 cm über der Konusspitze anzustellen, führte zu keinen Wellenlängen, welche sich von den zuvor gefundenen merklich verschieden erwiesen hätten, so daß die Existenz wesentlich verschiedener Geschwindigkeitsgebiete in der Flamme jedenfalls wenig Wahrscheinlichkeit besitzt.

Eine zweite Stimmgabel mit 255,8 Schwingungen führte, 2 cm über der Konusspitze, zu den Wellenlängen

$$8\lambda = 13{,}0 \quad 14{,}0 \quad 12{,}5 \quad 12{,}5 \quad \text{Mittel } \lambda = 4{,}8 \text{ mm}$$

und ergab in guter Annäherung an den vorhergehenden Wert die Strömungsgeschwindigkeit $v = 110{,}0$ cm/sec.

Den folgenden Erwägungen sei der Mittelwert der beiden Einzelresultate $v = 112{,}38$ cm/sec zugrunde gelegt.

b) *Große Bunsenflamme, Konushöhe 6,5 cm:* Die Stimmgabel $N = 120{,}8$ lieferte im inneren Flammenmantel 4 cm über der Konusspitze die Wellenlängen

$$\lambda = 13{,}5 \quad 12{,}5 \quad 13{,}0 \quad 12{,}2 \quad \text{Mittel } 12{,}8 \text{ mm},$$

woraus für $v = 154{,}6$ cm/sec folgt. Es ist dieser Wert in Übereinstimmung mit $v = 158{,}7$ cm/sec, wie er an der gleichen Stelle mit der Gabel $N = 255{,}8$ sich fand, so daß die Flammengeschwindigkeit durch den Mittelwert $v = 156{,}6$ cm/sec genügend bestimmt erscheint.

Im Abstand von 1 cm über dem Konus ergab die erste der beiden Gabeln

$$\lambda = 12{,}0 \quad 12{,}0 \quad 12{,}1 \quad 11{,}7 \quad \text{Mittel } 12{,}2 \text{ mm},$$

und es scheint der kleinere Wert $v = 144{,}9$ cm/sec anzudeuten, daß die Flammengeschwindigkeit mit Annäherung an die Flammenspitze um einen kleinen Betrag zunimmt, der infolge der Schwankungen der Einzelbeobachtungen bei der kleineren Flamme nicht unzweifelhaft festzustellen war. Ebensowenig ließ sich eine deutliche Verschiedenheit der Geschwindigkeit nachweisen, wenn die Öffnung des Naphthalinröhrchens seitlich in der Flamme bis zum äußeren Flammenmantel verschoben wurde.

c) *Bunsenflamme mit meßbarer Luftzufuhr, Konushöhe 6 cm:* Im inneren Flammenmantel ließ die Gabel $N = 120{,}8$ für die Flammengeschwindigkeit $v = 136{,}5$ cm/sec finden.

11. *Geschwindigkeit der Mischgase im Konus.* Es war nicht ohne Interesse, mit den für das Flammeninnere gefundenen Geschwindigkeitswerten diejenigen im dunkeln Konus der Flammen zu vergleichen und diese gleichzeitig zusammen mit entsprechenden Auftriebsbeobachtungen zu Berechnungen der inneren Reibung und Dichte der einströmenden Mischgase zu verwerten.

Die Geschwindigkeitsmessung stützt sich auf die Kenntnis der normalen Entzündungsgeschwindigkeit der benutzten Mischgase, wie sie direkten Beobachtungen an der unter c) genannten Bunsenflamme mit meßbarer Gas- und Luftzufuhr zu entnehmen war. Bezeichnet $F$ den Inhalt der inneren Brennfläche des Konus und $V$ das Volumen des unter den dort bestehenden Verhältnissen des Druckes und der Temperatur in der Zeiteinheit diese Fläche durchströmenden Mischgases, so ist die normale Entzündungsgeschwindigkeit nach Gouy[1])

$$u = \frac{V}{F} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Zur Bestimmung der Fläche $F$ habe ich die Bunsenflamme photographiert und den Umriß der inneren Brennfläche, der sich, wie aus Fig. 2 ersichtlich, scharf abhebt, nach geeigneter Vergrößerung des Negativs auf Millimeterpapier übertragen. Aus der Abmessung der erhaltenen Fläche läßt sich die gesuchte Verbrennungsfläche mit guter Genauigkeit als Rotationsfläche nach der Simpsonschen Regel berechnen.

Die Volumangabe des die Verbrennungsfläche durchströmenden Gases setzt außer der Messung der mit Zimmertemperatur bei Atmosphärendruck zuströmenden Gasmenge die Kenntnis der Gastemperatur im Innenraum des dunkeln Konus voraus. Ich habe deshalb mit Hilfe zweier Thermoelemente aus Konstantan–Eisendraht Temperaturmessungen im Konusraum in der Weise ausgeführt, daß ich die Drahtzuführung durch das Brennerrohr hindurchlegte, um eine Berührung eines Drahtteiles mit den heißen Flammenteilen zu vermeiden. Im Abstand von 3 cm von der Brenneröffnung, dem für die späteren Auftriebsversuche gewählten Ort, ließ sich bei der festgewählten Gasströmung eine Gastemperatur[2]) von etwa 50° feststellen. Dieselbe variierte mit der Höhe der Lötstelle im Konus nur unwesentlich und war durch geeignete Abschirmung der Lötstelle unabhängig gewonnen von störender Beeinflussung derselben durch direkte Wärmestrahlung.

---

1) M. Gouy, Ann. de chim. et phys. (5) 18. p. 1. 1879.

2) Vgl. die auf ganz anderem Wege — durch Dichtemessung — gewonnene nahe Bestätigung dieses Wertes in 28.

Die durch die vorbeschriebenen Messungen an der genannten Bunsenflamme bei 6 cm Konushöhe gefundene normale Entzündungsgeschwindigkeit betrug $u = 14{,}53$ cm/sec. Der Prozentgehalt des Leuchtgases im Volumen des Gemisches war nach dem zuströmenden Gas- und Luftvolumen 27,1 Proz.

Gegenüber älteren Resultaten dieser Art von Hrn. Michelson[1]) und Hrn. Mache[2]) erscheint der gefundene $u$-Wert um einige Prozent zu hoch, eine Abweichung, die im Hinblick auf die Schwankungen der Resultate der beiden Beobachter wohl belanglos ist und die sich im übrigen befriedigend erklärt durch die im folgenden als zutreffend sich erweisende Annahme[3]), daß das von mir benutzte Leuchtgas einen besonders hohen Wasserstoffgehalt besitze.

Unter der Annahme einer im Abstand von einigen Zentimetern über der Brenneröffnung nahe gleichmäßigen Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit über den Querschnitt findet sich die letztere aus dem Zusammenhang

$$v = \frac{u}{\sin \alpha},$$

wo $\alpha$ den Neigungswinkel der Brennfläche gegen die Flammenachse an der betrachteten Stelle darstellt. Für unsere Flamme mit 1,5 cm Rohrweite und 6 cm Konushöhe fand sich auf diese Weise $v = 116{,}3$ cm/sec.

Um auch die Gasgeschwindigkeit im 5 cm hohen Konus der kleinen Bunsenflamme zu ermitteln, habe ich, da die von der Flamme verbrauchte Luftmenge hier nicht direkt meßbar war, die prozentische Zusammensetzung des Mischgases durch sorgfältige Dichtebestimmungen zu messen gesucht. Es wurde zu diesem Zweck ein Glaskolben von etwa 100 ccm Inhalt, mit Kapillarrohr und Hahn versehen, evakuiert, dann das freie gebogene Ende des Kapillarrohres in Höhe der Brenneröffnung — wo die Gastemperatur diejenige des Beobachtungsraumes nach Angabe des Thermoelementes nur unwesentlich überstieg — in den dunkeln Konus getaucht und durch teil-

1) W. Michelson, Wied. Ann. 37. p. 1. 1889.
2) H. Mache, Wiener Ber. 113. p. 341. 1904.
3) Vgl. Nr. 29.

weises Öffnen des Hahnes der Kolben langsam mit dem Mischgas gefüllt. Der durch Berücksichtigung der im freien Kapillarrohrstück vorhandenen, miteingesaugten Luftmenge und durch kontrollierende Messungen von Fehlern befreite Dichtewert fand sich zu 0,80 — bezogen auf Luft und 20° — und ergab zusammen mit dem für das Leuchtgas getrennt gemessenen Wert der Dichte von 0,326 einen Leuchtgasgehalt im Gasgemisch von 29,7 Proz. Zu demselben Wert führte die Untersuchung des bei ausgelöschter Flamme dem Rohr entströmenden Mischgases.

Die Berücksichtigung der von den Herren Michelson und Mache gefundenen Abhängigkeit der normalen Entzündungsgeschwindigkeit $u$ vom Prozentgehalt an Leuchtgas und des für 27,1 Proz. im vorausgehenden von mir beobachteten $u$-Wertes läßt für 29,7 Proz. Leuchtgas den Wert $u = 12{,}0$ cm/sec als zutreffend erscheinen. Mit seiner Hilfe berechnet sich die Gasgeschwindigkeit im Konus der betrachteten Flamme zu $v = 85{,}7$ cm/sec.

### D. Abhängigkeit des Auftriebes vom Kugelradius.

12. Nachdem durch die im vorstehenden mitgeteilten Messungen angenäherte Konstanz der Geschwindigkeit über weite Gebiete der Flamme — kleinere Geschwindigkeit im dunkeln Konus und größere Geschwindigkeit in den heißen Flammenteilen — nachgewiesen worden ist, ist die im früheren gefundene starke Variation des Gaswiderstandes mit dem Ort in der Flamme zum überwiegenden Teil dem Einfluß besonderer Verhältnisse an den einzelnen Flammenstellen zuzuschreiben. Um diese Verhältnisse für einzelne Punkte näher zu studieren, wurden mit Hilfe der beschriebenen Drehwage in diesen Punkten besonders sorgfältige Auftriebsmessungen gemacht unter möglichster Konstanthaltung des Abstandes des Perlenortes von der Konusspitze; falls trotzdem kleine Variationen dieses Abstandes im Verlauf einer zusammenhängenden Versuchsreihe auftraten, wurden die dabei erhaltenen Auftriebswerte mit einer die Abstandsverschiebung berücksichtigenden, dem Kurvenverlauf der Fig. 3 entnommenen Korrektion versehen.

13. Um der die Widerstandsverhältnisse beschreibenden Gesetzmäßigkeit näher zu kommen, sollte die Abhängigkeit des Gaswiderstandes vom Radius der benutzten Glaskugeln festgestellt werden. Die Zahl der zusammenhängenden Beobachtungsreihen war zur möglichsten Herabminderung des Einflusses unvermeidlicher Schwankungen zu häufen, und es war durch Kontrollbeobachtungen der Einfluß etwaiger Gestaltsänderungen der Kugeln in den heißen Flammenteilen zu beseitigen. Der Radius der Kugeln variierte zwischen 0,10 und 0,40 cm und konnte für jede bestimmte Kugel in aufeinanderfolgenden Versuchen kleine Verschiedenheit zeigen, falls es nötig wurde, infolge Schmelzens oder Springens des Glases auftretende Abweichungen von der Kugelgestalt durch Neuschmelzen über dem Gebläse zu beseitigen.

Gemessen wurde in einem Punkte im Innern des Konus der kleinen Bunsenflamme und der im vorhergehenden unter 10 c) genannten Flamme mit meßbarer Luftzufuhr, außerdem im inneren Flammenmantel in zwei Punkten der kleinen Bunsenflamme und in je einem Punkt der beiden größeren Flammen.

a) *Messungen im Konusraum.* Das für den Auftrieb in Dynen 2 cm unterhalb der Konusspitze als Funktion des Kugelradius gefundene Ergebnis findet sich in Tabb. Ia und Ib aus je drei unabhängigen Versuchsreihen.

Tabelle Ia.

Konushöhe 5 cm, $v = 85{,}7$ cm/sec, Rohrdurchmesser 1,4 cm.

| Kugelradius $r$ | Auftrieb in Dynen | | |
|---|---|---|---|
| | $a$ a) | $b$ c) | $c$ e) |
| 0,147 cm | 0,42 | — | — |
| 0,150 „ | — | 0,50 | 0,46 |
| 0,193 „ | — | — | 0,61 |
| 0,209 „ | 0,74 | 0,77 | 0,68 |
| 0,285 „ | — | — | 1,15 |
| 0,292 „ | 1,14 | 1,10 | — |
| 0,377 „ | 1,61 | 1,82 | 1,71 |

Tabelle Ib.

Konushöhe 6 cm, $v = 116{,}3$ cm/sec, Rohrdurchmesser 1,5 cm.

| Kugelradius $r$ | Auftrieb in Dynen | | |
|---|---|---|---|
| | $a$ ×) | $b$ ○) | $c$ •) |
| 0,154 cm | 0,72<br>(0,65) | — | 0,66<br>(0,62) |
| 0,187 „ | 0,98<br>(0,92) | 1,00 | 1,01<br>(0,98) |
| 0,258 „ | 1,46<br>(1,46) | 1,52 | — |
| 0,295 „ | 1,90<br>(2,00) | 1,95 | 1,82<br>(1,89) |

Den Verlauf der hierdurch festgelegten Gesetzmäßigkeit zeigt die graphische Darstellung der beifolgenden Fig. 6. Die Abhängigkeit des Auftriebes vom Kugelradius ist danach, wie man sieht, weder eine lineare noch eine quadratische.

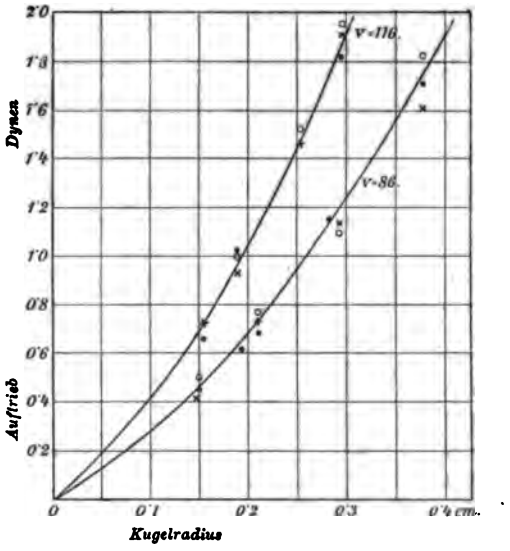



Fig. 6.

Die einigen Zahlen der Tab. Ib beigefügten Angaben in Klammern stellen die Größe desjenigen Auftriebes dar, der nach Auslöschen der Flamme am gleichen Ort im sonst unveränderten Strom der Mischgase erhalten wurde. Bei kleinen

Kugeln ist dieser Auftrieb kleiner, bei großen dagegen etwas größer als bei brennender Flamme.[1])

b) *Messungen im inneren Flammenmantel.* Das Ergebnis der Versuche ist mit einiger Zusammenfassung in den folgenden Tabellen enthalten. Die darin verzeichneten Einzelwerte der Kugelwiderstände sind Mittelwerte aus 3—5 jeweils unmittelbar in der Reihenfolge: ohne Flamme–mit Flamme–ohne Flamme– usw. nacheinander ausgeführten Ablesungen der Torsionswage nach Auswertung in Dynen.[2]) Die in den mit *a, b, c* bezeichneten völlig unabhängigen Versuchsreihen auftretenden Schwankungen zeigen infolge dieser Mittelbildung im allgemeinen geringere Höhe, als wie sie mitunter für die Einzelbeobachtungen zu konstatieren war.

Die in den Abständen 1,5 und 3 cm der Kugelmitten über der Konusspitze der kleinen Bunsenflamme gefundenen Werte sind in Tab. II enthalten.

Tabelle II.

Konushöhe 5 cm, Flammengeschwindigkeit $v = 112{,}38$ cm/sec.

| Kugelradius $r$ | Auftrieb 1,5 cm über Konusspitze | | | Auftrieb 3 cm über Konusspitze | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ ×) | $b$ ×) | $c$ ×) | $a$ •) | $b$ •) | $c$ •) |
| cm | Dynen | Dynen | Dynen | Dynen | Dynen | Dynen |
| 0,118 | 1,00 | 0,97 | — | | | |
| 0,128 $Q$[3]) | 1,05 | — | — | | | |
| 0,145 | — | 1,26 | 1,16 | | | |
| 0,15 | 1,20 | — | — | 1,88 | 1,84 | — |
| 0,192 | 1,53 | 1,58 | — | 1,70 | — | 1,80 |
| 0,220 | — | 1,92 | 1,82 | — | 2,00 | 1,94 |
| 0,293 | 2,40 | 2,46 | 2,43 | 2,76 | 2,60 | 2,72 |
| 0,31 $Q$ | 2,68 | 2,70 | — | — | — | — |
| 0,342 | 2,74 | — | — | 3,12 | 3,24 | 3,08 |
| 0,387 | 3,24 | — | 3,20 | | | |

In den beiden größeren Bunsenflammen sind Beobachtungen nur in 2 cm Abstand der Kugelmitten von der Konusspitze ausgeführt worden, deren Ergebnis die folgende Tabelle enthält.

1) Vgl. die Erklärung in Nr. 30.

2) Und nach Abzug des in analogen Versuchsreihen ermittelten Einflusses des die Kugeln tragenden Drahtes.

3) Quarzkugel an dünnem Quarzstäbchen. Vgl. hierzu 32.

Tabelle III.

| Kugelradius | Flamme $v = 150{,}7$ | | Flamme $v = 136{,}5$ | |
|---|---|---|---|---|
| $r$ | $a$ ×) | $b$ ×) | $a$ •) | $b$ •) |
| cm | Dynen | Dynen | Dynen | Dynen |
| 0,145 | 1,50 | 1,60 | 1,40 | 1,56 |
| 0,187 | — | — | 1,83 | 1,90 |
| 0,196 | 2,20 | 2,08 | — | — |
| 0,220 | — | 2,27 | 2,10 | 2,24 |
| 0,293 | 3,24 | 3,10 | 2,88 | — |
| 0,342 | 3,64 | — | 3,30 | 3,52 |
| 0,377 | 4,12 | — | — | — |

Von der Art des in den Tabellen enthaltenen Zusammenhanges gibt die graphische Darstellung in Fig. 7 ein anschauliches Bild. Der Inhalt der Tab. II findet sich in den Kurven 1 und 3, derjenige der Tab. III — in halbem Maßstab — in den Kurven 5 und 6 dargestellt. Wie man erkennt, besteht innerhalb der Grenzen der Genauigkeit der Beobachtung sehr angenähert Proportionalität zwischen Auftrieb und Kugelradius im ganzen untersuchten Gebiet des inneren Flammenmantels im Gegensatz zu dem Ergebnis der Versuche im inneren Konusraum, die keine Andeutung eines linearen Zusammenhanges zeigen.

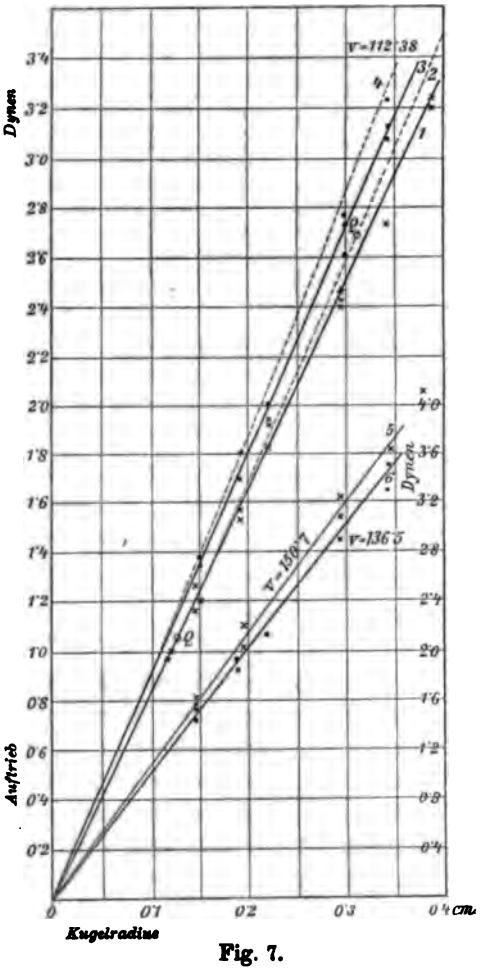


Fig. 7.

14. Da kaum anzunehmen war, daß in den beiden Fällen mit ganz

ähnlicher Geschwindigkeit vor sich gehender Strömung, einerseits der kalten Mischgase im dunkeln Konus, andererseits der verbrennenden Flammengase im inneren Flammenmantel, zwei wesentlich verschiedene Gesetze den Widerstand beschreiben werden, war zu vermuten, daß der Widerstand offenbar von solchen Konstanten der strömenden Gase abhänge, die in beiden Fällen einen wesentlich verschiedenen Wert besitzen und den Widerstand infolgedessen verschieden stark beeinflussen. Die ausschließliche Abhängigkeit des Widerstandes von der Dichte der Gase, wie sie durch Newtons[1]) Formel zum Ausdruck gebracht wird, war zu leugnen, da hierdurch weder der merklich höhere Wert des Auftriebes im inneren Flammenmantel noch sein genähert linearer Zusammenhang mit dem Radius verständlich gewesen wäre. Ebensowenig war eine ausschließliche Abhängigkeit des Widerstandes von der inneren Reibung der Gase, wie sie in Stokes' Gesetz[2]) zum Ausdruck kommt, mit den Beobachtungen in den Mischgasen vereinbar, wenn auch die Messungen im inneren Flammenmantel diese Vorstellung nahelegen konnten.

15. Nähere Anhaltspunkte mußten Beobachtungen in bekannten strömenden Gasen mit möglichst verschiedenen Konstanten erbringen. Ich habe solche Beobachtungen ausgeführt, indem ich die Brennerröhre durch ein Glasrohr mit nahe gleichen Dimensionen ersetzte, durch welches ich bekannte, teils in Gasometern, teils in käuflichen Bomben enthaltene Gase vertikal aufwärts ausströmen ließ, um in der beschriebenen Weise die Auftriebe zu messen, welche die vorbenutzten Glasperlen in der Achse des Gasstromes erfuhren.

### Messungen in bekannten strömenden Gasen.

16. Zur Untersuchung kamen die Gase Wasserstoff, Sauerstoff, Luft und Kohlensäure, die durch Überleiten über Chlorcalcium vor dem Eintritt in die Ausströmungsröhre getrocknet wurden. Die ausgeführten Messungen suchten die Abhängigkeit des Auftriebes der Glaskugeln im Gasstrom von dessen Geschwindigkeit und dem Kugelradius festzustellen. Für das

1) J. Newton, Pilos. nat. math. 2. Sect. 2 u. 7. 1710.
2) G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. 9. p. 8. 1850.

Ergebnis war die fast verschwindende Größe des Drahtauftriebes, die zur Gewinnung des reinen Kugelauftriebes in Abzug zu bringen ist, von Vorteil. Um die Konstanz der Gasgeschwindigkeit kontrollieren und jede beliebige Geschwindigkeit leicht reproduzieren zu können, war vor das Ausströmungsrohr eine geneigte Wassersäule zur Druckmessung geschaltet.

17. Die Geschwindigkeit der ausströmenden Gase suchte ich in ähnlicher Weise zu ermitteln, wie dies früher für die Bunsenflamme geschah, indem ich das strömende Gas mit Ammoniak anreicherte und aus dem engen Messingröhrchen der schwingenden Stimmgabel Salzsäuredampf austreten ließ, um die Länge der Salmiakwellen zu messen, welche bei günstiger Beleuchtung des Strahles sichtbar werden. Um aber bei der nicht geringen Schwierigkeit dieser Beobachtungsweise die Zahl der einzelnen Geschwindigkeitsmessungen nicht zu sehr häufen zu müssen, wurden die Angaben des vorgeschalteten Wassermanometers mit berücksichtigt. Es ließ sich dann die Ausströmungsgeschwindigkeit mit befriedigender Genauigkeit durch graphische Interpolation aus den Werten des Gasdruckes gewinnen, wenn nur für jeweils etwa drei verschiedene Drucke die Gasgeschwindigkeit mit der Stimmgabel festgelegt war.

Als Widerstandskörper sind die früher schon benutzten Glaskugeln an Platindraht von den Dimensionen $r = 0{,}377$, 0,292, 0,209 und 0,15 cm zur Verwendung gekommen; der Abstand ihrer in der Achse des Gasstromes befindlichen Mittelpunkte von der Rohröffnung betrug durchschnittlich etwa 1,8 cm. In einigen Fällen habe ich auch den Widerstand einer horizontal in das Gas gehaltenen Platinscheibe von ca. 0,34 $cm^2$ Fläche bestimmt.

18. Die ersten Messungen genannter Art galten der Auffindung der die Widerstandsverhältnisse regelnden Gesetzmäßigkeiten. Es wurde hierzu die Abhängigkeit des mit der Drehwage zu messenden Auftriebes vom Kugelradius für mehrere verschiedene Gase von festgewählter Geschwindigkeit gesucht. Das für Wasserstoff, Luft und Kohlensäure bei den Geschwindigkeiten 80 und 140, 70, 80 cm/sec erhaltene Ergebnis ist aus der beifolgenden Fig. 8 ersichtlich.

Man erkennt, daß die Verhältnisse, wie sie früher für die

Mischgase im dunklen Konus und die heißen Flammengase im inneren Flammenmantel beobachtet worden sind, sich hier wiederfinden. Der Zusammenhang zwischen Auftrieb und

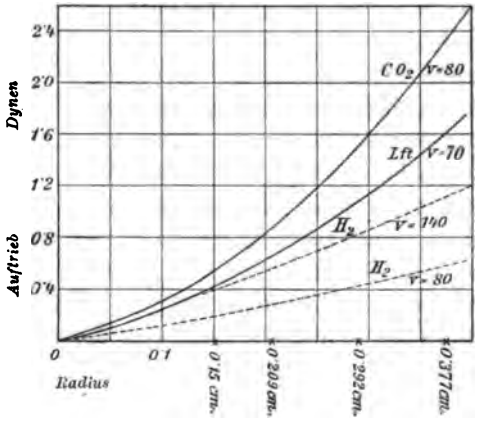



Fig. 8.

Kugelradius ist bei Wasserstoff beider Geschwindigkeiten sehr angenähert ein linearer, während bei Luft und Kohlensäure eine Annäherung an die quadratische Abhängigkeit, die indes lange nicht erreicht wird, besteht.

Wenn wir von der naheliegenden Annahme der Gültigkeit eines einheitlichen Gesetzes ausgehen, so findet sich für den gezeichneten Kurvenverlauf eine Erklärung darin, daß wir den Gaswiderstand in erster Linie dem Einfluß der inneren Reibung zuschreiben, der Proportionalität mit dem Radius ergibt, und daß wir die Abweichungen von der Geradlinigkeit auf den Einfluß der Dichte des Gases zurückführen, der sich um so deutlicher geltend machen wird, je größer der Wert der Dichte ist.

Die Beobachtungen stimmen mit diesen Vorstellungen völlig überein. Der Auftrieb im Wasserstoffstrom bleibt hinter demjenigen in Luft und Kohlensäure infolge der geringen inneren Reibung des Wasserstoffs zurück. Die Dichte des letzteren läßt infolge ihrer Kleinheit eine deutliche Abweichung von der Geradlinigkeit nicht zu, während die stärkste Kurvenkrümmung bei Kohlensäure dem größten Wert ihrer Dichte entspricht.

In mathematischer Fassung wird sich demnach der Gaswiderstand darstellen durch

$$W = k\eta r v + b\delta r^2 v^2,$$

worin $r$ und $v$ Kugelradius und Gasgeschwindigkeit, $\eta$ und $\delta$ die Konstante der inneren Reibung und Dichte, $k$ und $b$ gewisse Konstante sind, deren Wert sich dem Ergebnis der Beobachtung entnehmen läßt.

Zur näheren Prüfung dieser Gesetzmäßigkeit und zur zahlenmäßigen Ermittelung der in ihr sich findenden Konstanten habe ich mehrere ausgedehnte Beobachtungsreihen ausgeführt, deren in Fig. 8 zum Teil verwertetes Ergebnis mit einiger Zusammenfassung im folgenden für jedes Gas getrennt mitgeteilt sei.

### a) Wasserstoff.

19. Derselbe war einer käuflichen Bombe entnommen. Seine durch Wägung zu $\delta = 0{,}000098$ gefundene Dichte, bezogen auf Wasser und 20° C., deutet auf eine Verunreinigung hin, die sich, wenn wir Sauerstoff vermuten, zu 1,5 Proz. berechnet. Nach den Untersuchungen des Hrn. Kleint[1]) ist für diese Gasmischung der Reibungskoeffizient

$$\eta_{20^\circ} = 0{,}0000980 \ [\mathrm{g\,cm^{-1}\,sec^{-1}}]$$

anzunehmen.

Die Tab. IV enthält die Abhängigkeit des für die vier Kugelgrößen gefundenen Auftriebes von der Gasgeschwindigkeit $v$ und dem in geneigter Wassersäule ausgedrückten Druck $p$.

Tabelle IV.

| Kugelradius | Gas- | | Auftrieb |
|---|---|---|---|
| | Geschwindigkeit | Druck | |
| 0,150 cm | 92,5 $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$ | 1,6 cm | 0,25 Dynen |
| | 109,1 | 2,1 | 0,31 |
| | 147,0 | 3,45 | 0,44 |
| | 173,8 | 4,7 | 0,53 |

1) F. Kleint, Diss. Halle 1904.

Tabelle IV (Fortsetzung).

| Kugelradius | Gas- Geschwindigkeit | Druck | Auftrieb |
|---|---|---|---|
| 0,209 cm | 54,3 $\frac{cm}{sec}$ | 1,4 cm | 0,31 Dynen |
| | 114,1 | 2,25 | 0,46 |
| | 129,7 | 2,5 | 0,54 |
| | 168,8 | 4,45 | 0,74 |
| 0,292 | 60,2 | 0,8 | 0,31 |
| | 92,4 | 1,6 | 0,53 |
| | 125,5 | 2,6 | 0,77 |
| | 144,9 | 3,4 | 0,84 |
| | 173,5 | 4,6 | 1,14 |
| 0,377 | 79,0 | 1,3 | 0,56 |
| | 109,0 | 2,0 | 0,89 |
| | 123,2 | 2,6 | 1,01 |
| | 141,3 | 3,1 | 1,13 |
| | 157,2 | 4,1 | 1,35 |
| | 170,7 | 4,6 | 1,53 |

Durch Einsetzen dieser Werte in die zu prüfende Widerstandsformel findet sich mit Berücksichtigung der erwähnten Werte für $\delta$ und $\eta$ nach der Methode der kleinsten Quadrate für die Konstante

$$k = 169{,}0 \quad \text{und} \quad b = 0{,}98 .$$

b) Luft.

20. Bei der Beobachtungstemperatur von 20° ist für $\eta_{20°} = 0{,}000183$ [1]) und für $\delta_{20°} = 0{,}0012$ zu setzen.

Tabelle V.

| $r$ | $v$ | $p$ | Auftrieb |
|---|---|---|---|
| 0,209 cm | 32,1 $\frac{cm}{sec}$ | 2,6 cm | 0,23 Dynen |
| | 39,0 | 3,4 | 0,32 |
| | 50,0 | 5,0 | 0,47 |
| | 62,9 | 7,4 | 0,58 |
| | 74,0 | 9,6 | 0,72 |
| | 80,0 | 11,0 | 0,87 |

1) H. Schultze, Ann. d. Phys. 5. p. 140. 1901; F. Kleint; l. c.

Tabelle V (Fortsetzung).

| $r$ | $v$ | $p$ | Auftrieb |
|---|---|---|---|
| 0,292 cm | 27,8 $\frac{cm}{sec}$ | 2,0 cm | 0,27 Dynen |
| | 36,8 | 3,2 | 0,42 |
| | 50,0 | 5,0 | 0,68 |
| | 57,0 | 6,4 | 0,84 |
| | 71,3 | 9,0 | 1,08 |
| | 81,9 | 11,5 | 1,43 |
| 0,377 | 31,2 | 2,4 | 0,47 |
| | 35,4 | 3,0 | 0,56 |
| | 39,8 | 3,8 | 0,72 |
| | 54,3 | 5,9 | 1,07 |
| | 65,7 | 7,9 | 1,43 |
| | 77,2 | 10,2 | 1,92 |

Aus diesen Beobachtungswerten folgt für die Konstanten

$$k = 161{,}4 \quad \text{und} \quad b = 1{,}01 .$$

### c) Sauerstoff.

21. Die zu 0,001327 für 20° C. gefundene Dichte des einer Bombe entnommenen Gases weist auf eine Verunreinigung durch ein leichteres Gas hin. Nimmt man die Gegenwart

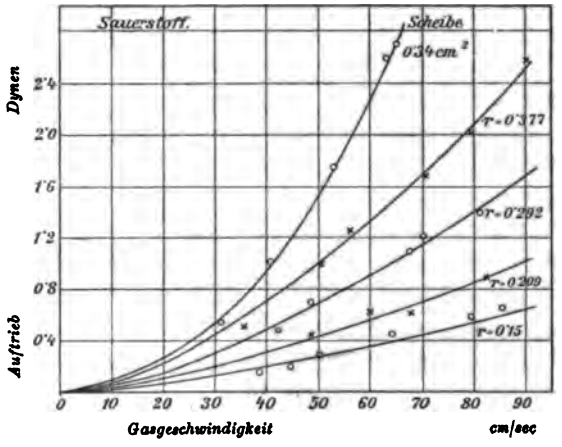



Fig. 9.

von Stickstoff an, so ist nach Hrn. Kleints[1]) Augaben für $\eta_{20^\circ} = 0{,}000202$ zu setzen, entsprechend einer Beimischung von 2 Proz. Stickstoff.

Das Resultat der Widerstandsmessung sei für dieses Gas graphisch verzeichnet (Fig. 9). Es wird hieraus insbesondere die Größe der Genauigkeit des Meßverfahrens ersichtlich, die danach als eine befriedigende bezeichnet werden muß. Der Vergleich der für eine kleine Platinscheibe und die Glaskugeln gefundenen Auftriebe untereinander deutet auf einen besonders starken Zuwachs des Scheibenauftriebes[1]) mit der Gasgeschwindigkeit hin.

Die gesuchten Konstanten ergeben sich zu

$$k = 153{,}0 \quad \text{und} \quad b = 0{,}96\,.$$

### d) Kohlensäure.

22. Es war zu setzen, $\eta_{20^\circ} = 0{,}00015$[2]) und $\delta_{20^\circ} = 0{,}00182$. Die beistehende Fig. 10 gibt die erhaltenen Resultate der Messung wieder. Es berechnet sich aus ihnen

$$k = 151{,}2 \quad \text{und} \quad b = 1{,}024\,.$$

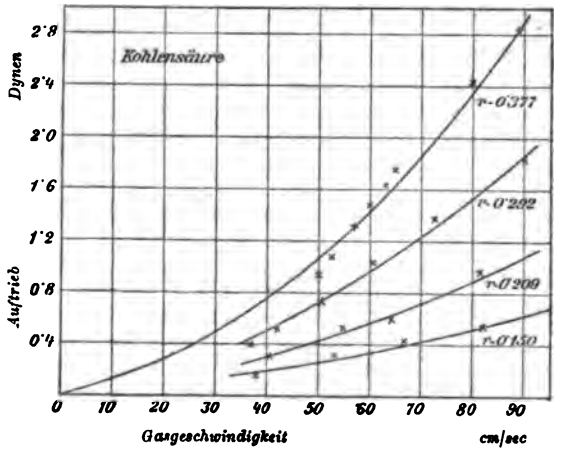



Fig. 10.

1) F. Kleint, l. c.

2) P. Breitenbach, Wied. Ann. 67. p. 803. 1899.

23. Die gesamte an den vier Gasen gewonnene Beobachtung und insbesondere die befriedigende Übereinstimmung der gefundenen Konstantenwerte läßt unzweifelhaft erkennen, daß der Gaswiderstand in den der Untersuchung unterworfenen Fällen zutreffend dargestellt wird durch die genannte Summenformel, daß er demnach bestimmt wird durch die Größe der inneren Reibung und die Dichte des Gases. Je mehr die erstere überwiegt, desto mehr wird die Beziehung zwischen Widerstand und Geschwindigkeit oder Kugelradius eine lineare sein, während andererseits um so mehr ein quadratisches Gesetz Gültigkeit erlangen wird, je mehr die lebendige Kraft der Gasströmung infolge zunehmender Dichte oder Geschwindigkeit anwächst.

In quantitativer Hinsicht erscheint es berechtigt, innerhalb der Geschwindigkeitsgrenzen von etwa 40 und 150 cm/sec für die Konstanten deren Mittelwert

$$k = 158{,}6 \quad \text{und} \quad b = 0{,}993$$

zur Grundlage zu nehmen. Unterhalb der Geschwindigkeit 40 cm/sec scheinen kleine Abweichungen des Widerstandes von dem durch diese Zahlenwerte bestimmten Verlauf zu bestehen, die auf einen kleineren $k$-Wert hindeuten würden. In dem für die Flammenbeobachtungen in Betracht kommenden Geschwindigkeitsbereich aber ist, wie man sieht, der Anteil der inneren Reibung am Gesamtwiderstand offenbar ein sehr viel größerer, als wie er nach dem Stokesschen Gesetz zu erwarten wäre, dessen Zahlenfaktor den Wert $6\pi$ besitzt und demnach nur etwa ein Neuntel des hier gefundenen Faktors $k$ beträgt. Der Einfluß der Dichte dagegen scheint numerisch etwa derselbe zu sein wie in den Fällen, in denen der Gaswiderstand ausschließlich durch die Newtonsche Formel dargestellt wird. Setzt man nämlich $b = \frac{4}{3}\pi\gamma = 0{,}993$, so findet sich für $\gamma$ der Wert 0,237, der sich den von älteren Beobachtern gemachten Angaben[1]) befriedigend anschließt.

24. Wenn wir auch die Gültigkeit der gefundenen Gesetzmäßigkeit zunächst nur für die speziellen Fälle der Untersuchung

1) Newton findet $\gamma = 0{,}375$; Borda (Mém. de l'acad. des sciences 1763) findet $\gamma = 0{,}225$, und Lombard (vgl. Gehlers Wörterb. d. Phys. 10 b. p. 1734. 1842) kommt zu genau demselben Wert.

in Anspruch nehmen, so besteht doch auch hier noch ein Bedenken gegen die direkte Verwendbarkeit der Versuchsergebnisse zu Aussagen über den Auftrieb von Kugeln. Da nämlich alle benutzten Kugeln an mehr oder weniger starkem Platindraht in den Gasstrom gebracht wurden, wäre eine Beeinflussung des Kugelauftriebes durch den Draht infolge Deformation und Störung der Strömungslinien des Gases denkbar gewesen. Durch besondere Versuche, in denen den in den Gasstrom eingeführten Glaskugeln ein Draht in verschiedener Weise genähert und eine etwa hierdurch eintretende Auftriebsveränderung der Kugeln beobachtet wurde, ließ sich die Freiheit der Messungen von merklichen Störungen durch den Draht nachweisen. Ebensowenig war eine merkliche Veränderung des reinen Drahtauftriebes zu beobachten, falls der Drahtspitze verschieden große Perlen nur soweit genähert wurden, daß sie nicht einen Teil des Drahtstückes abdeckten. Die im vorstehenden mitgeteilten Ergebnisse der Messung in bekannten strömenden Gasen sind danach praktisch als störungsfrei zu bezeichnen.

25. Bevor wir zur Verwertung der neu gefundenen Tatsachen für die Vorstellungen über die Vorgänge in Bunsenflammen schreiten, sei noch kurz des Zusammenhanges gedacht, der nach unserer Beobachtung zwischen Gasüberdruck $p$ und Ausströmungsgeschwindigkeit besteht.

Verzeichnen wir den beobachteten Auftrieb $W$ der einzelnen Glasperlen als Funktion des im vorgeschalteten Manometer gemessenen Gasüberdruckes, so findet sich, daß diese Funktion für jede Kugeldimension eine andere ist. Die Fig. 11 zeigt beispielsweise die Verhältnisse für Sauerstoff. Bei der kleinen Platinscheibe ist hier der Auftrieb proportional der $1{,}29^{\text{ten}}$ Potenz des Überdruckes. Bei der größten benutzten Kugel vom Radius 0,377 cm besteht direkte Proportionalität zwischen Auftrieb und Überdruck, und bei den kleineren Kugeln verringert sich der Exponent von $p$ um so mehr, je mehr deren Dimension abnimmt.

Wir vergleichen hiermit den Zusammenhang zwischen Auftrieb und Gasgeschwindigkeit. Die Beobachtungen mit dem Platinscheibchen zeigen für Sauerstoff Proportionalität des Auftriebes mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Bei der Kugel

$r = 0{,}377$ cm kann $W$ proportional gesetzt werden der $1{,}5^{\text{ten}}$ Potenz der Geschwindigkeit; bei kleineren Kugeln vermindert

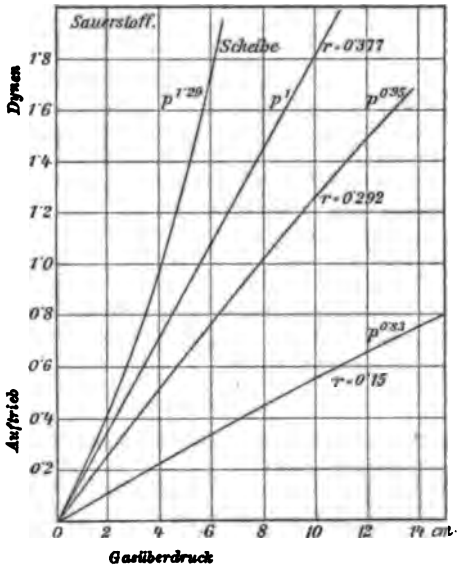



Fig. 11.

sich auch hier der Wert des Exponenten von $v$ und beträgt bei $r = 0{,}15$ cm nur mehr 1,28.

Die Zusammenstellung der beiden genannten Gesetzmäßigkeiten ergibt für Sauerstoff:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Platinscheibe $W$ | prop. | $p^{1,29}$ | prop. | $v^2$ | folglich | $p$ | prop. | $v^{1,55}$ |
| 2. | Kugel $r = 0{,}377$ cm | „ | $p^1$ | „ | $v^{1,50}$ | „ | $p$ | „ | $v^{1,50}$ |
| 3. | „ $r = 0{,}292$ „ | „ | $p^{0,95}$ | „ | $v^{1,43}$ | „ | $p$ | „ | $v^{1,50}$ |
| 4. | „ $r = 0{,}15$ „ | „ | $p^{0,83}$ | „ | $v^{1,28}$ | „ | $p$ | „ | $v^{1,54}$ |

Die notwendigerweise von der Dimension der Auftriebskörper unabhängige Beziehung zwischen Überdruck und Geschwindigkeit findet sich, wie man sieht, für alle vier Körper befriedigend konstant. Es ist zu schließen, daß die Ausströmungsgeschwindigkeit des Sauerstoffs in den dem Versuch unterworfenen Fällen der $0{,}65^{\text{ten}}$ Potenz des Überdruckes proportional ist, während bei der Ausströmung aus kapillaren Öffnungen die Geschwindigkeit, wie bekannt, der $0{,}5^{\text{ten}}$ Potenz des Überdruckes proportional ist.

Ganz analoge Verhältnisse finden sich bei den anderen untersuchten Gasen. Besonders eingehende Messungen der Beziehung zwischen Auftrieb und Gasüberdruck sind hier vielfach mit Luft ausgeführt worden; die Benutzung der Glaskugel $r = 0{,}377$ cm zeigte ganz in Übereinstimmung mit den entsprechenden Beobachtungen bei Sauerstoff völlige Proportionalität[1]) zwischen $W$ und $p$ und führte mit Verwendung des Zusammenhanges zwischen $W$ und $v$ zu völlig gleichem Resultat, bezüglich der Proportionalität von $p$ mit $v^{1,5}$, wie die Versuche mit Sauerstoff.

Es nähert sich dies Ergebnis der von Hrn. Reynolds[2]) für die Flüssigkeitsbewegung in Röhren gemachten Beobachtung, wonach der Überdruck der $1{,}723^{\text{ten}}$ Potenz der Strömungsgeschwindigkeit proportional ist.

### Innere Reibung und Dichte der Bunsenflamme.

26. Durch das für bekannte Gase gefundene Widerstandsgesetz wird nun die Auswertung der im vorhergehenden für die Bunsenflamme gewonnenen Versuchsdaten ermöglicht. Der direkten Übertragung dieses Gesetzes auf die Vorgänge der Gasbewegung in Flammen dürfte kaum ein Bedenken entgegenstehen. Es waren insbesondere die Dimensionen der Ausflußröhren und der Querschnitte des Gasstrahles in beiden Fällen möglichst gleich gewählt zur Beseitigung etwaiger Ungleichheiten, wie sie durch den Einfluß verschiedener Querschnitte auf den Widerstandswert hätten auftreten können. Auch die Art der Gasströmung fand sich in beiden Fällen ganz analog. In der Flamme sowohl wie in bekannten kalten Gasen war die Strömung in der Umgebung der Widerstandskörper um so gleichmäßiger, je mehr sich lineare Abhängigkeit des Widerstandes von den Radien der Kugeln zeigte, während Wirbelbildung um so auffälliger sich geltend machte, je mehr der Anteil der Trägheit des Gases am Gesamtwiderstand anwuchs.

1) Das Ergebnis war dasselbe, ob das Gas ohne weiteres der vertikalen Glasröhre entströmte, oder ob es zur Abhaltung jeglicher Wirbelbeweguug zuerst durch Watte oder Drahtnetz geführt wurde.

2) O. Reynolds, Phil. Trans. 174. p. 935. 1883.

### a) Die Mischgase im dunkeln Konus.

27. Relativ einfach liegen die Verhältnisse im dunkeln Konus, wo der Zustand der Mischgase noch kaum von der an der Konusgrenze vor sich gehenden Verbrennung beeinflußt wird. Für die innere Reibung und Dichte der Gase im dunkeln Konus der kleinen Bunsenflamme liefert das in Tab. Ia niedergelegte Beobachtungsmaterial mit Benutzung der gefundenen Mittelwerte der Konstanten $k$ und $b$ die Werte

$$\eta = 0{,}000169 \quad \text{und} \quad \delta = 0{,}000820.$$

Für die Mischgase im Konus der größeren Bunsenflamme findet sich analog

$$\eta = 0{,}000166 \quad \text{und} \quad \delta = 0{,}000834.$$

28. Wenn wir die für die Gasdichte gewonnenen Werte mit den älteren bei 20° Zimmertemperatur durch direkte Wägung bestimmten Daten vergleichen, so deutet der erstere Wert der kleinen Bunsenflamme auf eine Gastemperatur von 64,7°, der zweite Wert auf 61,6° C. hin, Temperaturen, welche mit Rücksicht auf die begrenzte Genauigkeitsgröße der Dichteberechnung aus dem Widerstand als mit den durch das Thermoelement gemessenen Temperaturen in sehr befriedigendem Einklang stehend zu betrachten sind.

29. Suchen wir den von uns gewonnenen Wert der Konstanten der inneren Reibung mit den Erfahrungen älterer Reibungsmessungen an Gasen zu vergleichen, so wird zunächst die Kenntnis der Zusammensetzung der Mischgase erforderlich. In Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Dichtebestimmung werden wir für das benutzte Leuchtgas annehmen können:

| | Volumteile | Gewicht |
|---|---|---|
| Wasserstoff . . . . . | 58 | 116 |
| Methan . . . . . | 29 | 464 |
| Kohlenoxyd . . . . . | 9 | 252 |
| Äthylen[1]) . . . . . | 4 | 112 |
| | 100 | 944 |

woraus $\delta = 0{,}327$.[2])

1) Es sind unter dieser Bezeichnung alle die in nur geringer Menge dem Leuchtgas etwa beigefügten schwereren Kohlenwasserstoffe zusammengefaßt.

2) Beobachtet war $\delta = 0{,}326$.

Hierzu addieren sich im Mischgas etwa 70 Proz. Luft, entsprechend

| | | |
|---|---|---|
| Stickstoff . . . . . | 186 | 5208 |
| Sauerstoff . . . . . | 46 | 1472 |

und wir erhalten 332 Volumteile vom Gewicht 7624, woraus $\delta = 0{,}794$.[1])

Wird mit Berücksichtigung der hier gegebenen Volumteile der Einzelgase die für die Größe der Temperaturabhängigkeit der Reibungskonstanten nach Sutherlands[2]) Vorstellung maßgebende Konstante $C$ aus den den einzelnen reinen Gasen zukommenden $C$-Werten[3]) nach der Mischungsregel berechnet, was nach den Beobachtungen des Hrn. Kleint[4]) zutreffend ist, so gelangt man zu $C = 112$, einem Wert, der insofern einige Unsicherheit aufweist, als die Höhe der entsprechenden Größe für Methan und Kohlenoxyd, weil mir nicht nach älteren Beobachtungen bekannt, nur vermutungsweise[5]) bewertet wurde. Die auf diesem Wege mit Benutzung eines aus der Dichte- und der thermoelektrischen Messung sich ergebenden Mittelwertes der Temperatur[6]) der Mischgase — 56,5° — durch Umrechnung auf 0° erhaltene Reibungskonstante findet sich, wenn wir die kleinen Abweichungen der mit den beiden verschiedenen Flammen erhaltenen Beobachtungswerte nur der Ungenauigkeit der Beobachtung und nicht der wenig verschiedenen Gaszusammensetzung zuschreiben, zu $\eta_0 = 0{,}000\,148$. Es ist dies Resultat etwa 7 Proz. kleiner, als es mit Rücksicht auf die bekannte Gaszusammensetzung nach Hrn. Kleints Angaben über die innere Reibung von Gasgemischen zu erwarten

1) Beobachtet war $\delta = 0{,}80$.

2) W. Sutherland, Phil. Mag. (5) **36**. p. 507. 1893; vgl. auch später.

3) Für Wasserstoff ist der Mittelwert aus $C = 91$ (Kleint), $C = 79$ (Sutherland), $C = 72{,}2$ (Rayleigh), $C = 71{,}7$ (Breitenbach), für Stickstoff das Mittel aus $C = 118$ (Kleint), $C = 109$ (Sutherland), $C = 110{,}6$ (Bestelmeyer), für Sauerstoff das Mittel aus $C = 136$ (Kleint), $C = 127$ (Sutherland), $C = 128$ (Rayleigh) gesetzt.

4) F. Kleint, Diss. Halle 1904.

5) Nach Maßgabe ihrer kritischen Daten.

6) Da durch die die Kugeln tragenden Platindrähte merkliche Wärmeleitung von den heißen Flammenteilen nach dem Innern des dunkeln Konus stattfinden kann, kann die Temperatur daselbst in der Tat etwas höher sein, als vom Thermoelement früher angegeben.

gewesen wäre. Eine wesentliche Bedeutung wird man dieser Abweichung kaum zuschreiben können.

30. Nach Auslöschen der Flamme ohne Veränderung der Gasströmung wird die Temperatur der Mischgase sinken. Die innere Reibung nimmt infolgedessen ab, die Dichte zu. Die Zunahme der letzteren wird den gesamten Gaswiderstand um so merklicher beeinflussen, je größer der Kugelradius ist. Wie eine einfache Rechnung ergibt, ist in dem vorliegenden Falle der größeren Bunsenflamme bei kleinen Radien der Einfluß der Reibungsabnahme größer, bei großen Radien kleiner als der Einfluß der Dichteänderung, woraus sich das in Tab. I b bezeichnete Verhalten erklärt.

Da im ganzen Innenraum des dunkeln Konus nicht zu nahe an der Verbrennungsfläche die Gastemperatur kaum deutlich sich ändert, besteht auch kein Grund für eine Änderung des Gaswiderstandes, dessen angenäherte Konstanz die ältere Messung ergeben hat.

### b) Die Vorgänge im heißen Flammeninnern.

31. Für eine richtige Auswertung der in den heißen Flammenregionen ausgeführten Messungen zur Ermittelung der inneren Reibung und Dichte ist die Kenntnis der in der Umgebung der Auftriebskörper bestehenden Temperaturverhältnisse unerläßlich. Durch Einführung von Drahtnetz an verschiedene Orte der Flamme, Annähern von Platindraht und kleinen Glaskörperchen an die benutzten Auftriebskugeln ließ sich nachweisen, daß für die Größe des Auftriebes im wesentlichen nur die unmittelbare Umgebung der Kugeln maßgebend zu sein scheint und daß es daher in erster Annäherung nur auf die Kenntnis der durch die Widerstandskörper in ihrer nächsten Nähe modifizierten Flammentemperatur ankommt.

Zur Gewinnung eines ersten Anhaltes für diese Temperatur und für deren Verteilung über die verschiedenen Flammenschichten habe ich einige Messungen mit einem Platin–Platinrhodium-Thermoelement ausgeführt, das von der Seite her in die Bunsenflammen eingeführt wurde und dessen Drahtdicke so beschaffen war, daß der Wärmeverlust durch Leitung etwa derselbe war wie bei den die Glaskugeln tragenden Platinstäbchen. Es fand sich hierbei nahe übereinstimmend in jeder

der drei benutzten Flammen unmittelbar über der Konusspitze etwa 1200° C., wachsend auf 1300° mit zunehmender Erhebung in der Flammenachse bis 1350° an der heißen Spitze der Flamme. Die seitliche Verschiebung der Lötstelle erbrachte eine Zunahme der Temperatur von dem in der Achse vorhandenen Wert von 1200 bzw. 1300 auf 1350° in der heißesten Zone des äußeren Flammenmantels und darüber hinaus rasche Abnahme.

Diese Temperaturen werden gegenüber den Erhitzungstemperaturen der benutzten Glasperlen noch etwas zu groß sein, da im letzteren Falle die die thermoelektrischen Angaben jedenfalls störende Wärmezuleitung zur Lötstelle von den heißeren Orten der Flamme her die Perltemperatur infolge der schlechteren Wärmeleitung des Glases nicht sehr wesentlich beeinflussen wird. Die Abweichung in der thermoelektrisch gemessenen und wahren Temperatur der Perlenumgebung wird um so beträchtlicher, je mehr noch die Ausstrahlung durch zunehmende Größe der Glaskugeln begünstigt wird.

Zur näheren Bestimmung der jeder einzelnen Glaskugel im Flammeninnern zukommenden Temperatur habe ich von jeweils zwei Kugeln gleicher Dimension die eine in die Bunsenflamme, die andere in das Innere eines elektrischen Ofens eingeführt und die Glühfarbe beider Kugeln miteinander verglichen, während die mit dem genannten Thermoelement gemessene Ofentemperatur langsam variiert wurde. Die Bunsenflamme war hierbei mit einem geschwärzten Blechzylinder umgeben, der mit kleiner Öffnung zur Beobachtung der glühenden Perlen versehen war. Außerdem wurden geeignet gewählte Glasstückchen mit scharfen Kanten gleichzeitig in den elektrischen Ofen und die Bunsenflamme gebracht, und es wurde diejenige Ofentemperatur bestimmt, bei der die Glasstücke das gleiche Verhalten zeigten — zu schmelzen oder zu fließen begannen — wie in der Bunsenflamme.

Das Resultat dieser Versuche kann dahin zusammengefaßt werden, daß für die Temperatur der Perlen bis 0,1 mm Radius 1150°, bis 0,2 mm Radius 1100° und der Perlen von 0,3 mm Radius 1000—1050° C. anzunehmen ist, wenn sich die Perlen etwa 1—2 cm von der Konusspitze entfernt befinden. Bei größerer Entfernung steigt die Temperatur etwas

an nach Maßgabe der durch das Thermoelement festgelegten Verhältnisse.

32. Wie schon die Beobachtung des Glühzustandes der verschieden großen Glaskugeln zeigt, geben danach die in Tab. II und der zugehörigen Fig. 7 verzeichneten Versuchsdaten nicht direkt die reine Abhängigkeit des Widerstandes vom Kugelradius in einem für alle Kugeln unveränderlichen Gasmedium an, sondern die Auftriebe sind offenbar mit wachsendem Kugelradius um so kleiner, je mehr zunehmende Wärmeausstrahlung der Kugeln die Temperatur ihrer Umgebung erniedrigt. Dem entspricht es, daß sich für einige Kugeln aus Quarz an Stäbchen von gleichem Material — mit $Q$ bezeichnet — merklich größere Auftriebe zeigen infolge verringerter Strahlung und Wärmeableitung.

33. Mit Berücksichtigung des Vorgenannten versuchen wir die Berechnung der inneren Reibung und Dichte für die Bunsenflammen unter Benutzung der Kurven 1, 3, 5 und 6 der Fig. 7.

Für *die kleine Bunsenflamme mit 5 cm Konushöhe* kommen zwei ausgemessene Orte des inneren Flammenmantels in Betracht. Die Verhältnisse 1,5 cm über der Konusspitze werden durch Kurve 1 dargestellt. Die Berechnung der Konstante der inneren Reibung und der Dichte mit Werten für Kugelradien zwischen 0,1 und 0,2 mm ergibt $\eta = 0{,}000\,448$ und $\delta = 0{,}000\,157$. Die für Kugeln von etwa 0,3 mm Radius gefundenen Auftriebe liefern dagegen $\eta = 0{,}000\,429$ und $\delta = 0{,}000\,159$.

Wir sehen den Grund für die Abweichungen dieser Werte in der in beiden Fällen um etwa 100° verschiedenen Temperatur und versehen die den größeren Kugelradien zukommenden Auftriebe mit einer Korrektur, welche sämtliche Werte auf eine für alle Kugeln gleiche Temperatur von 1100° zurückführt. Die korrigierte Kurve ist in Fig. 7 gestrichelt mit 2 bezeichnet. Mit ihrer Hilfe läßt sich, etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate, der für 1100° C. wahrscheinlichste Wert der gesuchten beiden Konstanten bestimmen. Es findet sich

$$\eta = 0{,}000\,449 \quad \text{und} \quad \delta = 0{,}000\,157.$$

In 3 cm Entfernung von der Konusspitze wird für die kleinsten Kugeln die Temperatur 1150° anzunehmen sein, und es läßt sich auch hier nach Art des Vorhergehenden eine korrigierte Widerstandskurve 4 herstellen, deren Verlauf von den Temperaturunterschieden der verschiedenen Glaskugeln unabhängig ist. Mit ihrer Hilfe berechnet sich

$$\eta = 0{,}000494 \quad \text{und} \quad \delta = 0{,}000187.$$

Die für *die beiden größeren Bunsenflammen* in 2 cm Abstand von der Konusspitze im inneren Flammenmantel geltenden Werte der Konstanten lassen sich in der soeben skizzierten Weise dem Verlauf der Kurven 5 und 6 der Fig. 7 entnehmen. Aus der Kurve 6 findet sich für 1100° C.

$$\eta = 0{,}000438 \quad \text{und} \quad \delta = 0{,}000166,$$

und aus Kurve 5 für dieselbe Temperatur in der schnellsten Flammenströmung

$$\eta = 0{,}000445 \quad \text{und} \quad \delta = 0{,}000142.$$

34. Besondere Bedeutung erlangen die hier mitgeteilten Angaben erst durch den Versuch, aus ihnen einen näheren Einblick in die Vorgänge im Flammeninnern und die daselbst bestehenden Kräfte zu gewinnen. Die Betrachtung der Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung könnte zu diesem Ziele führen.

Nachdem durch eine große Zahl älterer Beobachtungen eine merklich stärkere Abhängigkeit der inneren Reibung der Gase von der Temperatur nachgewiesen worden war, als wie sie den einfachen Überlegungen der kinetischen Gastheorie entspräche, glaubte man, wie zuerst von Stefan[1]) hervorgehoben wurde, annehmen zu müssen, daß die Molekülgröße nicht konstant bliebe, sondern mit wachsender Temperatur abnehme. Demgegenüber ist von Sutherland[2]) gezeigt worden, daß man es hierbei offenbar nicht mit der wirklichen räumlichen Ausdehnung der Moleküle zu tun habe, sondern ausschließlich mit der Größe eines die Moleküle umgebenden

1) J. Stefan, Wiener Ber. 65. (II.) p. 339. 1872.
2) W. Sutherland, l. c.

Kraftfeldes, das mit wachsender Temperatur infolge zunehmender gegenseitiger Geschwindigkeit der Moleküle abnehmen würde. Die Temperaturabhängigkeit der Reibungskonstanten gehorche alsdann der Beziehung

$$\eta_t = \eta_0 \frac{1 + \frac{C}{T_0}}{1 + \frac{C}{T}} \sqrt{\frac{T}{T_0}},$$

wo $C$ eine für das betreffende Gas charakteristische Konstante sei, welche proportional ist der bis zum Zusammenstoß zweier Moleküle von ihrer gegenseitigen Anziehungskraft geleisteten Arbeit und deshalb einen Anhaltspunkt gibt für die Größe der bestehenden Anziehungskraft.

35. Wenn wir die Gültigkeit dieser für Temperaturen von einigen hundert Grad mehrfach geprüften Beziehung für den gegenwärtigen Fall der heißen Flammengase voraussetzen, so läßt sich die Größe $C$, wie sie zunächst in 1,5 bis 2 cm Abstand von der Konusspitze im inneren Flammenmantel besteht, mit einiger Annäherung aus dem Verhältnis der im vorhergehenden gegebenen Reibungskonstanten für ein Temperaturintervall von etwa 100° ermitteln. Man erhält $C = 112$, einen Wert, der infolge des zu seiner Berechnung benutzten jedenfalls sehr kleinen Temperaturunterschiedes keine allzu große Genauigkeit besitzen wird, der aber doch in guter Übereinstimmung ist mit demjenigen Wert, welcher nach der Mischungsregel für die unmittelbar über der Konusspitze etwa vorhandene Gaszusammensetzung zu erwarten wäre.

Es wird dieses Gas etwa 58 Proz. Stickstoff enthalten und, wenn wir mit Hrn. Smithells, Dixon[1]) u. a. annehmen, daß in der ersten Verbrennungszone der mitgeführte Luftsauerstoff zuerst mit dem aus Methan und Äthylen freiwerdenden Kohlenstoff reagiere, einen Überschuß von etwa 20 Proz. Wasserstoff, 10 Proz. Kohlenoxyd, den Rest Wasserdampf und Kohlensäure.[2]) Die für Stickstoff zu 112 anzunehmende Konstante $C$ wird durch die Gegenwart des Wasserstoffs etwas erniedrigt, des Kohlenoxyds und Wasserdampfes — deren

1) H. B. Dixon, Zeitschr. f. Gasbel. **48**. p. 71.

2) Vgl. Horstmann, Lieb. Ann. **190**. p. 228.

*C*-Werte allerdings nicht bekannt zu sein scheinen — jedenfalls etwas erhöht, so daß kaum eine merkliche Veränderung der Größe eintreten dürfte.

Wird der Mittelwert der in nahezu gleichartigen Flammenpunkten der drei Bunsenflammen gefundenen Reibungskonstanten $\eta = 0{,}000444$, wie er für 1100° C. gilt, mit Hilfe der festgelegten *C*-Größe auf 0° umgerechnet, so ergibt sich $\eta_0 = 0{,}000152$, während für die oben angenommene Zusammensetzung nach den älteren Beobachtungen an Mischgasen etwa $\eta = 0{,}000159$ zu erwarten gewesen wäre.

Die Übereinstimmung der beiden Daten ist mit Rücksicht auf die dem neuen Verfahren gesteckte Grenze der Beobachtungsgenauigkeit wohl als zufriedenstellend anzusehen, so daß der Nachweis der Gültigkeit der Sutherlandschen Beziehung für diese hohen Temperaturen und den speziellen Fall der Flammengase im inneren Flammensaum hierdurch erbracht sein dürfte. Es soll hierbei allerdings nicht Anspruch gemacht werden auf wesentlich größere Genauigkeit, als wie sie von Hrn. Barus[1]) für ähnlich hohe Temperaturen an einigen einfachen Gasen nach der Transpirationsmethode erreicht werden konnte.

Der Sinn der gefundenen Abweichung von dem zu erwartenden Wert ist in unserem Falle derselbe wie bei Hrn. Barus. Bei der unzureichenden Kenntnis der genauen chemischen oder physikalischen Vorgänge in Flammen würde sich eine Schlußfolgerung aus dieser Abweichung aber wohl verbieten, da vielleicht der experimentell gefundene $\eta$-Wert 0,000152 mehr Anspruch auf Annäherung an die Wahrheit machen kann als der nach der vermuteten Gasmischung angenommene größere Wert, wenn auch die Voraussetzung dieser Gasmischung durch die gefundenen Werte der Gasdichte — 0,00078 für 0° — einigermaßen gestützt erscheint.[2])

---

1) C. Barus, Wied. Ann. **36.** p. 358. 1889.

2) Nicht unmöglich für die Erklärung des kleineren Wertes der Beobachtung wäre vielleicht die Annahme, daß der für alle Gase als konstant vorausgesetzte und hier benutzte Reibungsfaktor $k$ mit zunehmender Größe der inneren Reibung sich verringere, wie dies tatsächlich bei den untersuchten bekannten Gasen sich geltend zu machen scheint; $\eta$ würde dann größer gefunden.

Eine teilweise Dissoziation der Gase Stickstoff, Wasserstoff oder Kohlenoxyd, welche die Größe $C$ und damit den $\eta$-Wert deutlich beeinflussen könnte, ist bei den hier vorliegenden Temperaturen kaum anzunehmen[1]), und auch der Wasserdampf zeigt so geringe Dissoziation[2]), daß dieselbe in unserem Fall nahe zu vernachlässigen ist.

36. Wesentlich neue Kenntnis von den Vorgängen in Flammen wird durch die gemachte Beobachtung von der deutlichen Variation des Gaswiderstandes mit dem Flammenort erbracht. Betrachten wir zunächst die Auftriebsänderungen, welche mit zunehmender Erhebung in der Achse der Bunsenflamme auftreten, so sind diese bis zur heißen Flammenspitze, da bis dahin noch wirbelfreie Gasströmung zu konstatieren ist, nur der Variation der inneren Reibung und der Dichte, zum kleinen Teil der wenig wesentlichen Geschwindigkeitsänderung der strömenden Gase zuzuschreiben.

Mit der Diffusion der äußeren Luft ins Flammeninnere wird nach höheren und seitlichen Flammenstellen zu der Stickstoffgehalt zunehmen und sich vermöge gleichzeitiger Sauerstoffdiffusion reichlich Kohlensäure und Wasserdampf bilden. Da die innere Reibung der Kohlensäure und diejenige des Stickstoffs nahe gleich sind, diejenige des Wasserdampfes nicht wesentlich höher ist als diejenige des Wasserstoffs, so wird die innere Reibung gegen die äußeren Flammenstellen, soweit sie lediglich von der Veränderung der Gaszusammensetzung als Ursache abhängt, nur sehr geringfügig wachsen können. Sie wird dagegen merklich wachsen infolge Zunahme der Flammentemperatur gegen den äußeren Flammenmantel und vermöge der sehr starken Temperaturabhängigkeit der sich bildenden Kohlensäure und — was nach den neuen Ergebnissen unserer Messungen und den kritischen Daten anzunehmen ist — des Wasserdampfes.

Die hiernach in quantitativer Hinsicht zu erwartende Steigerung des Auftriebes, einerseits mit zunehmender Erhebung in der Achse der Bunsenflamme, andererseits mit seit-

---

1) C. Langer u. V. Meyer, Pyrochem. Unters. Braunschweig 1885.

2) W. Nernst u. H. v. Wartenberg, Zeitschr. f. physik. Chem. **56**. p. 534. 1906.

licher Annäherung an den äußeren Flammenmantel, lassen Betrachtungen über die angenäherte Zusammensetzung der Gasmischung im äußeren Flammenmantel einigermaßen voraussagen.

Bei vollständiger Verbrennung würde, entsprechend einer Gasmischung von etwa 110 Teilen Stickstoff, 32 Teilen Wasserdampf und 12 Teilen Kohlensäure, für die Konstante $C$ der Sutherlandschen Gleichung etwa 150 anzunehmen sein, wenn wir für Kohlensäure $C = 250$ [1]) setzen und dem Wasserdampf, entsprechend dessen physikalischem Verhalten, einen ähnlichen Wert zuschreiben.

Für 1200° C. würde sich auf diese Weise die Konstante der inneren Reibung zu 0,00050 ergeben, und es würde der Auftrieb der Glaskugeln infolge merklicher Dichtezunahme der Mischgase noch eine etwas weitere Steigerung erfahren.[2])

Vergleichen wir dies Ergebnis der Überlegung mit dem in 3 cm Konusabstand in der kleinen Bunsenflamme experimentell gefundenen Wert der inneren Reibung, so zeigt sich dieser schon in dem kleinen Abstand von der Konusspitze ebenso hoch, als wie er im Maximum nach vorstehendem zu erwarten wäre. Da alle Beobachtungen mit weiterer Erhebung in der Flamme fortgesetzt sehr starke Zunahme des Kugelauftriebes zeigten, welche auf eine entsprechend hohe Wertsteigerung der Konstanten der inneren Reibung hinweist, so muß für alle dem äußeren Flammenmantel nahekommenden Punkte des Flammeninnern ein ausnehmend hoher Wert der Sutherlandschen Konstanten $C$ beigelegt werden, der darauf hinweist, daß die zwischen den Molekülen in jenen Flammen-

---

1) Von Sutherland wird für Kohlensäure $C = 272$, von Breitenbach $C = 226$ angegeben.

2) Etwas unsicher bleibt die Bewertung einer Geschwindigkeitsänderung beim Übergang vom inneren zum äußeren Flammenmantel. Ein größerer Auftrieb des äußeren Flammenmantels ist, da derselbe direkt an dichteres Gas grenzt, zweifellos vorhanden. Er läßt sich direkt beobachten bei horizontal brennender Bunsenflamme; der äußere Flammenmantelel erfährt eine merklich größere Ablenkung nach oben als die übrigen Flammenteile. Daß er aber keine wesentlich höhere Geschwindigkeit besitzt, würde in Übereinstimmung mit den direkten Geschwindigkeitsmessungen aus der Größe seiner Ablenkung und seiner seitlichen Ausbreitung entnommen werden müssen.

punkten wirksamen Kräfte wesentlich größere sein müssen, als wie sie in unveränderlichen Gasen sonst bestehen. Da mit wachsender Annäherung an den äußeren Flammenmantel zunehmende Oxydation der noch brennbaren Gasteile erfolgt[1]), so werden wir in diesen Kräften die die chemische Vereinigung der verschiedenen Moleküle herbeiführenden Attraktionskräfte sehen müssen[2]), deren Wirkung ihren Höhepunkt erreicht in der Verbrennungszone des äußeren Flammenmantels.

Mit den von Hrn. Lenard[3]) gemachten Beobachtungen über die Spektren der Metallatome in der Bunsenflamme würde die Annahme der elektrischen Natur dieser Kräfte übereinstimmen, deren größter Wirkungsbereich zusammenfällt mit dem von Hrn. Lenard gefundenen Ort stärkster Emissivität.

Wenn die von mir vorgenommene Einführung reichlicher Mengen verschiedener Salze — des Natriums, Rubidiums und Cäsiums — in die Bunsenflamme keine deutlich merkbare Änderung des Auftriebes hervorgerufen hat[4]), so liegt dies wohl einmal in der verhältnismäßig geringen Metalldampfmenge im Vergleich mit der Menge reagierender Gase, andererseits darin, daß die Flamme schon durch die Glasperlen allein kräftige Gelbfärbung besaß entsprechend reichlichem Na-Gehalt.

37. Mit weit geringerer Genauigkeit als wie die gefundene Größe der inneren Reibung lassen sich die nach dem beschriebenen Verfahren gewonnenen Werte der Gasdichte zu Angaben über die Konstitution der Gasmischung an den einzelnen Flammenpunkten verwerten, da Fehler in der Auftriebsbestimmung von nur einigen Prozent sehr leicht Fehler in der Dichtebestimmung von über 100 Proz. verursachen können. Ich

1) Die damit gleichzeitig erfolgende beständige Temperaturzunahme war sehr deutlich nachzuweisen an der mit der Entfernung vom Konus wachsenden photographischen Intensität der Bahnen von durch die Flammenströmung transportierten Metall- oder Kohlepartikelchen.

2) Diese Deutung stimmt überein mit der Beobachtung, wonach auch die molekulare Anziehung, wie sie durch die van der Waalssche Attraktionskonstante zum Ausdruck gebracht wird, bei Molekülassoziation merklich zunimmt.

3) P. Lenard, Ann. d. Phys. 17. p. 246. 1905.

4) Bei dem stark flüchtigen CsBr ließ sich eine kleine Verringerung des Auftriebes konstatieren, die wohl auf merkliche Flammenkühlung zurückzuführen ist.

habe deshalb versucht, die unmittelbar über dem blauen Konus vorhandene Gasdichte auch nach dem von Hrn. Gouy[1]) beschriebenen Verfahren der Messung der Winkel zwischen den Stromlinien und der Konusfläche zu ermitteln, indem ich die Flammen photographierte, während eine große Zahl glühender Metall- oder Kohlepartikelchen durch die Flammenströmung transportiert wurden. Der größte von allen auftretenden Winkeln wurde dann der Berechnung der Gasdichte zugrunde gelegt. Die Übereinstimmung der derart beobachteten Werte mit dem mitgeteilten Ergebnis ist nahe befriedigend, wenn auch die erreichbare Genauigkeit des Verfahrens kaum die obige wesentlich überstieg. Von Wert ist jedenfalls die gegenseitige Bestätigung der angenäherten Richtigkeit der mitgeteilten Gasdichten.

1) M. Gouy, l. c.

(Eingegangen 4. Dezember 1907.)

## 8. *Über den Luftwiderstand;* *von A. Becker.*

Der Widerstand, welchen ein bewegter Körper in einem als Ganzes ruhenden flüssigen oder gasförmigen Medium erfährt, ist einerseits abhängig von der zu überwindenden Trägheit des Mediums, welche durch die Dichte desselben markiert wird, andererseits von der gegenseitigen Beweglichkeit der Moleküle des Mediums, die in der Größe der inneren Reibung ihren zahlenmäßigen Ausdruck findet. Die Art dieser Abhängigkeit ist seit etwa 200 Jahren Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen, welche übereinstimmend zu dem Ergebnis führten, daß keine für alle Fälle einheitliche Gesetzmäßigkeit für den Widerstand angebbar sei und daß der Einfluß der genannten Faktoren sehr wesentlich variiere mit den Dimensionen der bewegten Körper und ihrer Geschwindigkeit. Das Studium der Strömungsverhältnisse[1]) in der Umgebung des bewegten Körpers, die von der Gestalt und Geschwindigkeit desselben deutlich beeinflußt werden, läßt jenes Resultat als wohl verständlich erscheinen und legt gleichzeitig nahe, einfache Verhältnisse zunächst bei geometrisch einfach gestalteten Körpern zu suchen. Unsere folgenden Betrachtungen sollen sich dementsprechend in erster Linie auf die Kugelform beziehen.

Bei den ältesten Untersuchungen Newtons[2]) über den Einfluß der Luft auf die Fallbewegung hohler Glaskugeln schien nur die Trägheit des Mediums sich bemerkbar zu machen. Der Widerstand war proportional der Dichte $\delta$ der

1) Siehe z. B. L. Mach und P. Salcher, Wien. Ber. **105.** p. 604. 1896; Marey, Compt. rend. **131.** p. 160. 1900 und **132.** p. 1291. 1901; H. S. Hele-Shaw, Compt. rend. **132.** p. 1306. 1901; F. Ahlborn, Vortr. Naturf. Vers. Hambg. 1901 und Phys. Zeitschr. **3.** p. 120. 1901; A. Becker, Ann. d. Phys. **24.** p. 823. 1907.

2) J. Newton, Philos. nat. princ. math. **2.** Sect. 2 und 7. 1710.

Luft, dem Quadrat des Kugelradius $r$ und dem Quadrat der Geschwindigkeit $v$ und konnte quantitativ durch

$$W = \tfrac{4}{3}\pi\gamma\delta r^2 v^2$$

ausgedrückt werden, wo $\gamma$ sich als eine Konstante vom Wert 0,375 erwies. Die große Mehrzahl der späteren Beobachtungen bestätigte die Gültigkeit dieser Formel für einen Geschwindigkeitsbereich von wenigen Metern pro Sekunde bis nahe Schallgeschwindigkeit, und nur in den Angaben für die Konstante $\gamma$ bestehen Abweichungen. Dieselbe wurde von Borda[1]) nach Versuchen mit einem Rotationsapparat zu 0,225 gefunden, und Lombard[2]) erhielt aus seinen Beobachtungen über die Tragweite der Kanonenkugeln genau denselben Wert, während Hutton[3]) an abgeschossenen Kugeln 0,188 und Hr. Lenard[4]) an Tropfen von Wasser und Alkohol 0,153, an Quecksilbertropfen 0,324 fand.

Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten ist der zur Überwindung der Trägheit des Mediums erforderliche Energieverbrauch des bewegten Körpers zu vernachlässigen, und der gesamte beobachtbare Widerstand ist eine Folge der inneren Reibung[5]) des Mediums. Wie zuerst von Stokes[6]) und später an speziellen Problemen von Oberbeck[7]), Boussinesq[8]), Basset[9]), Whitehead[10]) u. a. gezeigt worden ist, läßt sich für diesen Fall der Widerstand des bewegten Körpers theoretisch exakt berechnen. Derselbe beträgt nach Stokes[11]) für die Kugel

$$W = 6\pi\eta r v,$$

wo $\eta$ die Konstante der inneren Reibung des Mediums ist.

---

1) Borda, Mém. de l'acad. des sciences 1763.
2) Lombard, vgl. Gehlers Wörterb. d. Phys. 10b. p. 1734. 1842.
3) Hutton, Trans. Roy. Soc. Edinb. 2. 1787.
4) P. Lenard, Wied. Ann. 30. p. 228. 1887.
5) Die äußere Reibung ist in nahezu allen Fällen als unendlich groß anzusehen.
6) G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. 9. p. 8. 1850.
7) A. Oberbeck, Borch. Journ. f. Math. 81. p. 62. 1876.
8) J. Boussinesq, Compt. rend. 100. p. 935 u. 974. 1885.
9) H. Basset, Phil. Trans. 179. p. 43. 1888.
10) J. B. Whitehead, Quart. Journ. of Math. 23. p. 78.
11) Vgl. G. Kirchhoff, Vorles. über Mechanik p. 378. 1897.

Infolge der beschränkenden Voraussetzungen bei der Ableitung dieser Beziehung aus den hydrodynamischen Grundgleichungen der stationären Bewegung ist deren Gültigkeitsbereich ein eng begrenzter; er ist nach einer von Lord Rayleigh[1]) gegebenen Formulierung an die Bedingung geknüpft, daß das Produkt aus $v\,\delta r$ klein sei gegen die Reibungskonstante $\eta$.

Daß das Stokessche Gesetz innerhalb dieses Bereiches die tatsächlichen Verhältnisse richtig darstelle, ist durch die experimentelle Untersuchung bestätigt, wenn auch die Zahl solcher einwandsfreier Untersuchungen infolge der experimentell vielfach sehr schwer durchführbaren Realisierung der Rayleighschen Bedingung und der weiteren Forderung eines nicht begrenzten Mediums eine sehr beschränkte ist.

Durch die genannten Formeln von Stokes und Newton kann somit der Widerstand bewegter Kugeln für sehr kleine Geschwindigkeiten weit unter 1 cm/sec einerseits und andererseits für relativ große Geschwindigkeiten von einigen m/sec an aufwärts — von den für die Ballistik besonders wichtigen Fällen sehr großer Geschwindigkeiten von mehreren Hundert m/sec sehen wir ab — als befriedigend dargestellt gelten. Es bleibt noch das Gebiet zwischenliegender Geschwindigkeiten, für welches abschließende Untersuchungen älterer Beobachter nicht bekannt sind, das aber insofern besonderes Interesse beanspruchen muß, als es ein Übergangsgebiet darstellt, in welchem sich vielleicht beide oben genannten Ursachen des Widerstandes nebeneinander bemerkbar machen — wie schon einige ältere Beobachtungen, in welchen teilweise Proportionalität des Widerstandes mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit gefunden ist[2]), möglich erscheinen lassen — falls nicht etwa ein diskontinuierlicher Übergang der beiden Gesetzmäßigkeiten ineinander stattfindet.

Gewisse neue Anhaltspunkte für eine Entscheidung dieser Frage haben mir eigene Versuche gebracht, die in einer vorhergehenden Arbeit[3]) mitgeteilt sind. Dieselben haben gezeigt,

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **36**. p. 354. 1893; vgl. auch H. S. Allen, Phil. Mag. **50**. p. 323 u. 519. 1900.

2) Vgl. z. B. M. Thiesen, Wied. Ann. **26**. p. 309. 1885.

3) A. Becker, Ann. d. Phys. **24**. p. 823. 1907.

daß der Auftrieb ruhender Kugeln in sehr verschiedenen mit Geschwindigkeiten zwischen etwa 40 und 150 cm/sec strömenden Gasen durch eine Summe

$$W = k\eta r v + \tfrac{4}{3}\pi\gamma\delta r^2 v^2$$

darstellbar ist, deren erster Summand die Form des Stokesschen und deren zweiter Summand die Form des Newtonschen Ausdruckes für den Widerstand besitzt. Die gefundene Beziehung läßt erkennen, daß bei den hier in Frage gekommenen Geschwindigkeiten und bei der bestimmten Wahl der Widerstandskörper jedenfalls neben der Dichte des Mediums dessen innere Reibung einen merklichen Einfluß auf die Größe des Widerstandes ausübt.[1]) In quantitativer Hinsicht war der Einfluß der Dichte numerisch derselbe wie in den Fällen ausschließlicher Gültigkeit der Newtonschen Formel, indem der für die Größe $\gamma$ aus der Gesamtheit der Versuche gewonnene Zahlenwert sich nicht wesentlich von den oben erwähnten Angaben anderer Beobachter unterschied. Die den Anteil der inneren Reibung darstellende Konstante $k$ dagegen erwies sich außerordentlich verschieden von dem von Stokes zu $6\pi$ angegebenen Zahlenfaktor. Der etwa 8fache Wert des Faktors nötigte zu der Vorstellung, daß bei den benutzten Geschwindigkeiten die innere Reibung sich weit stärker geltend zu machen scheint als in den Fällen sehr kleiner Geschwindigkeiten, in denen das Stokessche Gesetz Gültigkeit hat.

Es blieb bei den mitgeteilten Versuchen allerdings noch unentschieden, wie weit die Form der Gesetzmäßigkeit und die absolute Größe des Widerstandes von dem verhältnismäßig sehr eng begrenzten Querschnitt des Gasstromes hätte beeinflußt sein können. Ich fand es deshalb für wichtig, dementsprechend variierte neue Versuche anzustellen, welche gleichzeitig die Widerstandsverhältnisse bis zu den kleinsten noch gut benutzbaren Gasgeschwindigkeiten verfolgen und möglichst Anschluß gewinnen lassen sollten an das Gebiet ausschließlicher Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes.

1) Nach Versuchen von K. Schellbach mit Scheiben würde die Newtonsche Formel allein noch bis zu Geschwindigkeiten von etwa 20 cm/sec gelten; die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit schließen dies Resultat, wie sich zeigen wird, nicht aus. Vgl. hierzu Nr. 11 und 20.

Dies ließ sich erreichen durch Messung der Größe des Auftriebes, welchen Kugeln verschiedener Dimension in durch Röhren strömenden Gasen erfahren. Die Bedenken, welche derartigen Versuchen in Röhren von vornherein entgegenstehen, daß nämlich die Rohrwand einerseits eine störende Begrenzung des für einwandsfreie Versuche als unbegrenzt vorauszusetzenden Gasstromes herbeiführe und andererseits die Geschwindigkeit des Gases in den einzelnen Punkten des Querschnittes modifiziere, dürften durch die Variation der benutzten Rohrweiten und die Feststellung der Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt berücksichtigt sein.

Die mitzuteilenden Versuche beziehen sich auf Luft und Kohlensäure.

### I. Widerstandsmessungen mit der Wage.

1. Die gegenwärtigen Versuche erfordern eine Genauigkeit der Kraftmessung, wie sie durch die in der vorhergehenden

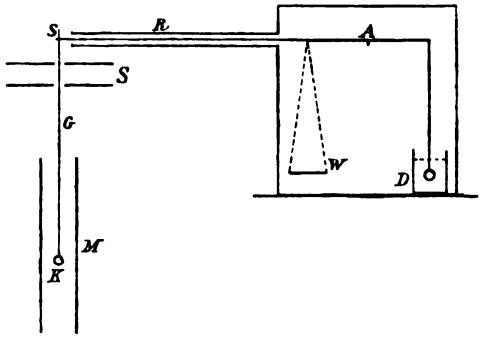



Fig. 1.

Arbeit benutzte Drehwage, die mit guter Sicherheit nur noch 0,1 Dyne festzustellen gestattete, nicht ermöglicht war. Aus der beistehenden Fig. 1 wird die neue Anordnung, welche an die Stelle der älteren getreten ist, ersichtlich. Die benutzten Widerstandskörper, Aluminiumkugeln von 0,171, 0,228, 0,298 und 0,397 cm Radius, sind an einem 0,01 mm dicken, etwa 80 cm langen Glasfaden an dem Ende des auf etwa den fünffachen Wert seiner normalen Länge verlängerten Wagebalkens einer empfindlichen Wage aufgehängt. Zur teilweisen Äqui-

librierung der Kugelgewichte und zur Dämpfung der Schwingungsbewegung hängt eine etwa 2 cm dicke hohle Messingkugel *D* am anderen nicht verlängerten Wagebalken in einer geeignet gewählten Mischung von Glyzerin und Wasser. Die genaue Abgleichung der beiderseitigen Drehmomente wird durch Auflegen von Gewichten auf die Wagschale *W* oder durch Reiterverschiebung ermöglicht. Um aber die beiderseitige Belastung der Wage nicht zu ungleich werden zu lassen, habe ich bei einem Teil der Versuche auch den rechten Wagebalken etwas verlängert und die Gegengewichte an der Verlängerung angebracht.

Die Aluminiumkugeln *K* hängen in der Achse einer vertikal stehenden Messingröhre *M* von 60—80 cm Länge und variierter Weite etwa um die Hälfte der Rohrlänge von der oberen Mündung entfernt. Durch die Röhre wird ein Gasstrom geschickt, der, wie die spätere Fig. 5 näher zeigt, durch ein weiteres Metallgefäß eintritt und danach zwei engmaschige Drahtnetze[1]) zu passieren hat, ehe er auf die Widerstandskörper einwirkt. Die in der Zeiteinheit durch den Rohrquerschnitt hindurchgehende Gasmenge ergibt sich aus den Angaben einer oder zweier vorgeschalteter, mit bekannten Gasmengen vielfach geeichten Gasuhren. Nach Verlassen derselben hatte das Gas längere mit $CaCl_2$ angefüllte Trockenröhren zu passieren.

Um jeden störenden Einfluß von äußeren Luftströmungen auf die Angaben des Meßinstrumentes möglichst auszuschalten, ist der verlängerte Wagebalken durch ein am geschlossenen Wagekasten angebrachtes Rohrstück *R* geführt, das vorn nur einen engen Schlitz zum Durchtritt des Hebelarmes besitzt. Direkte Wirkungen des aus der vertikalen Messingröhre austretenden Gasstromes auf das oben herausragende Ende des Hebelarmes sind einerseits durch den großen Abstand der Rohröffnung von mindestens 40 cm, andererseits durch zwischengesetzte Schirme *S* mit feinen Öffnungen völlig ausgeschlossen.

Zur Ermittelung der vom strömenden Gas auf die Aluminiumkugeln ausgeübten Kraftwirkung dient ein Mikroskop mit Mikrometerteilung, das auf die Glasfadenspitze *s* des langen

1) Vgl. hierzu die Bemerkungen in Nr. 9 und 21.

Hebelarmes eingestellt wurde. Aus der Differenz der Ablesungen vor, nach und während der Strömung des Gases läßt sich die auf die Kugeln ausgeübte Kraft nach Eichung der Wage in absolutem Maß berechnen.

2. Es hat sich gezeigt, daß die Empfindlichkeit des Instrumentes für verschieden schwere Kugeln kleinen Veränderungen unterworfen war. Im Durchschnitt fand sich für 1 Skt. der Mikrometerteilung — 25,8 Teile derselben entsprachen 1 mm — ein Auftrieb von 0,00647 Dynen; wo die Empfindlichkeit von diesem Wert etwas abwich, habe ich die Ablesungen auf diese mittlere Empfindlichkeit umgerechnet. Die mit der beschriebenen Versuchsanordnung gemachten Beobachtungen zeigten in ungünstigen Fällen Schwankungen bis zu 2 Mikrometerskalenteilen, während die weit überwiegende Zahl der Ablesungen eine Genauigkeit von 1 Skt., entsprechend 0,00647 Dynen, ergab.

### Kohlensäure.

Die benutzte Kohlensäure ist direkt einer käuflichen Bombe entnommen und wird durch ihren eigenen Dampfdruck durch die Leitungen getrieben.

3. Die Versuche sind mit zwei Messingröhren von 2,4 und 3,8 cm innerer Weite ausgeführt. Die beobachteten Widerstandswerte zeigten sich unabhängig von der Eintauchtiefe der Kugeln in die Röhre, solange diese Tiefe mindestens 5 cm betrug, und auch der Aufhängefaden ließ keinen merklichen Einfluß auf die Messungsresultate erkennen, die genau dieselben waren, wenn der Faden durch einen zweiten von doppelter Dicke ersetzt wurde. Daß die äußere Reibung zwischen Kugeloberfläche und Gas praktisch als unendlich groß zu betrachten ist, ergab sich aus der Übereinstimmung der mit blank polierten und mit geschmirgelten Oberflächen gewonnenen Werte.

4. Das Endergebnis der gesamten Beobachtung, das die reine Kraftwirkung des unter den gewählten Verhältnissen strömenden Gases auf die benutzten Kugeln zum Ausdruck bringt — der beim Übergang der Kugeln von ruhender Luft in ruhende Kohlensäure eintretende Auftrieb ist für sich berücksichtigt und beeinflußt die folgenden Angaben nicht —

## Tabelle 1.

### Kohlensäure.

1 Skt. = 0,00647 Dynen.

| $r_1$ = 0,171 cm | | $r_2$ = 0,228 cm | | $r_3$ = 0,298 cm | | $r_4$ = 0,397 cm | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gasmenge $Q$ pro Sek. | Auftrieb | Gasmenge $Q$ pro Sek. | Auftrieb | Gasmenge $Q$ pro Sek. | Auftrieb | Gasmenge $Q$ pro Sek. | Auftrieb |
| ccm / Sek. | Skt. | ccm / Sek. | Skt. | ccm / Sek. | Skt. | ccm / Sek. | Skt. |
| **Röhrenweite 2,4 cm.** | | | | | | | |
| 24,6 | 4,8 | 15,7 | 3,2 | 10,1 | 2,7 | | |
| 35,8 | 8,07 | 22,4 | 4,7 | 18,8 | 6,47 | | |
| 54,0 | 12,0 | 31,5 | 8,8 | 24,1 | 7,75 | | |
| 61,6 | 15,0 | 54,2 | 17,4 | 30,5 | 12,6 | | |
| 62,8 | 15,3 | 56,9 | 17,7 | 32,6 | 13,0 | | |
| 82,7 | 19,3 | 73,8 | 25,1 | 42,9 | 19,0 | | |
| 89,1 | 21,1 | 93,9 | 34,0 | 44,0 | 19,0 | | |
| 93,2 | 22,1 | 106,8 | 37,0 | 48,7 | 21,4 | | |
| 100,0 | 25,9 | | | 59,3 | 28,6 | | |
| 100,5 | 25,0 | | | 62,2 | 29,5 | | |
| | | | | 70,5 | 35,6 | | |
| | | | | 71,9 | 35,2 | | |
| | | | | 93,5 | 49,0 | | |
| | | | | 102,5 | 52,4 | | |
| | | | | 105,5 | 55,0 | | |
| **Röhrenweite 3,8 cm.** | | | | | | | |
| 71,7 | 2,9 | 43,3 | 2,1 | 33,5 | 2,2 | 31,7 | 3,13 |
| 114,0 | 6,0 | 67,2 | 4,3 | 51,8 | 3,5 | 51,8 | 5,2 |
| 123,7 | 7,6 | 76,0 | 5,0 | 76,5 | 6,0 | 57,6 | 7,3 |
| 127,0 | 8,0 | 95,2 | 7,0 | 81,1 | 6,4 | 78,8 | 9,5 |
| 165,3 | 10,8 | 127,8 | 9,7 | 117,0 | 12,2 | 86,8 | 12,2 |
| 168,8 | 11,5 | 136,3 | 10,5 | 153,8 | 19,3 | 89,1 | 13,4 |
| 181,0 | 1 ,4 | 176,5 | 15,5 | 160,1 | 20,4 | 119,6 | 18.3 |
| 213,3 | 14,2 | 176,7 | 14,8 | 192,0 | 25,1 | 129,2 | 22,2 |
| 253,8 | 18,9 | 181,8 | 17,1 | 235,3 | 34,0 | 165,0 | 31,1 |
| 269,2 | 21,0 | 206,9 | 19,4 | 246,1 | 35,1 | 183,2 | 36,4 |
| 288,1 | 23,0 | 222,2 | 20,8 | 271,4 | 40,2 | 201,0 | 39,7 |
| 318,2 | 24,1 | 222,8 | 23,0 | 295,2 | 48,4 | 224,2 | 49,5 |
| | | 226,4 | 21,7 | 327,9 | 56,0 | 242,0 | 53,6 |
| | | 241,0 | 24,4 | 339,6 | 59,1 | 243,6 | 57,8 |
| | | 271,0 | 28,3 | | | | |
| | | 271,2 | 28,2 | | | | |
| | | 292,0 | 31,0 | | | | |
| | | 307,7 | 33,9 | | | | |

ist in der Tab. 1 zusammengestellt. Für jeden Kugelradius gibt die zweite Kolumne den durch die Gasströmung veranlaßten Auftrieb in Mikrometerskalenteilen, wie er der in der ersten Kolumne verzeichneten in der Sekunde durch den Rohrquerschnitt hindurchströmenden Gasmenge $Q$ — bei 20° C. und 760 mm Druck — entspricht. Durch Multiplikation der Zahlenwerte mit 0,00647 würde sich der Widerstand in Dynen ergeben.

5. Die mitgeteilten Zahlenwerte gestatten noch nicht ohne weiteres einen Zusammenhang zwischen dem beobachteten Widerstand und der Geschwindigkeit des Gasstromes abzuleiten, da nicht anzunehmen ist, daß die Geschwindigkeit $v$ gleichmäßig über den ganzen Rohrquerschnitt verteilt sei. Allgemein wird die in der Zeiteinheit den Querschnitt passierende Gasmenge durch

$$Q = 2\pi \int_0^R v \varrho \, d\varrho$$

dargestellt sein, wo $v$ eine Funktion des Abstandes $\varrho$ der betrachteten Stromfäden von der Rohrachse ist, die sich nur für sehr enge Röhren theoretisch angeben läßt.

6. *Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt.* Ich habe versucht, die für den gegenwärtigen Fall notwendige Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung des Gasstromes über den Rohrquerschnitt dadurch zu gewinnen, daß ich die Abhängigkeit des Auftriebes mehrerer Widerstandskörper von der in der Zeiteinheit den Querschnitt durchströmenden Gasmenge $Q$ an verschiedenen seitlich gelegenen Punkten des Querschnitts in derselben Weise ermittelt habe, wie dies oben für die Rohrachse geschehen ist. Man erhält so für jeden Punkt eine besondere Widerstandskurve, wie ich solche beispielsweise in der späteren Fig. 6 mitgeteilt habe. Das Verhältnis der jeweils zu einem bestimmten Gasvolumen $Q$ gehörigen Ordinatenwerte der einzelnen Kurven läßt dann die Geschwindigkeitsverhältnisse für die herausgewählten Querschnittspunkte berechnen, falls man für den Zusammenhang zwischen Widerstand und Geschwindigkeit gerechtfertigte Annahmen voraussetzen kann.

Die Messungen sind ausgeführt worden mit

miniumkugeln von 0,171 und 0,12 cm Radius, wozu bei der weiten Röhre noch die schon oben benutzte Kugel $r = 0{,}228$ cm hinzukam. Obwohl die absoluten Auftriebswerte, die an den einzelnen Punkten mit den verschiedenen Kugeln erhalten wurden, naturgemäß sehr wesentlich voneinander verschieden waren, zeigten doch die relativen Werte für die einzelnen Punkte so gute Übereinstimmung, daß die Vermutung, die Beobachtungsdaten könnten wesentlich von Veränderungen der Gasströmung in der Umgebung der Widerstandskörper durch die Nähe der Rohrwand beeinflußt sein, kaum merklich zuzutreffen scheint.[1]) Derartige Störungen hätten sich auch besonders deutlich in der engeren Röhre geltend machen und durch das Auftreten zu hoher[2]) Widerstandswerte in der Nähe der Wandung erkennen lassen müssen. Die erhaltenen Resultate scheinen aber, wie unten gezeigt wird, eine solche Annahme nicht zu rechtfertigen. Aber auch wenn wir in der unmittelbarsten Nähe der Rohrwand gedachte Beeinflussung zulassen, so wird diese kaum noch merklich das Hauptresultat der in Rede stehenden Versuche, die Größe der Gasgeschwindigkeit in der Rohrachse, verändern können.

Aus der beobachteten Widerstandsverteilung über den Querschnitt kann nun die Geschwindigkeitsverteilung abgeleitet werden, wenn man für den gegenwärtigen Fall der Beobachtung wenigstens die angenäherte Gültigkeit des Ergebnisses der früheren Auftriebsversuche zuläßt. Bezeichnen $K_1$ und $K_2$ die Auftriebe an zwei Punkten des Querschnittes, so wird

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{k\eta r + b\delta r^2 v_1}{k\eta r + b\delta r^2 v_2},$$

und es besteht, wie man unter Benutzung der früher gefundenen Zahlenwerte für $k$ und $b$ sieht, bei kleinen Geschwindigkeiten und kleinen Geschwindigkeitsdifferenzen $(v_1 - v_2)$ sehr nahe Proportionalität zwischen $K$ und $v$, während bei größeren Geschwindigkeiten und für die größte der drei zu diesen Messungen benutzten Kugeln die Auftriebe sich sehr nahe $v^{1,3}$ proportional erweisen.

---

1) Vgl. hierzu noch die späteren Beobachtungen Nr. 11.

2) Vgl. z. B. R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 22. p. 287. 1907.

Mit Hilfe dieser Beziehungen habe ich für eine größere Reihe von Gasmengen $Q$ die Geschwindigkeitsverteilung aus den Widerstandskurven abgeleitet. Die nachstehende Fig. 2 zeigt einige Beispiele für die Gasmengen 60 und 130 ccm/sec in der engen und 100 und 200 ccm/sec in der weiten Röhre. Man erkennt, daß ein großer Teil des Querschnittes in der Nähe der Achse nahe konstante Geschwindigkeit besitzt, die dann gegen die Wandung ziemlich schnell abfällt. Die beigezeichneten Kreuze geben zum Vergleich den parabelförmigen Abfall der Geschwindigkeit, wie er für sehr enge Röhren und kleine Geschwindigkeit bekannt ist. Die Punkte dagegen bezeichnen den Abfall in einer kubischen Parabel — die Konstante $b$ ist hier speziell der maximalen Geschwindigkeit $a$ gleich gesetzt — wie er von Darcy[1]) und Bazin[2]) für die Strömung des Wassers in weiteren Röhren gefunden ist.

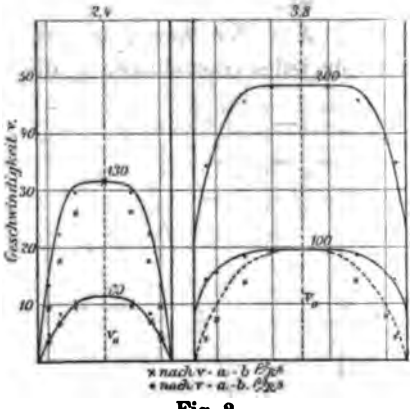


Fig. 2.

Wie die Figur erkennen läßt, stimmt die für die enge Röhre gefundene Geschwindigkeitsverteilung der Kohlensäureströmung sehr nahe mit den eben genannten Fällen überein, und zwar deckt sich bei kleinen Geschwindigkeiten der Abfall gut mit der quadratischen, bei größeren Geschwindigkeiten sehr nahe mit der kubischen Parabel. Würde unsere experimentelle Kurve merklich durch die oben betrachtete Beeinflussung des Widerstandes durch die Wand gefälscht sein, so würde die ungefälschte Kurve einen rascheren Abfall gegen die Wände zeigen müssen, und man hätte das sehr unwahrscheinliche Ergebnis, daß der Einfluß der Wände in weiteren Röhren ein stärkerer wäre als in engen, für welche das parabolische Gesetz gilt. In der 3,8 cm weiten Röhre weicht der

1) H. Darcy, Mém. prés. par div. sav. 15. 1858.
2) H. Bazin, Mém. prés. par div. sav. 32. 1902.

Abfall der Geschwindigkeit von der speziellen kubischen Parabel, die gestrichelt gezeichnet ist, merklich ab; es würde aber bei passender Wahl des Faktors $b$, etwa $0{,}384 \cdot a$, an alle mit dieser Röhre für variable $Q$ gefundenen Geschwindigkeitsverteilungskurven guter Anschluß zu gewinnen sein, wie durch die mit diesem Faktor berechneten Punkte der weiten Röhre gezeigt wird.

7. Aus der bekannten Geschwindigkeitsverteilung kann nun für jedes Gasvolumen $Q$ die in der Rohrachse vorhandene

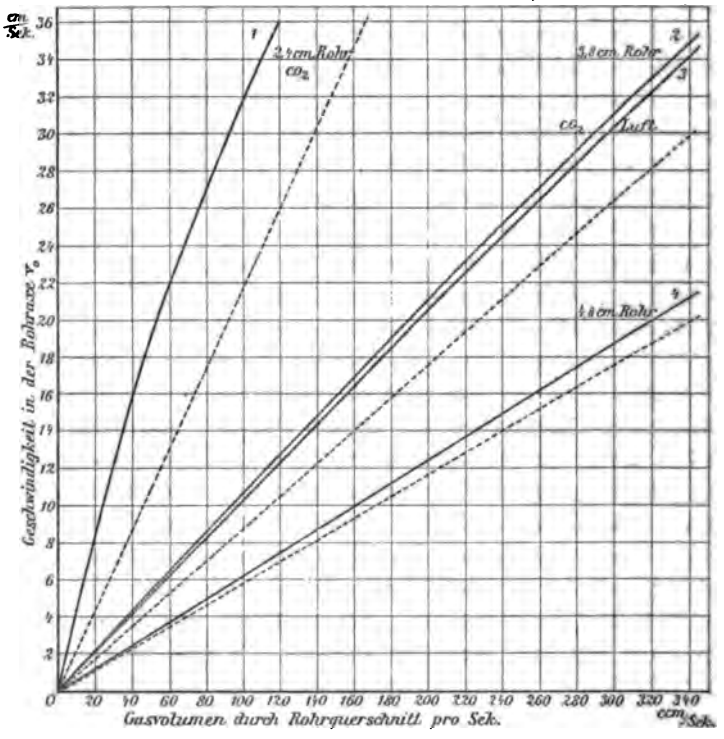



Fig. 3.

maximale Geschwindigkeit des Gasstromes durch ein einfaches graphisches Verfahren ermittelt werden. Das Resultat ist in Fig. 3 verzeichnet, in welcher die Ordinaten der Kurven 1 und 2 die Geschwindigkeit in der Umgebung der Rohrachse angeben, wenn die als Abszissenwerte aufgetragenen Gasmengen $Q$ in der Zeiteinheit durch den Querschnitt strömen.

Die gestrichelten Geraden würden dem Fall entsprechen, daß die Gasgeschwindigkeit über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilt wäre.

8. Diese neu gewonnene Beziehung ermöglicht es nun, mit Benutzung der in Tab. 1 gegebenen unmittelbaren Beobachtungswerte Kenntnis zu gewinnen von dem Zusammenhang zwischen Widerstand und Geschwindigkeit. In Fig. 4 ist dieser

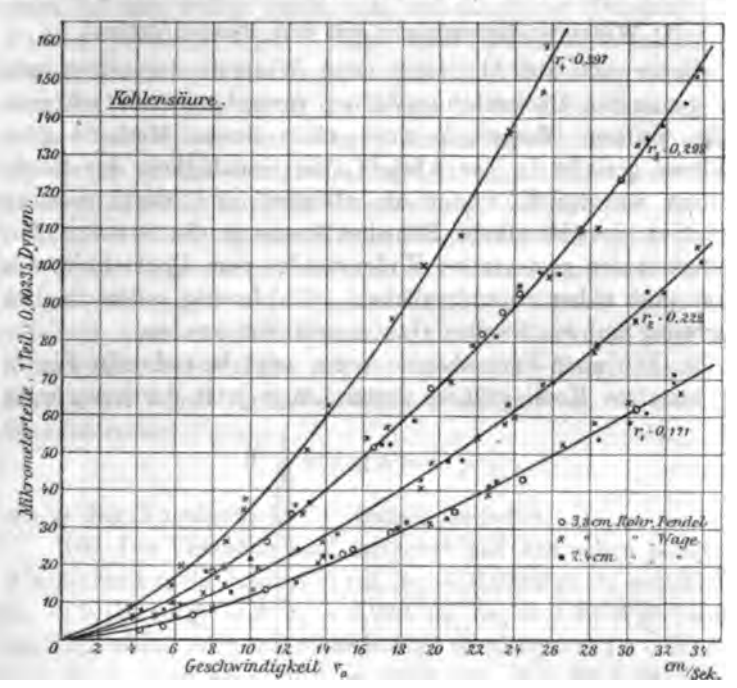



Fig. 4.

Zusammenhang anschaulich gemacht. Die Abszissenwerte stellen die Gasgeschwindigkeit in der Rohrachse dar; die Ordinaten geben den beobachteten Widerstand in einem Maßstab, der den Vergleich der Resultate mit dem Ergebnis späterer Beobachtung erleichtern soll. Die Größe der Unsicherheit der Einzelwerte geht aus deren Abweichung von den durch die ausgezogenen Kurven gegebenen Mittelwerten hervor. Die durch kleine Ringe markierten Angaben sollen zunächst noch ausgeschaltet bleiben.

Man erkennt aus den durch Punkte und Kreuze bezeichneten Daten einen befriedigenden Anschluß der mit der 2,4 und der 3,8 cm weiten Röhre gefundenen Widerstände aneinander. Ein sehr wesentlicher Einfluß der Begrenzung des Gasstromes auf das Resultat scheint hiernach nicht vorzuliegen; nur bei kleinen Geschwindigkeiten scheinen die mit der engeren Röhre gemachten Versuche etwas größeren Widerstand zu liefern.

### II. Widerstandsmessungen mit dem Pendel (statisch).

Bevor ich die Ableitung eines Widerstandsgesetzes aus den genannten Beobachtungswerten versuchte, habe ich eine Reihe weiterer Messungen nach einer neuen Methode auszuführen gesucht in der Absicht, die Genauigkeit der Beobachtung womöglich weiter zu steigern und durch weitere Variation des benutzten Rohrdurchmessers die etwaige Abhängigkeit des gemessenen Widerstandes vom Querschnitt des Gasstromes näher zu untersuchen. Gleichzeitig sollte die Beobachtung auf ein zweites Gas ausgedehnt werden.

9. Die neue Versuchsanordnung zeigt beistehende Fig. 5. Die benutzte Messingröhre, deren Länge jetzt durchweg etwa

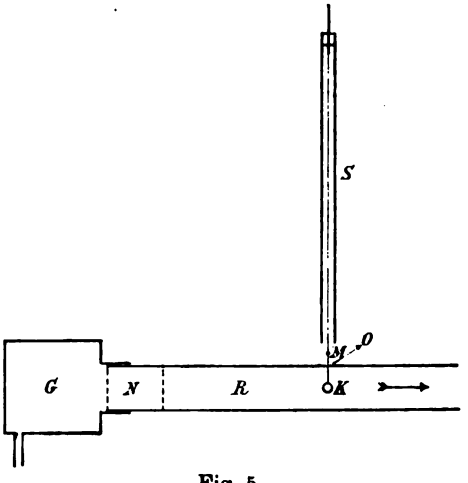



Fig. 5.

1 m beträgt, ist horizontal gelegt. Der Gasstrom tritt zunächst in ein zur Beruhigung der Gasbewegung vorgeschaltetes weites Metallgefäß $G$ und muß vor Eintritt in die Versuchs-

röhre wieder, wie früher schon erwähnt, zwei engmaschige Drahtnetze $N$ passieren. Etwa in der Mitte der Rohrlänge besitzt die Rohrwand oben eine 0,7 cm weite Öffnung $O$, durch welche die zur Widerstandsmessung benutzten Kugeln an einem 1 m langen, 0,01 mm dicken Glasfaden in die Achse der Röhre gehängt werden konnten. Die Öffnung ließ sich darauf durch aufgelegte Metallstreifen soweit verengern, daß nur noch ein etwa 0,5 mm weiter Spalt zum unbehinderten Durchtritt des Fadens bestehen blieb. Kurz über der Röhre erhielt der Faden eine kleine Marke $M$, auf die mit Mikroskop eingestellt wurde. Wird nun durch die Röhre in der Zeiteinheit ein wie früher gemessenes Gasvolumen hindurchgeschickt, so erfährt die zuvor vertikal hängende Kugel eine in Richtung der Rohrachse erfolgende seitliche Verschiebung, die sich aus der seitlichen Verschiebung der Marke $M$ auf der Mikrometerteilung des Mikroskopes ermitteln und zur Berechnung der auf die Kugel wirkenden ablenkenden Kraft verwenden läßt. Bezeichnet man nämlich den Abstand der Marke $M$ vom Aufhängepunkt des Fadens mit $L$, die seitliche Verschiebung der Marke mit $l$ und den Ablenkungswinkel mit $\alpha$, so wird der Gaswiderstand

$$W = m g \operatorname{tg} \alpha = m g \frac{l}{L},$$

wo $m$ das Kugelgewicht in Gramm bedeutet.

10. Die Versuche sind zunächst mit den schon benutzten Aluminiumkugeln $r_1 = 0{,}171$ cm ($m_1 = 0{,}0592$ g), $r_2 = 0{,}228$ cm ($m_2 = 0{,}13716$ g) und $r_3 = 0{,}298$ cm ($m_3 = 0{,}3076$ g), später zur Ergänzung noch mit einer hohlen Glaskugel von $r = 0{,}28$ cm ($m = 0{,}03465$ g) ausgeführt worden. Da $L = 95{,}7$ cm betrug, ergab sich für die eine Verschiebung von einem Skalenteil der Mikrometerteilung hervorrufende Widerstandskraft[1]), im Rohrinnern auf die Kugel ausgeübt, der Wert $0{,}03967 . m$, d. i. für die kleinste Aluminiumkugel $r_1$ 0,00235 Dynen, für die leichtere Glaskugel sogar nur 0,001375 Dynen.

Die Empfindlichkeit der neuen Anordnung ist hiernach, wie man sieht, wenigstens bei den leichten Widerstandskörpern, sehr merklich größer als früher. Es kommt für die neuen

1) Die Elastizität des Glasfadens verschwindet gegenüber den hier wirksamen Kräften völlig.

Versuche begünstigend hinzu, daß sich die Einstellung des Glasfadens besonders in den mit Luft ausgeführten Beobachtungen durchweg mit solcher Regelmäßigkeit vollzog und daß jede Schwankung in der seitlichen Verschiebung der Kugel durch den Gasstrom — besonders auch infolge der Abschirmung des ganzen Glasfadens gegen äußere Luftströmungen durch die Glasröhre $S$ — so geringfügig war, daß noch die Zehntel der Mikrometerskala mit völliger Genauigkeit ablesbar wurden. Die Sicherheit der direkten Beobachtung erreicht dadurch bei der kleinsten Aluminiumkugel erst eine Grenze bei Kräften, die kleiner sind als 0,0002 Dynen, bei der benutzten Glaskugel erst bei 0,00015 Dynen; die Unsicherheit nimmt mit dem Kugelgewicht zwar diesem proportional zu, aber der prozentische Fehler des Widerstandes dürfte auch dann noch gegenüber der Wägung merklich geringer sein.

Freilich wird der durch die Beobachtung erstrebten Kenntnis des Zusammenhanges zwischen Gasgeschwindigkeit und Widerstand eine erheblich geringere Sicherheit zukommen, als den Resultaten der unmittelbaren Beobachtung, da auch jetzt wieder das Endergebnis der Untersuchung von dem durch besondere Versuche zu ermittelnden Zusammenhang zwischen durchströmendem Gasvolumen und Gasgeschwindigkeit in der Rohrachse abhängen wird.

11. Dieser Zusammenhang ist in ähnlicher Weise wie früher dadurch ermittelt worden, daß die beiden Aluminiumkugeln 0,12 und 0,171 cm Radius durch Heben oder Senken des Glasfadens an beliebige Orte des Rohrquerschnittes gebracht und für diese Punkte Widerstandskurven aufgesucht wurden. Die beigefügte Fig. 6 zeigt einige dieser Kurven für Luftströmung in der 3,8 cm-Röhre und die 0,171 cm-Kugel, wenn dieselbe nacheinander an die Punkte $a$, $b$, $c$ und $d$ des Rohrquerschnittes gebracht war. Das Verhältnis der Ordinaten der $a$- und $b$-Kurve stellt den Einfluß des bis zur Rohrachse hängenden Glasfadenstückes auf den gemessenen Gesamtwiderstand dar. Dieser Anteil ist aus dem Vergleich der mit den beiden Kugeln erhaltenen Einzelwerte untereinander und aus den für zusammengehörige symmetrisch zur Achse gelegene Punkte gefundenen Widerstandswerte zu berechnen, nachdem durch besondere Versuche ermittelt worden war, daß Spalt-

öffnungen an der Eintrittsstelle des Fadens bis 0,5 mm Breite keinen nachweisbaren Einfluß auf die Gasströmung im Rohrinnern ausübten.

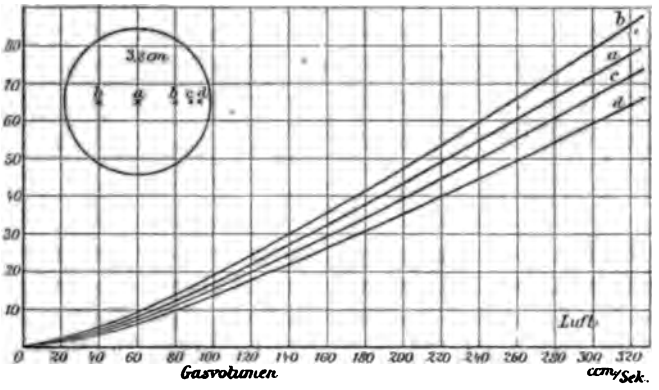



Fig. 6.

Zur weiteren Sicherstellung, daß die gefundenen Beziehungen tatsächlich im Sinne der Geschwindigkeitsverteilung zu deuten seien, habe ich schließlich an zwei dünnsten Glasfäden ein kleines unregelmäßiges Platinscheibchen von etwa 0,24 cm² Fläche quer gegen den Gasstrom an verschiedene Orte des Rohrquerschnittes gehängt und den beobachteten Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeiten proportional vorausgesetzt, gestützt auf besondere in der Rohrachse angestellte Widerstandsmessungen und auf ähnliche Beobachtungen der vorhergehenden Arbeit. Es ergab sich dann eine befriedigende Übereinstimmung aller mit den drei verschiedenen Widerstandskörpern gefundenen Geschwindigkeitsverteilungskurven.[1])

### Kohlensäure.

12. Die neuen Versuche mit Kohlensäure beschränken sich auf die 3,8 cm-Röhre und die Aluminiumkugeln $r_1 = 0{,}171$ und $r_3 = 0{,}298$ cm, da sie nur eine Prüfung der früher erhaltenen Resultate geben sollten. Die neuen Ergebnisse seien

1) Versuche, die Geschwindigkeitsverteilung aus Druckmessungen abzuleiten, führen bei den benutzten kleinen Geschwindigkeiten zu keinem Resultat.

deshalb sogleich in ihrer endgültigen Form, d. h. die nach Abzug des Fadeneinflusses verbleibenden Kugelwiderstände in ihrer Abhängigkeit von der Gasgeschwindigkeit in der Rohrachse, mitgeteilt. Sie sind in der früheren Kurvenzeichnung 4 mit o eingetragen und liefern, wie man sieht, eine sehr befriedigende Bestätigung der alten Werte, die damals schon, wie bemerkt wurde, in dem für die jetzigen Versuche geeigneten Ordinatenmaßstab aufgezeichnet wurden.

### Luft.

13. Die Luft wurde von einem großen Gasometer mit geeignet belasteter Glocke geliefert und ebenso wie die Kohlensäure mit Gasuhren gemessen und vor dem Eintritt in die Versuchsröhre durch Chlorcalcium getrocknet. Zur Begrenzung des Luftstromes wurden zwei Messingröhren von 3,8 und 4,8 cm (genauer 4,78) Durchmesser gewählt. Die Geschwindigkeitsverteilung der Luft in diesen Röhren ist durch die Kurven 3 und 4 der früheren Fig. 3 gegeben. Wie man sieht, schließt sich die Kurve 3 der mit der früheren Wägemethode erhaltenen Kurve 2 für Kohlensäure sehr nahe an. Als Widerstandskörper sind zunächst die früheren Aluminiumkugeln $r_1 = 0{,}171$, $r_2 = 0{,}228$ und $r_3 = 0{,}298$ cm benutzt worden. In der nachstehenden Tab. 2 sei das mit ihnen gewonnene direkte Beobachtungsmaterial zusammengestellt. Die zweite Kolumne bezeichnet jeweils die seitliche Verschiebung der Marke $M$ in Mikrometerteilen, welche bei dem in der ersten Kolumne angegebenen in der Zeiteinheit durch den Querschnitt strömenden Gasvolumen $Q$ beobachtet ist; der Einfluß des Glasfadens ist noch nicht in Abzug gebracht.

14. Der Zusammenhang zwischen Widerstand und Gasgeschwindigkeit, wie er sich aus der nachstehenden Tab. 2 mit Benutzung der in den Kurven 3 und 4 der Fig. 3 gegebenen Geschwindigkeitsverteilung ergibt, ist in der beistehenden Fig. 7 enthalten, in welcher die für jede Aluminiumkugel geltenden Widerstände auf gleiche Empfindlichkeit der Meßvorrichtung — 1 Teil = 0,00235 Dynen — umgerechnet sind. Wie man sieht, passen sich die Beobachtungswerte sehr befriedigend den ausgezeichneten Kurven an, so daß der Verlauf der letzteren

## Tabelle 2.

### Luft.

| $r_1 = 0{,}171$ cm<br>1 Skt. = 0,00235 Dynen | | $r_2 = 0{,}228$ cm<br>1 Skt. = 0,005436 Dynen | | $r_3 = 0{,}298$ cm<br>1 Skt. = 0,0122 Dynen | |
|---|---|---|---|---|---|
| Gasmenge $Q$ pro Sek. $\frac{\text{ccm}}{\text{Sek.}}$ | Seitliche Verschiebung Skt. | Gasmenge $Q$ pro Sek. $\frac{\text{ccm}}{\text{Sek.}}$ | Seitliche Verschiebung Skt. | Gasmenge $Q$ pro Sek. $\frac{\text{ccm}}{\text{Sek.}}$ | Seitliche Verschiebung Skt. |
| **Röhrenweite 3,8 cm.** | | | | | |
| 22,1 | 2,3 | 51,2 | 3,8 | 39,4 | 2,0 |
| 31,1 | 3,6 | 62,7 | 5,2 | 54,2 | 2,6 |
| 33,1 | 3,9 | 68,3 | 5,7 | 67,4 | 3,7 |
| 50,7 | 6,6 | 90,4 | 8,7 | 93,8 | 5,6 |
| 86,6 | 13,4 | 97,6 | 9,5 | 119,6 | 8,0 |
| 94,4 | 14,9 | 111,8 | 11,6 | 138,5 | 9,5 |
| 113,9 | 19,8 | 115,5 | 11,5 | 172,6 | 12,4 |
| 135,4 | 25,3 | 140,0 | 16,5 | 179,5 | 13,8 |
| 151,8 | 30,3 | 146,4 | 16,2 | 205,9 | 16,5 |
| 177,2 | 37,2 | 190,4 | 24,0 | 231,4 | 19,8 |
| 205,9 | 45,2 | 219,7 | 29,0 | 253,5 | 21,8 |
| 223,1 | 49,5 | 225,7 | 30,0 | 274,1 | 23,6 |
| 259,8 | 60,4 | 269,2 | 36,2 | 301,0 | 27,3 |
| 280,6 | 65,2 | 302,6 | 42,6 | 315,7 | 28,7 |
| 321,3 | 78,2 | 329,0 | 48,0 | 349,1 | 32,4 |
| 335,6 | 83,0 | 345,4 | 50,5 | 354,7 | 34,3 |
| **Röhrenweite 4,8 cm.** | | | | | |
| 28,9 | 2,1 | 99,6 | 4,95 | | |
| 54,5 | 4,9 | 120,7 | 6,4 | | |
| 73,2 | 7,1 | 142,0 | 7,5 | | |
| 93,2 | 9,5 | 179,9 | 10,6 | | |
| 102,5 | 10,9 | 210,0 | 13,7 | | |
| 137,9 | 15,9 | 245,9 | 16,8 | | |
| 172,0 | 20,9 | 263,8 | 18,5 | | |
| 177,4 | 20,4 | 305,1 | 22,8 | | |
| 206,9 | 26,2 | 343,7 | 26,9 | | |
| 231,9 | 29,7 | | | | |
| 272,4 | 36,0 | | | | |
| 320,0 | 42,4 | | | | |
| 350,6 | 47,1 | | | | |

kaum an irgend einer Stelle zweifelhaft geblieben ist innerhalb eines Geschwindigkeitsbereiches von etwa 4—35 cm/sec.

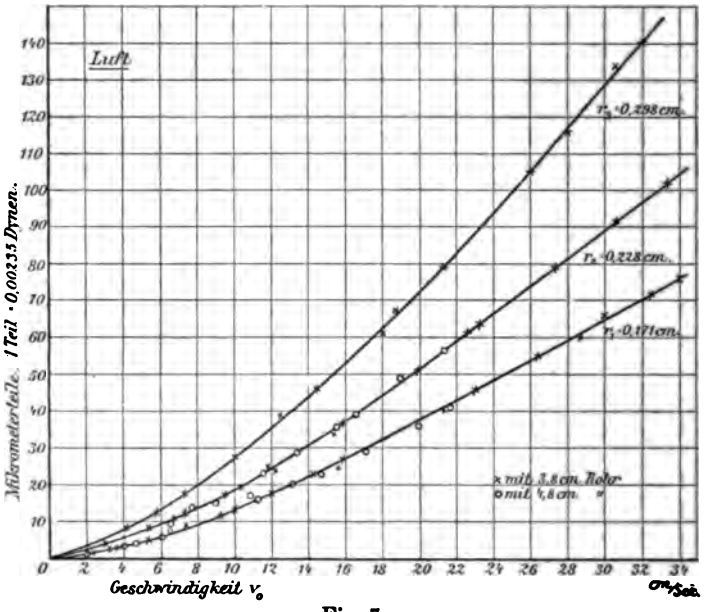



Fig. 7.

15. Da aber die Widerstandswerte unterhalb 4 cm/sec infolge ihrer geringen Größe kaum noch sehr große Genauig-

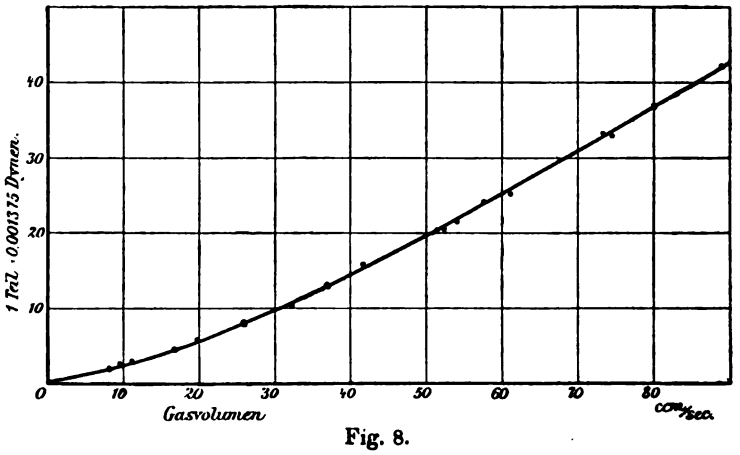



Fig. 8.

keit beanspruchen können, habe ich versucht, mit einer leichten Glaskugel als Widerstandskörper dieses Gebiet kleinster Geschwindigkeit noch genauer zu untersuchen. Wie schon erwähnt, betrug der Kugelradius 0,28 cm, das Kugelgewicht 0,03465 g, so daß 1 Skt. der Mikrometerteilung einer Widerstandskraft von 0,001375 Dynen entsprach, die noch auf etwa 15 Proz. genau angebbar war.

Die für den Luftstrom in der 3,8 cm weiten Messingröhre erhaltenen Fadenverschiebungen in ihrer Abhängigkeit vom Gasvolumen $Q$ zeigt Fig. 8. Der gesuchte Zusammenhang hat sich, wie man sieht, bis zur Geschwindigkeit 1 sicher verfolgen lassen.

### III. Das Widerstandsgesetz.

16. Durch die mitgeteilten Versuche ist der Widerstand für Gasströmung in drei verschieden weiten Röhren gemessen worden. Während die engste Röhre, für welche das Verhältnis von Kugel- und Röhrenradius zwischen $^1/_4$ und $^1/_7$ liegt, insbesondere bei kleineren Geschwindigkeiten merklich höhere Widerstandswerte liefert, ist eine Abweichung der mit den beiden weiteren Röhren erhaltenen Werte untereinander nicht mehr zu konstatieren, so daß mit einiger Sicherheit wohl anzunehmen ist, daß die Beobachtung in diesen Fällen nicht wesentlich durch die bestimmte Wahl der Versuchsröhren beeinflußt sein wird und daß die Gültigkeit des in den Beobachtungsresultaten etwa enthaltenen Widerstandsgesetzes deshalb eine allgemeine ist.[1]) Ein solches Gesetz aus den Versuchsdaten abzuleiten, war daher die nächste Aufgabe.

17. Man überzeugt sich leicht, daß ein quadratisches Gesetz den Beobachtungswerten ebensowenig genügt wie ein lineares, daß aber die Kohlensäurekurven dem ersteren sich mehr nähern als die Luftkurven. Es liegt deshalb nahe, auch bei diesen kleineren Geschwindigkeiten die Gültigkeit des in der vorhergehenden Arbeit gefundenen Gesetzes

$$W = k\eta r v + \tfrac{1}{3}\pi\gamma\delta r^2 v^2$$

vorauszusetzen und zur Prüfung die für bekannte $\eta$, $\delta$, $r$ und $v$ sich ergebenden Faktoren $k$ und $\frac{1}{3}\pi\gamma = b$ zu ermitteln.

1) Vgl. hierzu noch Nr. 21.

Werden sämtliche für die Abhängigkeit des Widerstandes von der Strömungsgeschwindigkeit erhaltenen Versuchsdaten für jeden Radius getrennt in obiger Richtung nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgewertet und dann die gefundenen Zahlenwerte für $k$ und $b$ in die obige Gleichung eingesetzt, so zeigen die so berechneten Widerstände gegenüber den beobachteten Größen eine systematische Abweichung. Dieselbe scheint bei den einzelnen Kugelradien nicht merklich verschieden und nur von der Geschwindigkeit beeinflußt zu sein, indem die berechneten Werte bei den kleinsten Geschwindigkeiten zu groß, bei den größeren Geschwindigkeiten zu klein ausfielen.

Um diesen Einfluß der Geschwindigkeit möglichst zu fixieren, habe ich die Faktoren $k$ und $b$ nunmehr nach der Methode der kleinsten Quadrate aus Gruppen von solchen Beobachtungsdaten getrennt berechnet, für welche die Gasgeschwindigkeit jeweils nicht mehr als 5 cm/sec verschieden war. Dabei ergab sich eine kontinuierliche Abnahme der $k$-Werte mit abnehmender Geschwindigkeit, während die Größe $b$ weder mit der Geschwindigkeit noch mit dem Radius einen merklichen Gang zeigte. Es wurde deshalb für jedes Gas einzeln aus sämtlichen gefundenen $b$-Werten — jeweils etwa 40 an der Zahl — das Mittel genommen und hiermit nach Einsetzen in die obige Widerstandsformel für jedes $v$ und entsprechend beobachtetes $W$ die Größe $k$ berechnet. Das Resultat sei für jedes der beiden Gase nachstehend getrennt angegeben.

### Kohlensäure.

18. Mit den Werten $\eta_{20°} = 0{,}000148$[1]) [g cm$^{-1}$ sec$^{-1}$] und $\delta_{20°} = 0{,}000182$ [g cm$^{-3}$] wurde nach dem genannten Rechenverfahren die Konstante $b$ zu 0,987 gefunden; der hieraus für die Newtonsche Konstante sich ergebende Wert $\gamma = 0{,}236$ zeigt sich nicht wesentlich verschieden von dem entsprechenden Resultat der vorhergehenden Arbeit[2]) und stimmt nahe überein mit den alten Beobachtungen von Borda.

1) P. Breitenbach, Wied. Ann. 67. p. 803. 1899.
2) Dort zu $1{,}024 : \frac{1}{4}\pi = 0{,}244$ gefunden.

Das mit Benutzung dieses Wertes aus den beobachteten Widerständen erhaltene die Größe $k$ betreffende Resultat ist, wie die beistehende Fig. 9 für jeden Kugelradius getrennt zeigt, das folgende:

Die Größe $k$ übersteigt sehr merklich den Zahlenfaktor $6\pi$ des Stokesschen Widerstandsgesetzes. Sie ist im übrigen nicht konstant, sondern wesentlich abhängig von der Gasgeschwindigkeit. Von einem bei etwa 40 cm/sec für wachsende Geschwindigkeiten nahe Konstanz erreichenden Wert von etwa 125 fällt sie mit abnehmender Geschwindigkeit erst

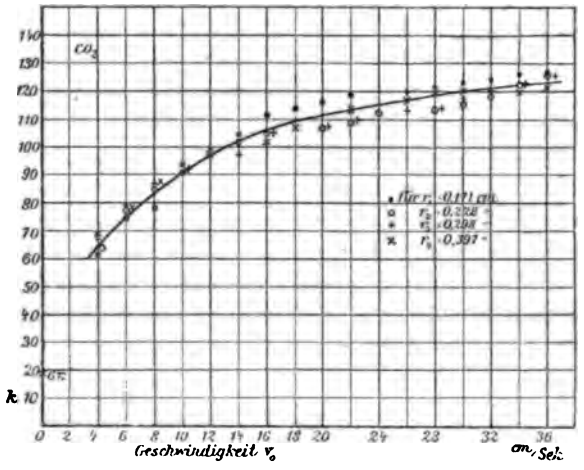



Fig. 9.

langsam, dann schneller ab und besitzt bei 4 cm/sec nur noch etwa den Wert 60. Es besteht sonach eine mit abnehmender Geschwindigkeit unverkennbare Annäherung des Zahlenfaktors an den Stokesschen Wert $6\pi$, der aber bei 4 cm/sec noch lange nicht erreicht ist und nach dem Lauf der Kurve auch erst bei den allerkleinsten Geschwindigkeiten wohl erreicht werden könnte. Es ist dies kaum verwunderlich, wenn wir beachten, daß die früher genannte Rayleighsche Bedingung für die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes, daß $v\,\delta\,r$ klein sei gegen $\eta$, erst für solche Werte von $v$ annähernd zutrifft, die sehr wesentlich unter 0,5 cm/sec liegen.

Eine Abhängigkeit des Wertes $k$ von den Dimensionen

der Kugeln macht sich bei den größeren der benutzten Geschwindigkeiten nicht unzweifelhaft bemerkbar. Dagegen scheint bei kleineren Geschwindigkeiten eine systematische Abweichung für die einzelnen Kugelradien zu bestehen, dermaßen, daß die Annäherung an den Stokesschen Faktor um so langsamer zu erfolgen scheint, je größer der Kugelradius ist.

Luft.

19. Die Werte $\eta_{20} = 0{,}0001837$ [g cm$^{-1}$ sec$^{-1}$][1]) und $\delta_{20} = 0{,}0012$ [g cm$^{-3}$] ergeben für die Konstante $b = 0{,}961$ oder für den Newtonschen Faktor $\gamma = 0{,}229$, der sich von dem entsprechenden Wert bei Kohlensäure nicht wesentlich unterscheidet.

Das die Größe $k$ betreffende Resultat wird aus Fig. 10 ersichtlich. Der Lauf der Kurve ist demjenigen der Kohlen-

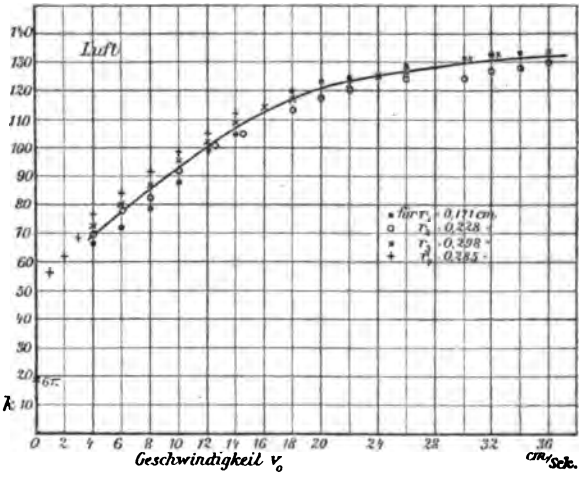



Fig. 10.

säure sehr ähnlich, indem sich wieder eine deutliche Annäherung der Zahlenwerte an den Stokesschen Faktor mit abnehmender Geschwindigkeit erkennen läßt, die hier bis zur Geschwindig-

1) Für 20° berechnet nach den Angaben von: J. Puluj, Wien. Ber. **77.** p. 33. 1878 ($\eta_{17°} = 1830.10^{-7}$); P. Breitenbach, Wied. Ann. **67.** p. 803. 1899 ($\eta_{15°} = 1807.10^{-7}$); H. Schultze, Ann. d. Phys. **5.** p. 140. 1901 ($\eta_{15°} = 1811.10^{-7}$); F. Kleint, Diss. Halle. 1904 ($\eta_{15°} = 1810.10^{-7}$).

keit 1 cm/sec verfolgbar ist. Der Wert von $k$ fällt zwischen den Geschwindigkeiten 4 und 1 von 76 auf 55 herab, weicht aber doch noch sehr merklich von $6\pi$ ab, so daß der größte Abfall der Kurve innerhalb des kleinen Geschwindigkeitsintervalles von 0—1 cm/sec zu erwarten wäre.

Entsprechend den bei Kohlensäure gemachten Beobachtungen besteht auch hier bei kleineren Geschwindigkeiten eine um so langsamere Annäherung an $6\pi$, je größer der Kugelradius ist.

20. Für die Strömungsverhältnisse in der Umgebung unserer Kugeln und deren Einfluß auf den beobachteten Widerstand ergeben sich durch die mitgeteilten Beobachtungen folgende mit der sonstigen Kenntnis, wie mir scheint, wohl übereinstimmende Vorstellungen:

Es sei zunächst ein unbegrenzter, mit sehr kleiner und in allen Punkten konstanter Geschwindigkeit sich bewegender Gasstrom vorausgesetzt. Durch eine sehr kleine in diesen Gasstrom gebrachte ruhende Kugel erfahren die einzelnen Stromfäden kleine Verschiebungen gegen ihre Anfangslage, ihre Geschwindigkeit nimmt gegen die ruhende Oberfläche hin kontinuierlich bis zu Null ab, und der Widerstand, den die Kugel dem Gasstrom entgegensetzt, ist als Folge der inneren Reibung an benachbarten Stromfäden durch das Stokessche Gesetz erschöpfend dargestellt.

Mit zunehmender Geschwindigkeit verlassen die Gasschichten teilweise ihre relative Lage, sie durchdringen sich und grenzen mit endlichen Geschwindigkeitsdifferenzen aneinander. Das Auftreten dieser Diskontinuitätsflächen, begünstigt nicht nur durch wachsende Gasgeschwindigkeit, sondern auch durch die zunehmende Größe und Unregelmäßigkeit der Form der Widerstandskörper, verursacht einerseits eine merkliche Steigerung der für den Widerstand maßgebenden inneren Reibung — so daß der Stokessche Faktor wächst — und läßt andererseits infolge Begünstigung der Wirbelbildung das Newtonsche Widerstandsgesetz an Bedeutung gewinnen, das mit wachsender Diskontinuität der Gasbewegung die Widerstandsverhältnisse mehr und mehr überwiegend beschreiben wird.

21. Wenn zwar die mitgeteilten Beobachtungen diesen Vorstellungen entsprechen, so bedarf es doch noch der Be-

seitigung einiger wesentlicher Bedenken gegen ihre Verwendbarkeit zur Ableitung derartiger allgemeiner Schlüsse. Es war zunächst ein gleichförmiger Gasstrom für die Beobachtung der Widerstandsverhältnisse vorausgesetzt. Etwa schon vor Einführung der Kugeln in das Gas vorhandene Diskontinuitäten müßten das Versuchsergebnis in willkürlicher Weise beeinflußt haben. Besondere in dieser Hinsicht angestellte Versuche sprachen nun durchaus für das Bestehen einer wirbelfreien Strömung in den benutzten Röhren. Diese Strömung ließ sich durch Einblasen von Rauch in das bewegte Gas bei Benutzung von Glasröhren, welche den sonst gebrauchten Messingröhren genau nachgebildet waren, direkt als gleichförmig erkennen[1]) und auch die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt ließ sich an den einzelnen Rauchfäden deutlich wahrnehmen. Für gleichförmige Strömung spricht auch die völlige Unabhängigkeit des Widerstandes von dem Ort der Kugel in der Röhre, falls nur die Nähe der Achse gewahrt blieb.

Der Einwand, welcher eine Störung der Ergebnisse in der Begrenzung des Gasstromes sieht, ist für die engste benutzte Messingröhre, wie die Versuche direkt zeigen, jedenfalls berechtigt. Dagegen scheint es nach den oben gegebenen Vorstellungen nicht notwendig, die in den weiteren Röhren bei kleinen Geschwindigkeiten beobachtete Zunahme der $k$-Werte mit wachsendem Kugelradius auf eine wesentliche Beeinflussung des Widerstandes durch die Rohrwand zurückzuführen, um so weniger, als sich die zwei verschieden weiten Röhren in dieser Hinsicht nicht merklich verschieden verhielten. Es läßt sich dies mit den sonst gemachten Beobachtungen[2]) wohl durch die Annahme vereinen, daß die durch die Widerstandskörper verursachten Diskontinuitäten überwiegend an deren direkte Umgebung gebunden sein werden, und daß deren Einfluß auf den Widerstand praktisch nicht sehr wesentlich durch die Reibung entfernterer Gasschichten, da diese von niedrigerer Größenordnung ist, modifiziert werden wird.

1) Bei Röhren mit merklich größerer Weite wäre Gleichförmigkeit der Strömung weniger leicht erreichbar gewesen; vgl. O. Reynolds, Phil. Trans. 174. p. 935. 1883.

2) Vgl. R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 22. p. 287. 1907.

22. Mit dem Ergebnis unserer Versuche läßt sich gut eine Beobachtung von Hrn. Bödecker[1]) vereinigen, der aus Dämpfungsmessungen an einer sehr langsam schwingenden Kugel im freien Luftraum auf die Proportionalität zwischen Geschwindigkeit und Widerstand schloß, den letzteren aber bei 0,15 cm/sec Geschwindigkeit noch etwas mehr als doppelt so hoch fand, als dem Stokesschen Gesetz entsprechen würde. Auch einige mir nach Schluß dieser Arbeit von Hrn. Lenard gütigst zur Verfügung gestellte nicht veröffentlichte Resultate einer photographischen Fixierung der Fallbewegung von Wassertropfen in Luft stehen mit dem neu gefundenen Widerstandsgesetz nicht in Widerspruch. Bei Fallbewegungen nicht gerade sehr kleiner Körper allerdings überwiegt schon nach kürzester Fallzeit der Newtonsche Ausdruck für den Widerstand infolge der raschen Geschwindigkeitszunahme so sehr das Reibungsglied (der auf Reibung kommende Widerstand einer freifallenden Kugel von 0,5 cm Radius beträgt nach 1 Sek. Fallzeit nur noch 4 Proz. des Gesamtwiderstandes), daß der Widerstand in den meisten solchen Fällen mit sehr großer Annäherung allein durch die Newtonsche Formel dargestellt werden kann.

Kiel, Ende März 1907.

---

1) E. Bödecker, Diss. Göttingen. 1881.

(Eingegangen 19. Juli 1907.)

## 4. *Die Beeinflussung der Ergebnisse luftelektrischer Messungen durch die festen radioaktiven Stoffe der Atmosphäre;* von *Karl Kurz.*

(Auszug aus der Gießener Dissertation.)

### A. Einleitung.

Auf die vorliegenden Beobachtungen wurde ich geführt bei Untersuchungen über die festen radioaktiven Substanzen in der Atmosphäre, über die demnächst an anderer Stelle berichtet werden soll. Es handelte sich dabei zunächst um eine Untersuchung der radioaktiven Substanzen, die sich auf einem im Freien ausgespannten, negativ geladenen Draht niederschlagen.[1]) Eine Variation der Expositionszeit (Zeit, während der der Draht im Freien ausgespannt war) und der Expositionsspannung (Spannung, auf der der Draht während der Expositionszeit gehalten wurde) ergab folgendes: Die ionisierende Wirkung der auf dem Draht angesammelten Zerfallsprodukte läßt sich nach dem Einholen des Drahtes in einem Blattelektrometer *mehrere Stunden* hindurch verfolgen, wenn der Draht *ohne* angelegte Spannung mehrere Stunden, oder bei verhältnismäßig *niederer negativer* Spannung, wenigen Hundert Volt, einige Minuten, oder bei *höherer negativer* Spannung, einigen Tausend Volt, wenige Sekunden lang exponiert war. Bei angelegter positiver Spannung erhält man keinen derartigen Effekt.

Diese Tatsachen führten wegen der Größe der beobachteten Ionisierung, also wegen der Menge der bei diesen Expositionszeiten und Expositionsspannungen angesammelten radioaktiven Substanzen, zu der Überlegung, daß durch einen solchen Niederschlag eine Beeinflussung der Resultate bei Zerstreuungsmessungen, bei Leitfähigkeitsmessungen, bei Ionenzählungen,

1) J. Elster u. H. Geitel, Physik. Zeitschr. 3. p. 305—320. 1902.

bei Bestimmung der Ionengeschwindigkeiten in der Atmosphäre statthaben muß. Denn bei allen derartigen Untersuchungen beobachtet man das Wandern des Aluminiumblättchens eines Blattelektrometers, dessen Zerstreuungskörper der zu untersuchenden Luft ausgesetzt ist. Für die Untersuchung einer etwaigen Beeinflussung haben wir die in Betracht kommenden Apparate in drei Gruppen zu teilen:

1. Apparate, bei denen der Zerstreuungskörper ohne Schutz frei in der zu untersuchenden Luft steht,

2. Apparate mit Röhrenkondensatoren von solcher Weite, daß der Zerstreuungskörper von einer vom äußeren Kondensatorzylinder ausgehenden Strahlung und den hierbei erzeugten Ionen nicht mehr erreicht wird,

3. Apparate mit Röhrenkondensatoren von solcher Weite, daß auch eine vom äußeren Kondensatorzylinder ausgehende Strahlung den Zerstreuungskörper erreicht.

Bei 1. 2. und 3. wird sich bei negativer Ladung des Zerstreuungskörpers auf diesem ein Niederschlag von festen radioaktiven Substanzen bilden, die nun für sich allein bereits eine Ionisierung der Luft in der nächsten Umgebung des Zerstreuungskörpers und damit ein Wandern des Aluminiumblättchens bewirken. Also wird bei negativer Ladung des Elektrometers eine der Ursachen der Blättchenwanderung die Ionisierung sein, die bewirkt wird durch den auf dem Zerstreuungskörper sich bildenden Niederschlag von festen radioaktiven Substanzen. Die Hauptursache der Blättchenwanderung bleiben natürlich bei negativ geladenem Elektrometer die schon vorhandenen positiven Ionen. Bei positiv geladenem Zerstreuungskörper ist bei den Apparaten 1. und 2. keine Beeinflussung denkbar, bei 3. kann sie von derselben Größenordnung werden wie bei negativ geladenem Zerstreuungskörper. Ist nun die Wirkung jenes Niederschlages von solcher Größenordnung, daß sie neben der Wirkung der Ionen in Betracht kommt, so findet offenbar bei allen derartigen Messungen eine Beeinflussung der Resultate statt: Bei negativ geladenem Zerstreuungskörper werden bei den Apparaten 1., 2. und 3., bei positiv geladenem Zerstreuungskörper nur bei Apparaten der Art 3. zu große Werte für den Spannungsrückgang erhalten; wenigstens wird man dann nicht, wie bisher üblich, die be-

obachtete Wirkung ganz auf Rechnung der positiven bzw. negativen Ionen in der Atmosphäre setzen dürfen.

Nun werden bei derartigen Messungen tatsächlich Expositionszeiten und Spannungen angewandt, die längst hinreichend sind, um auf einem Draht merkbare Niederschläge von radioaktiven Substanzen anzusammeln. Außerdem sind bei fast allen derartigen Messungen die bei negativ geladenem Elektrometer beobachteten Spannungsabnahmen größer als bei positiv geladenem. Es kam also nur darauf an:

1. den radioaktiven Niederschlag auf dem Zerstreuungskörper solcher Apparate nachzuweisen[1]),

2. die Größenordnung seiner Wirkung zu bestimmen.

Die Untersuchungen wurden durchgeführt an einem Elster-Geitelschen Zerstreuungsapparat[2]), an einem Gerdienschen Aspirationsapparat zur Bestimmung der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre[3]), an einem Ebertschen Ionenzähler[4]), der auch bei Anwendung des Macheschen Zusatzkondensators die Bestimmung der Ionengeschwindigkeit[5]) gestattete. Eine Beeinflussung der Resultate in dem angedeuteten Sinn ließ sich bei den drei Apparaten nachweisen. Über einen Teil dieser Beobachtungen, und zwar im wesentlichen über die Versuche am Gerdienschen Apparat ist vom Verfasser bereits auf der vorjährigen (78.) Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte vom 16.—22. Sept. 1906 in Stuttgart berichtet worden.[6])

Die bei den quantitativen Bestimmungen gefundenen Resultate gestatteten weiterhin Schlußfolgerungen, auch aus

1) Auf die *Möglichkeit* der Bildung eines aktiven Niederschlages auf dem Schutzzylinder ihres Zerstreuungsapparates ist von Elster und Geitel in Wiener Ber. 111. Abt. IIa, p. 952. 1902 hingewiesen worden.

2) J. Elster u. H. Geitel, Physik. Zeitschr. 1. p. 11. 1899; Ann. d. Phys. 2. p. 425. 1900; Terr. Magn. 4. p. 213. 1899.

3) H. Gerdien, Göttinger Nachr. 105. Heft 2; Terr. Magn. 10. p. 65—79. 1905; Ber. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 7. p. 368—371. 1905.

4) H. Ebert, Arch. de Genève 4. p. 12, 97. 1901; Physik. Zeitschr. 2. p. 662. 1901; Illustr. Äron. Mitteilungen 6. p. 178. 1902; Ber. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1905, Heft 2.

5) H. Mache, Physik. Zeitschr. 4. p. 717—721. 1903; H. Mache u. E. v. Schweidler, Physik. Zeitschr. 6. p. 71—73. 1905.

6) Ber. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 4. p. 459—467. 1906; Physik. Zeitschr. 7. p. 771—775. 1906.

bereits vorhandenem Beobachtungsmaterial anderer Forscher. Ferner wurde dadurch eine Bestimmung des absoluten Gehaltes der Atmosphäre an radioaktiven Substanzen ermöglicht, die in Verbindung mit der Größe der gefundenen Beeinflussung und den daraus sich ergebenden Schlußfolgerungen Forderungen für die Praxis luftelektrischer Messungen ergaben.

## B. Ausführung.

### I. Möglichkeit und Form eines normalen Ionenzustandes in der Atmosphäre.

Da hier eine Beeinflussung der Resultate von Untersuchungen über den Ionenzustand der Atmospäre, ihre Leitfähigkeit usw. besprochen werden soll, so haben wir zunächst klarzulegen, welchen Zustand in den Ionenverhältnissen der Atmosphäre man der Natur der Ionen und der Ionisation nach als den normalen zu bezeichnen hätte, d. h. welcher Zustand bestehen würde, wenn keinerlei Störungen in den Ionenverhältnissen selbst und keinerlei Beeinflussungen der Resultate bei den Untersuchungen dieser Verhältnisse vorhanden wären.

Wir gehen von der Voraussetzung aus, daß bei der Ionisation gleichviel positive und negative Ionen erzeugt werden. Nach einer gewissen Zeit soll sich dieser Anfangszustand irgendwie verändert haben. Es sei nun $N_p$ die Zahl der positiven Ionen in der Volumeinheit, $N_n$ die der negativen, dann haben wir für die Veränderung von $N_p$ und $N_n$ mit der Zeit, also für $\frac{dN_p}{dt}$ und $\frac{dN_n}{dt}$, also auch für die Ausbildung eines Grenzzustandes $\lim_{t=\infty} N_p/N_n$ zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Auf die Größen $N_p$ und $N_n$ soll verändernd einwirken die Neuentstehung von Ionen durch irgendwelche Ionisatoren und die Wiedervereinigung der Ionen. Da durch einen Ionisator immer gleichviel positive und negative Ionen erzeugt werden (die Zahl in der Volumeinheit pro Zeiteinheit sei $q$), da ferner durch Wiedervereinigung in der Volumeinheit des Gasraumes $\alpha . N_p . N_n$ Ionen jedes Vorzeichens verloren gehen ($\alpha$ = Koeffizient der Wiedervereinigung), so erhalten wir:

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{dN_p}{dt} = q - \alpha . N_p . N_n, \\ \frac{dN_n}{dt} = q - \alpha . N_p . N_n, \end{cases}$$

also: $$dN_p = dN_n,$$

(2) $$N_p = N_n + c,$$

d. h. die Zahl der positiven und negativen Ionen müßte sich für jedes beliebige $t$ um dieselbe Konstante $c$ unterscheiden. Eine Unipolarität wäre möglich, und zwar wäre sie dadurch charakterisiert, daß der absolute Betrag des Überschusses der einen Ionenart über die andere eine Konstante wäre, unabhängig von der Zahl der Ionen selber. Ist freilich jemals die Zahl der positiven und negativen Ionen gleich gewesen, und das ist wahrscheinlich bei der gemachten Voraussetzung, daß sowohl die Zahl der entstehenden positiven und negativen Ionen gleich ist, als auch die der verschwindenden für jedes $t$, so wäre $c = 0$, bliebe also auch für jedes $t$ gleich 0, d. h. eine Unipolarität wäre in diesem Spezialfall ausgeschlossen. Es wäre $N_p/N_n = 1$.

2. Auf $N_p$ und $N_n$ soll außer der Wiedervereinigung ein weiterer Umstand vernichtend wirken, auf beide Ionenarten verschieden stark, und zwar im Verhältnis $k/m$; d. h. werden in der Zeiteinheit durch diesen Umstand $k \cdot N_p$ positive Ionen vernichtet, so verschwinden gleichzeitig $m \cdot N_n$ negative Ionen. Statt der Gleichungen (1) erhalten wir:

(3) $$\begin{cases} \frac{dN_p}{dt} = q - \alpha \cdot N_p \cdot N_n - k \cdot N_p, \\ \frac{dN_n}{dt} = q - \alpha \cdot N_p \cdot N_n - m N_n. \end{cases}$$

Gewöhnlich wird in der Atmosphäre ein stationärer Zustand vorhanden sein, d. h. es entstehen ebensoviel Ionen, als in der Zeiteinheit verschwinden; d. h. es ist

$$\lim_{t=\infty} \frac{dN_p}{dt} = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{dN_n}{dt} = 0.$$

Für $t = \infty$ wird also

$$q - \alpha \cdot N_p \cdot N_n - k N_p = q - \alpha \cdot N_p \cdot N_n - m N_n,$$

$$k N_p = m N_n,$$

(4) $$\lim_{t=\infty} \frac{N_p}{N_n} = \frac{m}{k}.$$

*Wirkt also auf die Ionen ein Umstand vernichtend ein, und zwar auf die beiden Arten im Verhältnis $k/m$, so stellt sich für $t = \infty$ ein Grenzzustand ein derart, daß sich die Ionenzahlen verhalten wie $m/k$. Es tritt eine Unipolarität ein, die charakterisiert wird durch das Verhältnis $m/k$, d. h. es wird sein*

$$\frac{N_p}{N_n} = \frac{m}{k},$$

einerlei, in welchem Anfangsverhältnis $N_p$ und $N_n$ zueinander gestanden haben. Es ist hierbei offenbar weiter ganz gleichgültig, wie groß der absolute Wert dieser Einwirkung ist, d. h. wie groß die Zahlenwerte $m$ und $k$ sind. Für $t = \infty$ wird obiger Grenzwert stets erreicht werden.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist die entstandene Unipolarität dadurch definiert, daß das Verhältnis der beiden Ionenarten eine Konstante ist, so daß wir die Ursache einer derartigen Unipolarität in einem Umstand zu suchen hätten, der die beiden Ionenarten in gleichem Sinn, aber verschieden stark beeinflußt; auf die absolute Größe der Beeinflussung kommt es nicht an, sie kann beliebig groß sein. *Ein derartiger Umstand existiert für die Atmosphäre in der Adsorption der Ionen an Oberflächen an irgendwelchen Masseteilchen, Staub, Rauch, Wasserdampf usw.*[1]) Wegen einer genaueren Ausführung über die Adsorption verweise ich auf das Referat von H. Ebert: Über die Adsorption der Gasionen und ihre Bedeutung für die Luftelektrizität.[2]) Hier genügt die Tatsache: Es werden mehr negative Ionen adsorbiert als positive Ionen, und zwar sind die Bereiche, auf die sich die Adsorption erstreckt, den spezifischen Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen direkt proportional, d. h. *die adsorbierende Wirkung ist proportional der spezifischen Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen.*

Bezeichnen wir mit $v_p$ und $v_n$ die spezifischen Wanderungsgeschwindigkeiten, so ist in obiger Ableitung zu setzen

$$\frac{k}{m} = \frac{v_p}{v_n}$$

1) J. Stark („Die Elektrizität in Gasen, Leipzig 1902") bezeichnet ein Ion, das sich mit einer Masse beladen hat, als Molion; wir können daher den Vorgang, um den es sich bei unseren Auseinandersetzungen im wesentlichen handelt, als „Molionisierung" bezeichnen.

2) H. Ebert, Jahrbuch der Radioaktivität u. Elektronik 3. Heft 1. 1906.

und wir erhalten statt Gleichung (4):

$$\lim_{t=\infty} \frac{N_p}{N_n} = \frac{v_n}{v_p}. \tag{5}$$

*In der Atmosphäre wird also unter der Wirkung der Adsorption ein Grenzzustand angestrebt, der dadurch charakterisiert ist, daß das Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten zugleich das reziproke Verhältnis der Ionenzahlen für die freien Ionen ist.*

Das Verhältnis der Ionenzahlen kann durch vorübergehende Erscheinungen, Niederschläge usw. gestört werden. Wegen der ständig wirkenden Adsorption ist aber das Bestreben vorhanden, das Normalverhältnis

$$\frac{N_p}{N_n} = \frac{v_n}{v_p}$$

wiederherzustellen.

Wir sehen hieraus einmal, daß der Adsorption der Ionen an Oberflächen, an Staub, Rauch, Wasserdampf, weiterhin natürlich auch an neutralen Molekülen eine grundlegende Bedeutung für die gesamten Ionenverhältnisse der Atmosphäre zukommt. Sie reicht nicht nur qualitativ, sondern da es sich um den Grenzzustand für $t = \infty$ handelt, auch quantitativ vollkommen aus zur Erklärung der bestehenden Unterschiede, der Unipolarität. Weiter, und das ist das Wichtigste, erkennen wir: *Das regulierende Prinzip in den Ionenverhältnissen der Atmosphäre und damit die letzte Ursache für das charakteristische Überwiegen der freien positiven Ionen über die freien negativen ist nicht zu suchen in irgendwelchen äußeren Ursachen und Einwirkungen, sondern allein in einer charakteristischen Eigenart der positiven und negativen Ionen selber: ihrer verschiedenen Beweglicheit, mit anderen Worten: in dem verschiedenen Verhältnis von Ladung zur Masse.*

Auf weitere Folgerungen, die sich aus der Überlegung ergeben, daß die Ionen durch Adsorption an Masseteilchen nicht vernichtet, sondern nur in ihrer Beweglichkeit beschränkt werden („Langevin-Ionen") kann hier nicht weiter eingegangen werden.

Die weiteren Ausführungen sollen nun der Beantwortung der Fragen dienen:

1. Wie weit sind bei den seitherigen luftelektrischen Messungen die Resultate beeinflußt worden durch die bis jetzt

nicht berücksichtigten radioaktiven Substanzen in der Atmosphäre?

2. Findet sich der oben charakterisierte Normalzustand experimentell bestätigt bei Berücksichtigung der Wirkungen der radioaktiven Stoffe?

## II. Untersuchungen.

### 1. Das benutzte Instrumentarium.

Wegen einer Beschreibung der p. 892 erwähnten Apparate, an denen die Beeinflussung konstatiert und genauer untersucht wurde, kann auf die zitierten Originalarbeiten verwiesen werden. Das Instrumentarium, das für die exponierten Drähte nötig war, soll in der Spezialarbeit über diese Untersuchung beschrieben werden, da diese Messungen für die gegenwärtige Arbeit nur als Hilfsmessungen in Betracht kommen. Hier interessiert nur das Elektrometer, in dem die Untersuchung der in den besprochenen Apparaten angesammelten radioaktiven Substanzen stattfand.

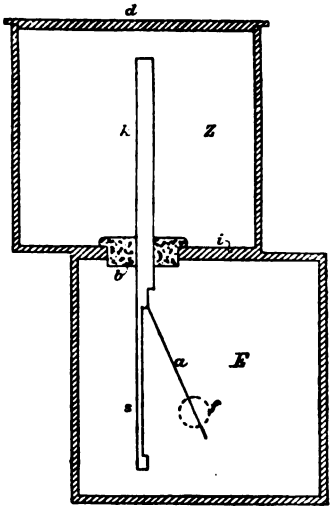


Fig. 1.

In der Form ist dieses Blattelektrometer im wesentlichen gleich dem von H. W. Schmidt angegebenen.[1]) Fig. 1 gibt einen Längsschnitt durch das Instrument und zeigt zugleich die Übereinstimmung mit dem Schmidtschen Elektrometer und ebenso die Abweichungen von diesem. An der Stelle, an der das Aluminiumblättchen das Gesichtsfeld des Mikroskopes passiert, ist am Blättchen in der vom Verfasser angegebenen Weise[2]) ein Quarzfaden von 6 mm Länge und 0,004 mm Dicke eingesetzt. Diese Fadenablesung gestattet, zehntel Teilstriche der 100teiligen Okularskala mit voller Sicherheit ab-

1) H. W. Schmidt, Physik. Zeitschr. **6**. p. 561. 1905.
2) K. Kurz, Physik. Zeitschr. **7**. p. 375. 1905.

zulesen. Die geringe Kapazität des ganzen Instrumentes, 4,98 bzw. 5,12 cm je nach der Art des Einsatzes, und seine große Empfindlichkeit in Verbindung mit dieser Ableseeinrichtung ermöglichten es, mit dem Blattelektrometer solch geringe Aktivitäten zu beobachten und in ihrer Abklingung zu verfolgen, wie sie hier in Betracht kommen.

Das eigentliche Elektrometer *E* ist von dem Zerstreuungsraum *Z* durch die Wand *i* vollkommen abgetrennt. Dadurch kann in dem Zerstreuungsraum leicht ein Einsatz mit zu untersuchender Substanz durch einen anderen ersetzt werden, ohne daß das Elektrometer vorher entladen zu werden braucht, und ohne daß man fürchten muß, bei diesen Umwechselungen das Aluminiumblättchen durch Luftzug oder direkte Berührung zu beschädigen. Als Deckel des Zerstreuungsgefäßes diente bei einem Teil der Untersuchungen ein Einsatz, der leicht herausnehmbar und auswechselbar war und doch einen vollkommen dichten Abschluß ermöglichte. Wie Fig. 2 zeigt, ist dieser Einsatz eine Kombination eines Deckels mit einem Gestell von 6 oder 8 Stäben, die so eingelassen sind, daß die Entfernung eines jeden vom Mittelpunkt 2,5 cm beträgt. Bei einem anderen Teil der Untersuchungen bildete ein einfacher Aluminiumdeckel ohne die Stäbe den Abschluß.

Fig. 2.

Wegen der Eichung und Kapazitätsbestimmung muß auf die Dissertation verwiesen werden.

### 2. Qualitativer Nachweis der Beeinflussung.

Das Prinzip des qualitativen Nachweises über das tatsächliche Vorhandensein eines Niederschlages von radioaktiven Substanzen auf dem negativ geladenen Zerstreuungskörper war bei den drei untersuchten Apparaten dasselbe: Der Zerstreuungskörper wurde mit einer leicht und rasch abnehmbaren Metallhülle versehen und der betreffende Apparat in gewohnter Weise in Tätigkeit veresetzt. Nach dem Versuch bei negativ

geladenem Zerstreuungskörper wurde die Hülle rasch abgestreift und in den Zerstreuungsraum des eben besprochenen Blattelektrometers[1]) gebracht. Hatten sich tatsächlich auf der Hülle feste radioaktive Substanzen in solcher Menge niedergeschlagen, daß ihre ionisierende Wirkung ein Blattelektrometer beeinflussen konnte, so mußte sich nach dem Einbringen dieser Hülle in den Zerstreuungsraum des Untersuchungselektrometers sogar eine Kurve über die Abklingung dieses aktiven Niederschlages aufnehmen lassen. Dies gelang bei den 3 Apparaten. Wurde der Versuch wiederholt, wenn der Überzug einen positiv geladenen Zerstreuungskörper bedeckt hatte, so ließ sich keinerlei Einwirkung in dieser Weise feststellen.

a) Der Elster-Geitelsche Zerstreuungsapparat.

Der Zerstreuungskörper des Elster-Geitelschen Apparates, ein Zylinder von 4,7 cm Durchmesser und 10,5 cm Höhe, wurde mit einem Ring von Nickelpapier versehen, der aufgerollt ein Rechteck von $6 \times 15\,cm^2$ darstellte. Nachdem der Apparat 15 Min. bei negativ geladenem Zerstreuungskörper ohne Schutzzylinder im Zimmer gestanden hatte, wurde der Ring abgenommen, aufgebogen, der so erhaltene Streifen wieder zu einem Ring gebogen, nun aber derart, daß die vorher außen befindliche Metallseite des Papiers nach innen gekehrt war. Dieser Ring paßte in den Zerstreuungsraum des Elektrometers p. 897 (Fig. 1). Er umgab nach dem Einsetzen den Zerstreuungsstift in einem Abstand von ca. 2,5 cm.

Das Wandern des Blättchens, also die Abklingung[2]) des radioaktiven Niederschlages, ließ sich durch $2^1/_2$ Stunden verfolgen. Dabei ist zu bemerken, daß der benutzte Nickelpapierstreifen nur etwa die Hälfte der Oberfläche des Zerstreuungskörpers bedeckt hatte, so daß nur etwa die Hälfte der auf dem gesamten Zerstreuungskörper angesammelten radioaktiven Substanzen zur Untersuchung gelangte. Die Abklingungskurve[3]) zeigt zunächst einen Steilabfall, dann nach einem noch-

1) In der Folge meist als „Untersuchungselektrometer" bezeichnet.
2) Über die bei der Berechnung angewandte Ausgleichsrechnung vgl. H. W. Schmidt u. K. Kurz, Physik. Zeitschr. 7. p. 209—224. 1906.
3) Vgl. auch K. Kurz, Physik. Zeitschr. 7. p. 771—774. 1906.

maligen Anstieg und kürzerem Konstantbleiben der Aktivität einen langsameren Abfall. (In der Dissertation sind für die verschiedenen untersuchten Apparate Tabellen und Kurven über die Abklingung der erhaltenen Niederschläge gegeben.)

### b) Der Gerdiensche Aspirationsapparat.

Beim Gerdienschen Apparat zur Bestimmung der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre besteht der Zerstreuungskörper aus einem Zylinder von 24 cm Länge und 1,4 cm Durchmesser. Er wurde mit einer Hülle von 0,1 mm starkem Aluminiumblech versehen, die aus sechs einzelnen Zylindern von 1,4 cm Durchmesser und 4 cm Höhe bestand. Die Aluminiumzylinder konnten über die sechs Stäbe des durch Fig. 2 beschriebenen Einsatzes gestülpt und auf diese Weise sehr rasch in den Zerstreuungsraum des Untersuchungselektrometers gebracht werden. Bei dem in der Dissertation gegebenen Beispiel war der Aspirator 1 Stunde in Tätigkeit gewesen bei negativ geladenem Zerstreuungskörper. Die Wirkung des erhaltenen Niederschlages ließ sich in der beschriebenen Weise über 3 Stunden verfolgen.

Da beim Gebrauch des Apparates zur Messung der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre Aspirationsdauern von nur 3—5 Min. angewandt werden sollen, so wurden auch Aufnahmen über die Wirkung der radioaktiven Niederschläge bei diesen Aspirationsdauern gemacht. Der Effekt war auch hier in derselben Weise nachweisbar. Die Größe des beobachteten Effektes war natürlich geringer, da sich anscheinend im wesentlichen das rasch zerfallende Radium *A*, in weit geringerem Maß auch Radium *B* und Radium *C* niederschlägt.[1]) Eine bedeutendere Anreicherung von Radium *B* und *C* ist daher erst bei größeren Aspirationsdauern zu erwarten; aus diesem Grunde läßt sich der gesuchte Effekt nur bei längerer Aspirationsdauer längere Zeit hindurch verfolgen. In einem Fall einer Aspirationsdauer von 5 Min. konnte beispielsweise die ionisierende Wirkung der auf der Hülle niedergeschlagenen

1) Das wohl auch niedergeschlagene Thor *B* und *C* kommt wegen seiner minimalen Wirkung bei diesen geringen Expositionsspannungen und kurzen Expositionszeiten nicht in Betracht.

Substanzen $10^1/_2$ Min. lang beobachtet werden. Die Halbwertszeit war 3 Min., die Anfangshalbwertzeit für solche aktiven Niederschläge aus der Atmosphäre bei kurzer Expositionszeit. Es muß hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß ein solches Verfolgen der Abklingung dieser geringen Aktivitäten mit einem Blattelektrometer nur möglich ist bei kleiner Kapazität des Elektrometers und der hier verwandten Fadenablesung, die es gestattet, die Zehntel der kleinen Teilstriche der Okularskala mit Sicherheit abzulesen. Im letzten der angeführten Fälle ist beispielsweise die beobachtbare Wirkung bereits zu Ende, nachdem das Blättchen über $^7/_{10}$ kleine Teilstriche gewandert ist. Natürlich muß das Elektrometer vor Luftzug und direkten Sonnenstrahlen, überhaupt vor jeder Temperaturschwankung geschützt werden, da sonst der gesuchte Effekt durch Nebenerscheinungen verdeckt wird.

### c) Der Ebertsche Apparat.

In genau derselben Weise ließ sich die Wirkung der radioaktiven Substanzen beim Ebertschen Ionenzähler konstatieren. Auch hier wurde der Zerstreuungskörper, ein Zylinder von 37 cm Länge und 0,5 cm Durchmesser mit einer Hülle aus Aluminiumblech von 0,01 mm Dicke versehen, die nach dem Versuch abgestreift und genau wie bei dem entsprechenden Versuch mit dem Gerdienschen Apparat in das Untersuchungselektrometer gebracht wurde. Dies gilt für den Ebertschen Apparat in seiner Einrichtung als Ionenzähler. Daß er bei vorgestecktem Hilfskondensator[1]), also in der Einrichtung zur Bestimmung der Ionengeschwindigkeit, auch der Wirkung der radioaktiven Substanzen unterliegt, ist selbstverständlich. Bei dem in der Dissertation gegebenen Beispiel ist die Wirkung der Stoffe $1^1/_2$ Stunden verfolgt worden.

Auf die Möglichkeit, daß bei den beiden letzten Apparaten eine entsprechende Beeinflussung auch bei positiv geladenem Zerstreuungskörper statthaben könnte, wurde ich erst nach Drucklegung der Dissertation aufmerksam.[2]) Der Gerdiensche und der Ebertsche Apparat sind Röhrenkondensatoren.

---

1) H. Mache u. E. v. Schweidler, l. c.

2) Vgl. K. W. Fritz Kohlrausch, Phys. Zeitschr. 8. p. 657. 1907.

Bei positiv geladenem Zerstreuungskörper werden sich die aktiven Substanzen an der Röhrenwand absetzen, die Luft im Zerstreuungsraum ionisieren und damit eine Beeinflussung des Resultates bewirken.[1]) Wie ich in einer gleichzeitig in der Physikalischen Zeitschrift erscheinenden Arbeit: „Eine quantitative Bestimmung des Gehaltes der Atmosphäre an radioaktiven Stoffen" zeige, gilt die Überlegung nur für den Ebertschen Apparat, nicht dagegen für den Gerdienschen, und zwar wegen der Dimensionen und Wirkungsweise der Apparate und der Reichweite der für die Ionisation in Betracht kommenden Strahlen, im wesentlichen $\alpha$-Strahlen von Ra *A*. Beim Ebertschen Apparat ist danach die Beeinflussung durch die radioaktiven Stoffe bei positiv und negativ geladenem Zerstreuungskörper von ungefähr gleicher Größe, kann also das Überwiegen der positiven Ionen über die negativen, das mit diesem Apparat durchgängig gefunden wird, und dessen Ursache nach p. 893—897 in der Adsorption der Ionen zu suchen ist, nicht erklären. — In derselben Arbeit bin ich auch auf Bedenken von Hrn. K. W. F. Kohlrausch wegen der Größenordnung des beobachteten Effektes eingegangen.

Aus den bisherigen qualitativen Untersuchungen ergibt sich nun folgendes:

Bei den drei zur Verfügung stehenden Apparaten findet durch die festen radioaktiven Stoffe der Atmosphäre eine Beeinflussung der Ergebnisse in der Weise statt, daß die bei negativ geladenem Zerstreuungskörper beobachteten Spannungsrückgänge durch die positiven Ionen zu groß angegeben werden. Der Spannungsrückgang bei negativ geladenem Zerstreuungskörper wird nur zum Teil bewirkt durch die in der Atmosphäre bereits vorhandenen positiven Ionen; zum Teil hat er seine Ursache in einer Anreicherung der radioaktiven Stoffe der Atmosphäre auf dem Zerstreuungskörper. Bei positiv geladenem Zerstreuungskörper dagegen ist eine Beeinflussung durch die radioaktiven Substanzen bei dem Elster-Geitelschen und dem Gerdienschen Apparat nicht merkbar; bei dem Ebertschen Apparat ist sie von gleicher Größenordnung wie bei negativ geladenem Zerstreuungskörper.

1) Mit Versuchen, die diesen Punkt experimentell klarlegen sollen, bin ich zurzeit beschäftigt.

Für die einzelnen Apparate ergibt dies:

Sind $\overset{+}{a}$ und $\overset{-}{a}$ die mit dem Elster-Geitelapparat bestimmten Zerstreuungskoeffizienten bei positiv bzw. negativ geladenem Zerstreuungskörper, so wird stets für $\overset{-}{a}$ und damit auch für $q = \overset{-}{a}/\overset{+}{a}$ ein zu großer Wert gefunden, d. h. die Abweichungen des $q = \overset{-}{a}/\overset{+}{a}$ von der Einheit sind tatsächlich geringer, als sie bisher mit dem Elster-Geitelschen Apparat gefunden wurden.

Der Gerdiensche Apparat soll geben bei negativer Ladung des Zerstreuungskörpers

$$\lambda_p = \varepsilon \, n_p \, . \, v_p ,$$

bei positiver Ladung

$$\lambda_n = \varepsilon \, . \, n_n \, . \, v_n ,$$

wenn $\varepsilon$ die Ladung des Ions, $n_p$ die Zahl, $v_p$ die Geschwindigkeit, $\lambda_p$ den Anteil der positiven Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre, $\lambda_n$, $n_n$, $v_n$ die entsprechenden Größen für die negativen Ionen bedeuten. Da der Apparat direkt aus dem Spannungsrückgang mit Hilfe der Apparatkonstanten die Größen $\lambda_p$ und $\lambda_n$ geben soll, so wird also nach vorstehenden Versuchen der mit dem Gerdienschen Apparat gefundene Anteil der positiven Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre zu groß sein, der Anteil der negativen Ionen dagegen richtig. Danach wird auch für die spezifische Leitfähigkeit der Atmosphäre

$$\lambda = \lambda_p + \lambda_n = \varepsilon \, [n_p \, . \, v_p + n_n \, . \, v_n]$$

mit dem Gerdienschen Apparat ein zu großer Wert erhalten werden.

Der Ebertsche Apparat soll liefern die spezifische Ionenzahl aus dem Quotienten

$$\frac{\text{Spannungsverlust}}{\text{Apparatkonstante}} .$$

Daraus folgt, daß die Zahl der positiven und der negativen Ionen um denselben Betrag zu groß gefunden wird. Bezeichnen $E_+$ und $E_-$ die positiven bzw. negativen Ionenladungen in elektrostatischen Einheiten pro Kubikmeter, so

werden offenbar die vom Ebertschen Apparat gelieferten Differenzwerte

$$U = E_+ - E_-,$$

sowie die Verhältnisse

$$q = E_+ / E_-,$$

welche ein Maß der Unipolarität geben, trotz der Beeinflussung richtig gefunden, da die letztere bei der Bildung von $U$ herausfällt und $q$ nur um Größen höherer Ordnung geändert wird.

In Verbindung mit dem Macheschen Zusatzkondensator gibt der Ebertsche Apparat, wie sich aus der von Mache und Schweidler[1]) angegebenen Formel ableiten läßt, die spezifische Ionengeschwindigkeit als

$$v = \text{Apparatkonstante} \frac{\text{Differenz zweier Spannungsverluste}}{\text{Spannungsverlust}}.$$

Da die beiden in Betracht kommenden Spannungsverluste (bei geerdetem und geladenem Zusatzkondensator) im selben Sinn beeinflußt werden, so macht sich hier die Wirkung der radioaktiven Substanzen bei der Berechnung im wesentlichen an dem nun im Nenner stehenden Spannungsverlust bei geerdetem Zusatzkondensator geltend; d. h. die mit dem Ebert-Macheschen Apparat bestimmten Ionengeschwindigkeiten sind für positive und negative Ionen zu klein.

Bestimmt man demnach mit einem Ebertschen Apparat sowohl Ionenzahl als auch Ionengeschwindigkeit, also $n_p$, $v_p$, $n_n$, $v_n$ und hieraus die Anteile der positiven und der negativen Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre, also

$$\lambda_p = \varepsilon . n_p . v_p$$

und

$$\lambda_n = \varepsilon . n_n . v_n,$$

so kommt man offenbar trotz der Beeinflussung durch die radioaktiven Substanzen zu richtigen Werten. Denn die Beeinflussung von $n_p$ und $v_p$ ist von derselben Größenordnung, geschieht aber in entgegengesetztem Sinn, so daß sie bei der Bildung der Produkte $\varepsilon . n . v$ nur noch als Fehler zweiter Ordnung in Betracht kommt.

1) H. Mache u. E. v. Schweidler, Physik. Zeitschr. 6. p. 72. 1905.

### 3. Quantitative Bestimmung der Beeinflussung.

Die vorstehenden Untersuchungen führten unmittelbar zu der zweiten Frage, die hier behandelt werden soll: Wie groß ist die Wirkung der auf dem negativ geladenen Zerstreuungskörper solcher Apparate sich absetzenden radioaktiven Substanzen?

#### a) Beeinflussung des Zerstreuungskoeffizienten am Elster-Geitel-Apparat.

Ein genaues quantitatives Resultat war bei dem Elster-Geitelschen Apparat wegen der wenig definierten Verhältnisse, unter denen er arbeitet, von vornherein nicht zu erwarten.[1])

Die Versuche, die Angaben *zweier* Apparate mit verschiedener Ladung aufeinander zu beziehen, scheiterten an der von Elster und Geitel selbst festgestellten Tatsache, daß „nur bis ins einzelne gleich dimensionierte Apparate übereinstimmende Resultate geben". Mir war es nicht möglich, mit den beiden mir zur Verfügung stehenden Apparaten übereinstimmende Werte zu erhalten bei gleicher Anfangsspannung, gleichartiger Ladung und gleichem Beobachtungszeitraum. Die vorhandenen Differenzen waren so bedeutend, daß sie eine genaue Untersuchung des fraglichen Effektes unmöglich gemacht hätten.

Es wurden deshalb zu einem und demselben Apparat zwei genau gleiche Zerstreuungskörper angefertigt und nun am selben Apparat abwechselnd bei positiver und negativer Ladung je eine Beobachtungsreihe aufgenommen. Da eine Beobachtungsreihe, beispielsweise bei positiver Ladung, etwas über eine Viertelstunde in Anspruch nimmt, so ist natürlich Bedingung für die Vergleichbarkeit der beiden Beobachtungsreihen, daß sich innerhalb der halben Stunde der beobachtete Zustand der Atmosphäre nicht geändert hat. Etwaige geringe Änderungen suchte ich dadurch zu eliminieren, daß *vor* und *nach* jeder Aufnahme bei negativer Ladung des Zerstreuungskörpers eine solche bei positiver Ladung vorgenommen wurde. Zeigten sich geringe Unterschiede von der einen Beobachtung bei positiver Ladung bis zur nächsten, so wurde als maßgebender Ver-

1) H. Schering, Diss. Göttingen 1904.

gleichswert das Mittel aus beiden Beobachtungssätzen genommen. Zeigten sich größere Differenzen zwischen den beiden Aufnahmen bei gleicher Ladung des Zerstreuungskörpers, so war natürlich die gesamte Aufnahme wegen der in der Atmosphäre eingetretenen Änderungen unbrauchbar für unseren Zweck.

Die Stärke der Aktivität der auf dem Zerstreuungskörper bzw. dem Nickelpapierring angesammelten radioaktiven Substanzen wurde gleichzeitig wie bei den Versuchen p. 899 in dem Untersuchungselektrometer festgestellt. Über die Abklingung wurde eine Kurve aufgenommen, in der wieder wie früher als Abszisse die Zeit eingetragen wurde, gerechnet von der Abnahme des Ringes vom Elster-Geitelschen Apparat, als Ordinate die an den einzelnen Zeitpunkten im Untersuchungselektrometer beobachtete Zerstreuung in Millivolt/sec. Der aus der Kurve für die Zeit 0, für die Zeit des Abnehmens vom Elster-Geitelschen Apparate, abgelesene Wert der Spannungsabnahme gibt also an, um welchen Betrag die Spannung im Untersuchungselektrometer pro Sekunde zurückgeht unter der ionisierenden Wirkung der radioaktiven Substanzen. Dieser Betrag sei $V$.

In dem Untersuchungselektrometer herrscht Sättigungsstrom, d. h. der Spannungsrückgang wird lediglich dadurch verursacht, daß alle in dem Zerstreuungsraum entstehenden Ionen eines Vorzeichens an den Zerstreuungsstift ihre Ladung abgeben. Ist $\varepsilon$ die Ladung des Ions in elektrostatischen Einheiten, $n$ die Zahl der pro Sekunde auftreffenden Ionen, $C$ die Kapazität des Untersuchungselektrometers, so ist der Sättigungsstrom

$$i = \varepsilon . n = \frac{C . V}{300} .$$

Da alle hierbei wirksamen Ionen erzeugt werden durch die radioaktiven Substanzen auf dem Nickelpapierring, so kann dieser Sättigungsstrom ein Maß für die Stärke der Aktivität der angesammelten Substanzen geben. Wir nehmen zur Bestimmung die Aktivität zur Zeit 0, also die Aktivität, die charakterisiert ist durch den Spannungsrückgang $V$ (Millivolt/sec). $a$ sei der Faktor, mit dem man die Menge der auf dem Ring befindlichen Substanzen multiplizieren muß, um die auf dem

ganzen Zerstreuungskörper des Elster-Geitelschen Apparates angesammelten Substanzen zu erhalten. Dann ist die Aktivität dieser Substanzen zur Zeit 0, also zur Zeit der Abnahme des Ringes vom Zerstreuungskörper, charakterisiert durch den Sättigungsstrom

$$I = a \cdot \varepsilon \cdot n = a \cdot \frac{C.V}{300}.$$

Hier ist zu berücksichtigen, daß die so konstatierte Aktivität größer ist als die durchschnittliche, während der ganzen Expositionszeit des Elster-Geitelschen Apparates wirksame. Wie diese Durchschnittsaktivität gefunden und wie alle weiteren nach dieser Richtung hin auszuführenden Berechnungen durchgeführt wurden, ist in der Dissertation in Kapitel 6 gezeigt.

Das Bestreben, den so gefundenen Sättigungsstrom, der also ein Maß für die Menge der abgeschiedenen radioaktiven Substanzen geben kann, direkt zu vergleichen mit dem am Elster-Geitelschen Apparat gleichzeitig gefundenen Zerstreuungskoeffizienten, scheitert an dem Umstand, daß es nicht möglich ist, die Spannungsabnahme an diesem Apparat als Funktion eines Ionenstromes, sei es eines gesättigten, eines ungesättigten oder eines freien Stromes [1]) darzustellen. Der Grund dazu liegt, wie Schering [2]) gezeigt hat, darin, daß bei dem Zerstreuungsapparat *ohne* Schutzzylinder in verschiedenen Regionen des Zerstreuungskörpers teils freier Strom, teils ungesättigter, teils gesättigter Strom herrscht, und daß es unmöglich ist, die drei Gebiete voneinander zu trennen. Die Gebiete sind von der Spannung abhängig, also variabel. Man kann daher auch nicht die drei verschiedenen Arten von Strömen getrennt für sich messen. Um wenigstens einen ungefähren Vergleich der Wirkung der radioaktiven Substanzen und der Ionen zu ermöglichen, habe ich in Tab. 1 den am Elster-Geitelschen Apparat beobachteten Spannungsrückgang in der Weise verrechnet, als ob er durch einen Sättigungsstrom zustande gekommen wäre; d. h. es wurde der Spannungsrückgang multipliziert mit $C/300$, wo $C$ die Kapazität des

1) Auf die Begriffe des freien, gesättigten und ungesättigten Stromes wird in Kap. II 5 näher eingegangen werden.

2) H. Schering, l. c. p. 15, 16.

Elster-Geitelschen Apparates mit Zerstreuungskörper, aber *ohne* Schutzzylinder bedeutet.

Wie Ebert[1]) gezeigt hat, erhält man beim Elster-Geitelschen Apparat Sättigungsstrom, wenn man ihn mit Schutzzylinder verwendet. Der zustande kommende Sättigungsstrom ist jedoch äußerst gering; der geringe Bruchteil der auf die radioaktiven Substanzen zu rechnen ist, war mit unseren Mitteln wohl noch nachweisbar, aber nur in den wenigsten Fällen meßbar.

Tabelle 1.

| 1 | 2 | 3 a | 3 b | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nummer | Expositionszeit in Min. | Wirkung der Ionen positiv $i \cdot 10^3$ | Wirkung der Ionen negativ $i \cdot 10^3$ | Wirkung der radioaktiven Substanzen | 3a bis 3b | Schutzzylinder | Bemerkungen |
| 1 | 21 | 1,675 | 1,635 | 0,039 | 0,040 | ohne | |
| 2 | 21 | 1,672 | 1,622 | 0,038 | 0,050 | „ | |
| 3 | 30 | 1,300 | 1,400 | 0,036 | −0,100 | „ | Zerstreuung änderte sich wesentlich im Laufe des Versuches |
| 4 | 60 | 1,539 | 1,245 | 0,076 | 0,294 | „ | |
| 5 | 122 | 1,800 | 1,641 | 0,096 | 0,159 | „ | |
| 6 | 270 | 1,940 | 1,864 | 0,051 | 0,076 | „ | |
| 7 | 200 | 0,356 | 0,294 | 0,033 | 0,062 | mit | |
| 8 | 240 | 0,344 | 0,285 | 0,008 | 0,059 | „ | |
| 9 | 480 | 0,496 | 0,497 | — | −0,001 | „ | |

In Tab. 1 finden sich eine Reihe von Versuchen zusammengestellt, deren Resultate in obiger Weise berechnet wurden. Spalte 2 gibt die Zeit, die der Elster-Geitelsche Apparat geladen gestanden hatte, Spalte 3a den unter obiger Annahme berechneten Sättigungsstrom der positiven, Spalte 3b den der negativen Ionen, Spalte 4 den Sättigungsstrom, der den radioaktiven Substanzen zu danken ist. Es ergibt sich so eine Wirkung, die bei diesen Versuchen im Mittel 3,5 Proz. der Wirkung der positiven Ionen beträgt. Ein direkter Vergleich der Spalten 3a, 3b, 4 ist, wie gesagt, ausgeschlossen. Es soll nur ein ungefährer Vergleich der gefundenen Größen-

1) H. Ebert, Terr. Magn. 6. p. 101. 1901.

ordnungen ermöglicht werden. Spalte 5 gibt die Differenz von Spalte 3a und 3b. Sie zeigt, wie die in Spalte stehende Wirkung der radioaktiven Substanzen bei einer Erklärung des Unterschiedes in Spalte 3a und 3b berücksichtigt werden muß, wenn sie auch nicht die Unterschiede zu erklären vermag. Bei den Versuchen mit Schutzzylinder, 7 bis 9, ist die Zerstreuung bedeutend geringer, die geringe Wirkung der radioaktiven Substanzen kann meistens in der von uns angewandten Weise kaum bestimmt werden, da sie kleiner ist als die „natürliche Zerstreuung" des Untersuchungselektrometers, welche selbstverständlich immer in Abzug gebracht ist. Außerdem gelten dann hier auch die p. 902 angestellten Überlegungen, wonach auch die Zahl der negativen Ionen beeinflußt ist durch die auf der Innenwand des Zylinders sich absetzenden radioaktiven Stoffe.

### b) Beeinflussung der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre am Gerdienschen Apparat.

Über diesen Teil der Arbeit ist vom Verfasser auf der 78. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte berichtet worden.[1]) Hier seien nur die Resultate der Untersuchung gegeben:

1. Die beim Gerdienschen Apparat sich zeigenden Unterschiede in der Spannungsabnahme bei positiver und negativer Ladung des Elektrometers werden verursacht durch einen auf dem negativ geladenen Zerstreuungskörper sich absetzenden Niederschlag von radioaktiven Substanzen.

2. Die positiven und negativen freien Ionen der Atmosphäre wirken auf den Gerdienschen Apparat in gleicher Weise ein. Da nun der Apparat (vgl. p. 903) die Anteile der positiven und negativen Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre liefert, so folgt: Die Anteile der positiven und negativen Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre sind in den meisten Fällen gleich.

3. Der Gerdiensche Apparat liefert wohl $\lambda_n$, den Anteil der negativen Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit, aber

1) Vgl. K. Kurz, Physik. Zeitschr. 7. p. 771—775. 1906 und Ber. d. Deutsch. Physik. Ges. 4. p. 459—467. 1906.

nicht direkt den Anteil der positiven Ionen. Der vom Apparat gelieferte Wert von $\lambda_p$ ist aufzufassen als

$$\lambda_p = \lambda_p' + \lambda_r,$$

wo $\lambda_p'$ den tatsächlichen Anteil der positiven Ionen an der spezifischen Leitfähigkeit bedeutet, $\lambda_r$ den Anteil an der gemessenen Leitfähigkeit, der verursacht wird durch eine Anreicherung von radioaktiven Substanzen auf dem negativ geladenen Zerstreuungskörper.

Es ist also:

$$\lambda = \lambda_n + \lambda_p = \lambda_n + \lambda_p' + \lambda_r,$$
$$\lambda_n = \lambda_p',$$

also:

(1) $$\lambda' = \lambda_n + \lambda_p' = 2\lambda_n,$$

wo $\lambda'$ die tatsächliche spezifische Leitfähigkeit der Atmosphäre bedeutet.

Nun ist

$$\lambda_n = \varepsilon \cdot v_n \cdot n_n,$$
$$\lambda_p' = \varepsilon \cdot v_p \cdot n_p,$$

also:

(2) $$v_n \cdot n_n = v_p \cdot n_p,$$

d. h.:

4. Für die beim Gerdienschen Apparat zur Wirkung kommenden positiven und negativen Ionen ist das Produkt aus spezifischer Geschwindigkeit und spezifischer Ionenzahl gleich. Aus (2) folgt:

(3) $$\frac{v_n}{v_p} = \frac{n_p}{n_n},$$

d. h.:

4a. Für die am Gerdienschen Apparat zur Wirkung kommenden Ionen ist das Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten zugleich das umgekehrte Verhältnis der Ionenzahlen.

### c) Beeinflussung der spezifischen Ionenzahlen am Ebertschen Ionenzähler.

Das Grundprinzip des Ebertschen Apparates in seiner Einrichtung als Ionenzähler besteht darin, daß innerhalb eines Zylinderkondensators, in dem Sättigungsstrom herrscht, einem Luftstrom sämtliche Ionen eines Vorzeichens entzogen und auf dem geladenen Zerstreuungskörper niedergeschlagen werden.

Aus dem Spannungsrückgang des Elektrometers, der Ladung des Ions und den Apparatkonstanten läßt sich dann die spezifische Ionenzahl bestimmen.

Da die Bestimmung der Ionenzahl eines Vorzeichens beim Ebertschen Apparat ca. $^1/_4$ Stunde in Anspruch nimmt, so war es für unsere Versuche von großer Wichtigkeit, mit zwei Apparaten gleichzeitig eine Bestimmung für beide Ionenarten durchzuführen.[1]) Die beiden von mir benutzten Apparate waren zwei Ionenzähler neuester Konstruktion mit senkrecht stehendem Zylinderkondensator und Umschalter für den Luftstrom.[2]) Beide Apparate waren bis in alle Einzelheiten gleich konstruiert. Die Ableseeinrichtung war Lupenablesung mit Spiegelskala.

Zunächst wurde geprüft, wie weit die Resultate beider Apparate bei vollständig gleichen Versuchsbedingungen (gleichzeitigem Gang, gleichartiger Ladung, gleichem Anfangspotential der Elektrometer) miteinander vergleichbar sind. In der Dissertation ist gezeigt, daß zwar im Mittel aus einer größeren Anzahl von Einzelbeobachtungen vergleichbare Werte resultieren, daß es aber für Untersuchungen, wie die vorliegende, nötig war, Mikroskopablesung mit Okularskala einzuführen und eine andere Eichung vorzunehmen, da sich nur dann ein direkter Vergleich der Einzelresultate durchführen ließ.

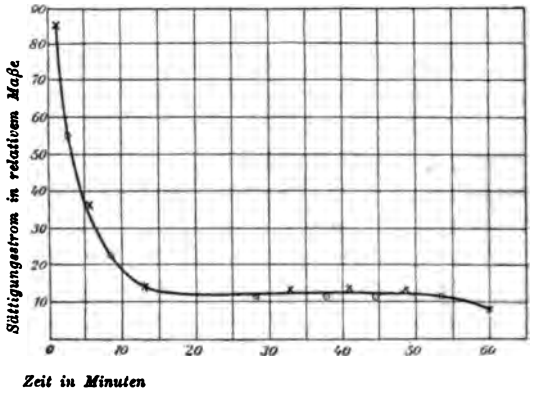
Die Untersuchung wurde aus Gründen, die in der Dissertation auseinandergesetzt sind, in ähnlicher Weise durchgeführt wie beim Elster-Geitelschen Apparat, also durch Zuhilfenahme des Untersuchungselektrometers (vgl. Fig. 1), in dessen Zerstreuungsraum eine während der Aspiration über dem Zerstreuungskörper des Ebertschen Apparates befindliche Hülle von Aluminiumblech untersucht wurde. Da sowohl im Zylinderkondensator des Ebertapparates als auch im Zerstreuungsraum des Untersuchungselektrometers bei Sättigungsstrom beobachtet wird, so konnten die Resultate beider Apparate bei Berücksichtigung der Kapazitäten direkt aufeinander bezogen werden. Dieser

1) Ich bin daher Hrn. Prof. Ebert-München zu großem Danke verpflichtet für die Liebenswürdigkeit, mit der er mir zu dem im Gießener Institut vorhandenen noch einen eigenen Apparat zur Verfügung stellte für die Dauer der Untersuchung.

2) H. Ebert, Ber. d. Deutsch. Physik. Ges. 1905, Heft 2.

Umstand wurde zunächst auch experimentell geprüft in folgender Weise:

Ein Teil der Hülle wurde in Radiumemanation aktiviert, dann über den Zerstreuungskörper des Ebertapparates gestülpt und nun kurze Zeit die Abklingung des Niederschlages an dem Spannungsrückgang des Elektrometers beobachtet. Dann wurde die Hülle in der Weise, wie sie bei den späteren Versuchen untersucht werden sollte, in den Zerstreuungsraum des Untersuchungselektrometers gebracht und wieder die weitere Abklingung beobachtet. Darauf kam die Hülle wieder zurück in den Ebertapparat zur weiteren Beobachtung, dann wieder




× Werte, gefunden am Ebertapparat.
⊙ Werte, gefunden im Untersuchungselektrometer.

Fig. 3.

in das Untersuchungselektrometer und so fort, bis für die Abklingung der radioaktiven Substanz bei beiden Apparaten eine Anzahl Punkte festgelegt waren. In Fig. 3 ist als Abszisse eingetragen die Zeit von Beginn der Untersuchung, die Ordinaten sind die Sättigungsströme, die in beiden Apparaten gemessen wurden.

Die durch die Punkte gelegte Kurve in Fig. 3 zeigt, daß eine direkte Vergleichung der bei beiden Apparaten gefundenen Werte innerhalb der hier möglichen Fehlergrenzen gestattet ist, da in beiden Apparaten Gleichheit der Sättigungsströme und Gleichheit der Strahlwirkung statthat.

Die schließliche Durchführung der Versuche geschah in folgender Weise: Der Zerstreuungskörper des einen Ebertapparates, ein Zylinder von 37 cm Länge und 0,5 cm Durchmesser wurde mit einer Hülle von 0,1 mm dickem Aluminiumblech versehen. Diese Hülle war bereits vorher in acht Abschnitte zerlegt, einzelne Aluminiumzylinder von 4,7 cm Höhe und 0,5 cm Durchmesser. Der eine Apparat wurde nun positiv, der andere negativ geladen und die Beobachtung in vorgeschriebener Weise begonnen. Die Turbine wurde in Tätigkeit versetzt, die Blättchenstellung unmittelbar vor dem Einschalten des Luftstromes und unmittelbar nach dem Ausschalten desselben abgelesen bei beiden Apparaten. Dann wurde die Hülle vom Zerstreuungskörper entfernt, die einzelnen Abschnitte über die Füße des Deckels zum Untersuchungselektrometer gestülpt, der Deckel eingesetzt und sofort mit der Beobachtung begonnen. Über die Abklingung des radioaktiven Niederschlages auf der Hülle wurde eine Kurve aufgenommen und daraus durch Extrapolation auf die Zeit 0, die Zeit des Abstellens des Luftstromes am Ebertapparat, die Wirkung der radioaktiven Substanzen zu dieser Zeit gefunden. Ist die so festgestellte Zerstreuung pro Sekunde $V_1$ Volt, so ist $V_1 . C_1/300$ der Sättigungsstrom, den diese Substanzen zur Zeit 0 zu unterhalten imstande sind, wenn $C_1$ die Kapazität des Untersuchungselektrometers bedeutet. Ist $C_2$ die Kapazität des Ebertapparates, so ist

$$\frac{V_1 . C_1}{300} = \frac{V_2 . C_2}{300},$$

wenn $V_2$ die Spannungsabnahme bedeutet, die die gleiche Substanzmenge gleichzeitig im Ebertapparat in der Zeiteinheit bewirkt hätte. Also

$$V_2 = \frac{V_1 . C_1}{C_2}.$$

$V_2$ wurde nach Anbringung einer Korrektion, die in Kap. 6 der Dissertation besprochen wird, in Abzug gebracht von dem Spannungsrückgang pro Sekunde am Ebertapparat während der Aspiration. Erst die so erhaltene Differenz ist dann maßgebend für die Wirkung der positiven Ionen.

Nach den Überlegungen p. 901 und 902 ist der prozentuale Betrag für die Beeinflussung der Zahl der negativen und positiven

Ionen ungefähr gleich. Es läßt sich also angenähert mit Hilfe der für die positiven Ionen experimentell gefundenen Beeinflussung die für die negativen Ionen zu berücksichtigende berechnen. In Tab. 2 finden sich eine Anzahl in dieser Weise durchgeführter Versuche zusammengestellt. Die einzelnen Rubriken sind ohne weiteres verständlich. Die anzubringenden Korrektionen sind gleich in Ionenzahlen gegeben.

Tabelle 2.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nummer | Aspirationszeit in Minuten | $n_+$ | $n_-$ | Aktivität des Niederschlages am Schlusse des Versuches | Durchschnittl. Aktivität in Prozenten der Schlußaktivität | Korrektion für $n_+$ | Korrektion für $n_-$ | $n_+$ korrigiert | $n_-$ korrigiert | $\frac{n_+}{n_-}$ |
| 1 | 17 | 664 | 500 | 38 | 71,5 | 27 | 20 | 637 | 480 | 1,33:1 |
| 2 | 17 | 1008 | 673 | 97 | 71,5 | 69 | 46 | 938 | 627 | 1,50:1 |
| 3 | 25,5 | 777 | 513 | 50 | 73,5 | 36,7 | 24 | 740 | 489 | 1,51:1 |
| 4 | 34 | 1058 | 819 | 53 | 73,5 | 39 | 30 | 1019 | 789 | 1,29:1 |
| 5 | 50 | 1215 | 958 | 42 | 71,0 | 30 | 23 | 1185 | 935 | 1,27:1 |
| 6 | 60 | 660 | 591 | 25 | 70,7 | 18 | 16 | 642 | 575 | 1,12:1 |
| 7 | 60 | 726 | 626 | 41 | 70,7 | 29 | 25 | 697 | 601 | 1,16:1 |
| 8 | 60 | 659 | 481 | 41 | 70,7 | 29 | 21 | 630 | 460 | 1,37:1 |
| 9 | 60 | 735 | 680 | 65 | 70,7 | 46 | 43 | 689 | 637 | 1,08:1 |
| 10 | 60 | 659 | 560 | 39 | 70,7 | 27 | 23 | 632 | 537 | 1,18:1 |
| | | | | | | | | | Mittel: | 1,28:1 |

Die Werte in Spalte 7 und 8 betragen ca. 4 Proz. der Werte in Spalte 3 und 4.

Die Versuche erstreckten sich über eine größere Zahl von Tagen, an denen die Witterungsverhältnisse vollständig verschieden waren.

Als Schlußresultat aus diesen Versuchen ergibt sich also:

1. Am Ebertschen Apparat wird die Zahl der positiven und negativen Ionen wegen der Beeinflussung durch die radioaktiven Stoffe um ca. 4 Proz. zu groß gefunden.

2. Das Durchschnittsverhältnis der Zahl der negativen Ionen zu der der positiven Ionen mit oder ohne Berücksichtigung des durch einen Niederschlag von radioaktiven Substanzen ein-

gehenden Fehlers wurde in diesen Versuchen gefunden zu 1 : 1,28.

### d) Beeinflussung der spezifischen Ionengeschwindigkeit am Ebert-Macheschen Apparat.

Die Bestimmung der Ionengeschwindigkeit geschieht am Ebertschen Apparat durch Zuhilfenahme des Macheschen Zusatzkondensators. Die Versuchsanordnung und Beobachtungsweise ist im wesentlichen dieselbe wie bei Bestimmung der Ionenzahl. Schon hieraus folgt, daß ein durch die radioaktiven Substanzen in die Beobachtung eingehender Fehler von derselben Größenordnung ist wie bei der Bestimmung der Ionenzahl. Nur wird hier aus früher auseinandergesetzten Gründen die Geschwindigkeit[1]) der Ionen im selben Verhältnis zu klein gefunden wie ihre Zahl zu groß. Aus äußeren Gründen war es mir nicht möglich, eine größere Zahl von Beobachtungen durchzuführen.

### 4. Folgerungen aus den quantitativen Untersuchungen.

Bezeichnen wir wieder die Geschwindigkeiten der positiven und negativen Ionen mit $v_p$ bzw. $v_n$, die Zahlen mit $n_p$ bzw. $n_n$, so lautete das Schlußresultat der Versuche am Ebertschen Apparat

$$n_n : n_p = 1 : 1{,}28.$$

Die mittlere Geschwindigkeit der positiven Ionen ist 1,3 cm/sec/Volt/cm, die der negativen Ionen 1,6 cm/sec/Volt/cm.[2]) Hieraus ergibt sich als Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten:

$$v_p : v_n = 1 : 1{,}23.$$

Berücksichtigt man, daß $n_n : n_p = 1 : 1{,}28$ und $v_p : v_n = 1 : 1{,}23$ als Mittelwerte gefunden sind, so kann man allgemein setzen:

$$n_n : n_p = v_p : v_n,$$

d. h.: *Der Durchschnittswert für das Verhältnis der Zahlen der freien Ionen in der Atmosphäre ist der reziproke Wert des Verhältnisses der Ionengeschwindigkeiten.*

---

1) Vgl. p. 904.

2) Rutherford-Aschkinass, Die Radioaktivität, 1907.

Dies mit Hilfe des Ebertschen Apparates gefundene Resultat, das durch die radioaktiven Substanzen der Atmosphäre nicht beeinflußt ist, ist aber dasselbe wie das am Gerdienschen Apparat unter Berücksichtigung dieser Beeinflussung gefundene:

$$n_p \cdot v_p = n_n \cdot v_n,$$

d. h. die Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft für positive und negative Elektrizität ist im allgemeinen gleich.

Betont muß werden, daß es sich hier um Durchschnittswerte aus einer größeren Zahl von Beobachtungen handelt, daß man jedoch nicht erwarten kann, daß eine einzelne Beobachtung dasselbe Resultat liefert. Denn bereits geringe Störungen, größere relative Feuchtigkeit, Sonnenstrahlen, Luftzug können das Einzelresultat stark beeinflussen. Hieraus aber folgt weiter, daß sich am Beobachtungsmaterial anderer Forscher ähnliche Verhältnisse zeigen müssen, sobald eine größere Zahl von Beobachtungen vorliegt, so daß Durchschnittswerte gebildet werden können. Sind getrennte Beobachtungen gemacht über Ionenzahl und Ionengeschwindigkeit, beispielsweise mit dem Ebertschen Apparat, so muß man auf Gleichheit der Anteile der positiven und negativen Ionen an der Leitfähigkeit der Atmosphäre kommen, wenn man die betreffenden Produkte

$$\varepsilon \cdot n_p \cdot v_p \quad \text{und} \quad \varepsilon \cdot n_n \cdot v_n$$

bildet. Denn wie oben gezeigt worden ist, werden die Werte für $n_p$ und $v_p$ durch die radioaktiven Substanzen bei den Messungen in verschiedenem Sinn beeinflußt, so daß auch ohne Anwendung der angegebenen Korrektion in diesem Fall ein angenähert richtiger Wert für $\varepsilon . n_p . v_p$ herauskommen muß, d. h. es muß sich auch an solchen Beobachtungen zeigen lassen, daß

$$\lambda_p = \varepsilon . n_p . v_p = \lambda_n = \varepsilon . n_n . v_n,$$

d. h.:

$$\lambda = \lambda_p + \lambda_n = 2\,\lambda_n .$$

Daß dem so ist, zeigen folgende Beispiele:

1. Elster und Geitel fanden in Mallorka[1]) mit dem Ebertschen Apparat in Verbindung mit dem Macheschen Zusatzkondensator folgende Mittelwerte:

1) J. Elster u. H. Geitel, Physik. Zeitschr. 7. p. 496. 1906.

| | |
|---|---|
| Zahl der positiven Ionen im cm³ . . . . | 761 |
| „ „ „ negativen „ „ „ . . . . | 721 |
| Beweglichkeit der positiven Ionen . . . . | 0,83 cm/sec/Volt/cm |
| „ „ negativen „ . . . . | 0,90 „ „ „ „ |

Dies gibt für das Verhältnis der Leitfähigkeit der Atmosphäre für positive und negative Elektrizität:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_n} = \frac{n_p \cdot v_p}{n_n \cdot v_n} = \frac{761 \cdot 0{,}83}{721 \cdot 0{,}90} = 1 : 1{,}02_7.$$

Die Leitfähigkeiten unterscheiden sich um nicht 3 Proz.

H. Mache und E. v. Schweidler fanden in Seewalchen[1]) in Oberösterreich ebenfalls mit einem Ebertschen Ionenzähler in Verbindung mit einem Macheschen Vorschaltkondensator folgende Mittelwerte aus Beobachtungen, die sich über die Zeit vom 7. bis 20. September erstreckten:

| | |
|---|---|
| Ionengehalt an positiven Ionen in E.S.E. pro cbm . . . | 0,441 |
| „ „ negativen „ „ „ „ „ . . . | 0,353 |
| Spezifische Geschwindigkeit der positiven Ionen . . . . | 1,02 |
| „ „ „ negativen „ . . . . | 1,25 |

Für das Verhältnis der spezifischen Leitfähigkeiten gibt das:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_n} = \frac{n_p \cdot v_p}{n_n \cdot v_n} = \frac{0{,}441 \cdot 1{,}02}{0{,}353 \cdot 1{,}25} = 1 : 0{,}981.$$

Die Leitfähigkeiten unterscheiden sich um nicht 2 Proz.

In beiden Beispielen liegen die geringen Abweichungen zudem nach verschiedenen Richtungen hin. In beiden Beispielen sind sowohl Ionenzahlen [761 gegen 1295[2]) für die positiven, 721 gegen 1040[1]) für die negativen Ionen] als auch die Ionengeschwindigkeiten [0,83 gegen 1,02 für die positiven, 0,90 gegen 1,25 für die negativen Ionen] wesentlich voneinander verschieden. Auch sind die einen Beobachtungen in unmittelbarer Nähe des Meeres, die anderen im Gebirge gemacht. Trotzdem liefern beide das gleiche Schlußresultat: *Die Ionenzahlen für die freien Ionen der Atmosphäre verhalten sich im Durchschnitt umgekehrt wie die zugehörigen Ionengeschwindigkeiten.*

1) H. Mache u. E. v. Schweidler, l. c.

2) Hier ist aus dem Ionengehalt in E.S.E. pro cbm die Ionenzahl im cm³ berechnet.

Burbank[1]), der auf freier See mit einem Gerdienschen Apparat Bestimmungen der Leitfähigkeit der Atmosphäre machte, findet nur sehr geringe Unterschiede der Leitfähigkeit für positive und negative Elektrizität. Das erklärt sich daraus, daß der Gehalt der Atmosphäre an festen radioaktiven Stoffen nach den bisher vorliegenden Beobachtungen auf dem Meere viel geringer ist als an der Küste oder gar auf dem festen Lande.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß es nicht angängig ist, mit einem Apparat, der unter der besprochenen Beeinflussung leidet, rasch hintereinander Versuche mit abwechselnd positiv und negativ geladenem Zerstreuungskörper zu machen. Wird unmittelbar nach einem Versuch mit negativ geladenem Zerstreuungskörper ein solcher mit positiv geladenem ausgeführt, so erhält man offenbar auch da noch etwas zu große Werte für den Spannungsrückgang, weil die auf dem Zerstreuungskörper abgesetzten radioaktiven Substanzen immerhin etliche Zeit bis zum völligen Abklingen brauchen. Wird demnach eine ganze Reihe von Versuchen rasch hintereinander ausgeführt, so können dadurch die Unterschiede immer mehr verwischt werden. Wird zwischen den einzelnen Versuchen je eine Pause von 8—10 Min. eingeschoben, so entgeht man dem Mißstand, auch bei positiv geladenem Zerstreuungskörper eine Beeinflussung zu erhalten. Es wird am praktischsten sein, mit mehreren gleichen, auswechselbaren Zerstreuungskörpern zu arbeiten, wenn man eine Serie von rasch aufeinander folgenden Versuchen durchführen will.

Für die Praxis luftelektrischer Messungen ergibt sich aus den bisherigen Betrachtungen folgendes:

Zur Bestimmung des spezifischen Leitvermögens der Atmosphäre würde, wenn keine Störungen in den Ionenverhältnissen der Atmosphäre vorhanden wären, eine Bestimmung mit positiv geladenem Zerstreuungskörper beim Gerdienschen Apparat genügen. Bei einer gleichzeitigen Bestimmung mit negativ geladenem Zerstreuungskörper deutet eine größere als die durch die besprochene Beeinflussung zu erklärende Abweichung des $\lambda_p$ von $\lambda_n$ auf eine zur Zeit der Messung bestehende Störung in den normalen Ionenverhältnissen der Atmosphäre.

1) J. E. Burbank, Terr. Magn. 10. p. 126—129. 1905.

Eine mit Ebertschen Apparaten gleichzeitig durchgeführte Messung der Ionenzahl und Ionengeschwindigkeiten vermag ein richtiges Bild der spezifischen Leitfähigkeit der Atmosphäre zu geben.

Es ist zu empfehlen, nach einer Messung den bisher negativ geladenen Zerstreuungskörper durch einen anderen zu ersetzen, wenn unmittelbar danach eine weitere Messung ausgeführt werden soll. Ein aktivierter Zerstreuungskörper ist jedoch nach kurzer Zeit wieder gebrauchsfähig.

Einzelne Messungen, beispielsweise der Zahl der positiven Ionen, geben in Verbindung mit gleichzeitiger Bestimmung des Gehaltes der Luft an festen radioaktiven Substanzen, die von einem Aspirationsapparat zurückgehalten werden, ein etwas genaueres Bild der tatsächlichen Verhältnisse.

### 5. Ein von der Beeinflussung freier Apparat.

Zur Entscheidung der Frage, ob es nicht möglich ist, einen Apparat zu konstruieren, bei dem eine solche Beeinflussung durch die radioaktiven Substanzen nicht oder nur in unmerkbarer Weise statthat, müssen wir zunächst klarstellen, wodurch im letzten Grunde dieser Fehler in die Beobachtung und Berechnung hineinkommt, dann, wie das Verhältnis des Fehlers zum Gesamtresultat so zurückgedrängt werden kann, daß der Fehler nicht mehr in Betracht kommt.

Das Grundprinzip derartiger Beobachtungen ist ganz allgemein das folgende[1]): Vorhanden ist ein Gas (in unserem Falle die atmosphärische Luft), das beständig gleichmäßig ionisiert wird, in dem sich also ein stationärer Zustand herausgebildet hat. In der Volumeinheit des Gases sind demnach eine bestimmte Anzahl positiver und eine bestimmte Anzahl negativer Ionen vorhanden. Da sich bei unserer Annahme die Ionisierungsstärke des oder der Ionisatoren nicht ändern soll, so verschwinden in der Zeiteinheit durch Molisierung ebensoviel Ionen, als in der Zeiteinheit neu entstehen. In dieses Gas wird nun der betreffende Apparat hineingebracht; d. h. mit anderen Worten: In diesem Gas werden zwei Elek-

1) E. Riecke, Lehrbuch der Physik, 2. Aufl. p. 367—374. Leipzig 1902; J. Stark, Die Elektrizität in Gasen, p. 32—45. Leipzig 1902; H. Schering, l. c.

troden mit entgegengesetzter Spannung aufgestellt. Es entsteht in dem ionisierten Gas ein Strom, Ionen werden zu den Elektroden hingetrieben. Je größer die Flächendichte an den Elektroden und je geringer der Abstand der Elektroden, desto stärker ist dann das elektrische Feld zwischen den Elektroden. Nun sind für die betreffenden Strömungen und damit auch je nach der Art und Weise, in der die Apparate auf die Strömungen reagieren, drei Fälle zu unterscheiden[1]):

1. Die Flächendichte auf den Elektroden sei sehr gering, der Abstand sehr groß, d. h. das elektrische Feld zwischen den Elektroden sei sehr schwach. Dann werden durch den Strom nur eine geringe Zahl von Ionen gegen die Elektroden getrieben, die Ionendichte — Zahlen der Ionen in der Volumeinheit — bleibt also nahezu gleich der zu Beginn des Versuchs vorhandenen; die in der Zeiteinheit neu entstehenden Ionen verschwinden durch Molisierung. Denkt man sich die Elektroden durch eine Röhre von 1 qcm Querschnitt verbunden, so läßt sich der Strom an einer beliebigen Stelle dieser Röhre berechnen, wenn man die elektrische Feldstärke an dieser Stelle kennt. Sei $n_p$ die spezifische Ionendichte, $v_p$ die spezifische Ionengeschwindigkeit der positiven Ionen an der betreffenden Stelle, $n_n$, $v_n$ die entsprechenden Größen für die negativen Ionen, $\varepsilon$ die Ladung des Ions, $f$ die Feldstärke, so ist der Strom

$$i = f \cdot \varepsilon (n_p \cdot v_p + n_n v_n).$$

An der Oberfläche der Elektroden tritt an Stelle der Feldstärke die Flächendichte an dieser Stelle, multipliziert mit $4\pi$.

Nun ist $\varepsilon$, die Ladung des Ions, eine universelle Konstante, $v_p$, $v_n$ sind nur von der Art des Gases und seiner thermodynamischen Beschaffenheit abhängig, $n_p$ und $n_n$, die Ionendichten, sollten durch den Strom nicht geändert werden. Der Strom ist also proportional der Feldstärke, oder, an der Oberfläche der Elektrode, proportional der Flächendichte. Schering[2]) bezeichnet einen solchen Strom als „freien Strom".

1) Die Darstellung über die Strömung in diesen drei Fällen stimmt im wesentlichen, zum Teil wörtlich überein mit der von Schering (l. c.) p. 17 und 18 gegebenen Auseinandersetzung über freien und gesättigten Strom.

2) H. Schering, l. c. p. 10.

2. Das elektrische Feld zwischen den Elektroden werde verstärkt. Nun wird zunächst eine größere Zahl der vorhandenen Ionen an die Elektroden geführt, die Ionendichte sinkt, die Molisierungsstärke wird zurückgedrückt. Diese Abnahme von Ionendichte und Molisierungsstärke setzt sich so lange fort, bis wieder ein stationärer Zustand erreicht ist, d. h. bis die in der Zeiteinheit neu entstehenden Ionen die durch den Strom fortgeführten und die durch Molisierung vernichteten Ionen zu ersetzen vermögen. Der Strom selbst an einer bestimmten Stelle ist gleich dem an der Stelle herrschenden Leitvermögen, multipliziert mit der Feldstärke. Es stellen sich an verschiedenen Stellen des Raumes zwischen den Elektroden verschiedene Ionendichten ein je nach den Feldstärken an den betreffenden Stellen. Mit wachsender Feldstärke nimmt die Ionendichte und damit das Leitvermögen ab, der Strom kann also nicht mehr proportional der Feldstärke sein. Wir haben „unvollständig gesättigten Strom" vor uns. Bei gleicher Flächendichte der Elektroden ist der unvollständig gesättigte Strom schwächer als der freie Strom, da die spezifische Ionendichte geringer ist.

3. Das elektrische Feld werde weiter verstärkt; die Zahl der vom Strom weggeführten Ionen wird noch größer als unter 2. Die Zahl erreicht ein Maximum, wenn die Feldstärke so gesteigert ist, daß alle in der Zeiteinheit neu entstehenden Ionen vom Strom weggeführt werden. Die spezifische Ionendichte ist sehr klein, die von ihr abhängige Molisierung sehr gering; bei wachsender Feldstärke kann der Strom nicht mehr wachsen. Der Strom ist Sättigungstrom. Der Sättigungsstrom ist gleich der Zahl der in der Zeiteinheit zwischen den Elektroden entstehenden Ionen multipliziert mit der Ionenladung. Bei gleicher Flächendichte ist der Sättigungsstrom sehr viel schwächer als der freie Strom.

Um nun ein Bild zu erhalten von den Verhältnissen, in denen die von uns besprochene Beeinflussung durch die radioaktiven Substanzen bei den drei Stromarten statthaben kann, denke man sich drei Apparate in das ionisierte Gas gebracht, d. h. man denke sich die eine Elektrode geerdet, die andere vertreten durch einen geladenen Zerstreuungskörper. Der erste Apparat arbeite mit Sättigungsstrom, bestimme also das

Produkt aus den in der Zeiteinheit neu entstehenden Ionen und ihrer Ladung durch die Wirkung auf die geladene Elektrode, also durch die Spannungsabnahme derselben unter Berücksichtigung ihrer Kapazität. Der zweite Apparat arbeite mit ungesättigtem Strom, messe aber nicht diesen ungesättigten Strom, sondern gestatte die Bestimmung der Wirkung der vom Strom weggeführten Ionen auf die geladene Elektrode. Der dritte Apparat schließlich bestimme den freien Strom selber.

Nun werde ein neuer Ionisator in das zu untersuchende Gas gebracht. Seine Ionisationskraft betrage nur einen geringen Bruchteil der Gesamtionisationskraft, die den vorhandenen Ionisationszustand bewirkt hat. Der neue Ionisator sei zunächst gleichmäßig im gesamten Gasvolumen verteilt. Der Ionisationszustand des Gesamtvolumens wird um einen kleinen Bruchteil gesteigert. Prozentual wird bei dieser Verteilung des Ionisators die von den drei Apparaten angezeigte Änderung gleich sein.

Der Ionisator, der in Gestalt eines festen Körpers gegeben sei, werde nun zweitens aus dem Gas herausgenommen und lege sich in feinster Verteilung auf die negativ geladenen Elektroden. (Wir denken uns jeden der drei Apparate in einem besonderen Gasvolumen. In den drei Gasvolumen herrschen natürlich genau die gleichen Verhältnisse.) Die durch den Ionisator erzeugten positiven Ionen werden dann zum weitaus größten Teil direkt an der negativ geladenen Elektrode neutralisiert. Da es sich um Ionen handelt, die in der unmittelbarsten Umgebung der geladenen Elektroden entstehen, so können wir die vereinfachende Annahme machen, daß diese Ionen bei den drei Apparaten zum weitaus größten Teil neutralisiert werden. Es findet also an der negativ geladenen Elektrode eine Spannungsabnahme pro Sekunde statt, die proportional ist dem Produkt aus der Zahl der von jenem Ionisator in der Sekunde erzeugten Ionen und ihrer Ladung. Die Zahl der in der Zeiteinheit neutralisierten Ionen sei $N$, ihre Ladung ist $\varepsilon$. Die Elektrode erleidet also durch den auf ihr niedergeschlagenen Ionisator eine Einwirkung, die gleich ist der Wirkung eines Sättigungsstromes von der Größe $N . \varepsilon$ E.S.E.

Wird nun bei den drei Apparaten das Resultat gefunden aus der Spannungsabnahme der Elektrode, d. h. hier des Zerstreuungskörpers, so wird offenbar dies Resultat beeinflußt durch die Größe $N.\varepsilon$.

Wir machen zunächst die vereinfachende Annahme, daß bei jedem der drei Apparate sich während der Messung der gesamte Ionisator niedergeschlagen habe auf der Elektrode. Dann ist der absolute Betrag der Beeinflussung bei den drei Apparaten gleich, nämlich gleich $N.\varepsilon$. Der prozentuale Betrag der Beeinflussung dagegen, also die Beeinflussung in ihrem Verhältnis zum Gesamtresultat des Apparates, ist bei den drei Apparaten verschieden nach der Größe des von dem einzelnen Apparate gelieferten Gesamtresultates, selbstverständlich angegeben in denselben Einheiten wie $N.\varepsilon$ und berechnet für dieselbe Zeit wie $N.\varepsilon$. Haben wir diese Beeinflussung als einen in die Beobachtung eingehenden Fehler anzusehen, so ist dieser Fehler demnach um so größer, je kleiner das Gesamtresultat des Apparates ist im Verhältnis zu der Größe $N.\varepsilon$.

Bei dem mit Sättigungsstrom arbeitenden Apparat ist das Verhältnis des Fehlers zu der Gesamtleistung das Verhältnis $N$ zu der Zahl der in derselben Zeit wie $N$ neu entstehenden Ionen. Bei dem mit ungesättigtem Strom arbeitenden Apparat: $N$ zu der Zahl der in der Zeiteinheit vom Strom an die Elektrode geführten Ionen; bei dem mit freiem Strom arbeitenden Apparat: $N\varepsilon$ zu dem unter den Ionisationsbedingungen und der Flächendichte an der Elektrode möglichen freien Strom, also $N\varepsilon$ zu dem Produkt aus Flächendichte, Ionenzahl, Ionengeschwindigkeit und Ionenladung.

Das Verhältnis steht am ungünstigsten für den Apparat mit ungesättigtem Strom (natürlich unter unseren Versuchsbedingungen, daß dieser Apparat die Wirkung der an die Elektrode getriebenen Ionen anzeige). Das Verhältnis wird um so besser, je größer die Zahl der vom Strom fortgeführten Ionen wird. Der Grenzfall nach dieser Richtung hin ist wieder gegeben durch den Eintritt des Sättigungsstromes. Am günstigsten gestaltet sich das Verhältnis jedoch für den Apparat mit freiem Strom. Der Fehler wird so vielmal kleiner gegen-

über dem Fehler an dem Apparat mit Sättigungsstrom, als der freie Strom größer ist als der gesättigte bei gleichen Flächendichten der Elektroden. Diese Überlegungen sind gemacht unter der Annahme, daß sich der Ionisator bei den drei Apparaten während des Versuches in gleicher Menge auf den Zerstreuungskörper absetzt.

Als ein derartiger, während des Versuches neu hinzutretender Ionisator sind nun die festen radioaktiven Substanzen anzusehen, die während einer Messung mit negativ geladenem Zerstreuungskörper sich auf diesem absetzen, auf dem positiv geladenen dagegen nicht oder doch nur in unmerkbarer Menge. Wenden wir obige Überlegungen auf diesen Fall an, so müssen wir zunächst die Annahme fallen lassen, daß der Ionisator bei den drei Typen der besprochenen Apparate sich in gleicher Menge absetze. Ein Niederschlagen der Substanzen auf den Zerstreuungskörpern wird nur deshalb möglich, weil sich diese Induktionsträger einem elektrischen Felde gegenüber ähnlich verhalten wie positive Ionen; d. h. sie erhalten eine Geschwindigkeit, durch die sie dann auf die negative Elektrode getrieben werden. Die Geschwindigkeit ist etwa gleich der zehnfachen der Geschwindigkeit der positiven Ionen.[1]) Daraus folgt, daß eine Anreicherung an solchen Substanzen hauptsächlich da statthaben muß, wo Ströme arbeiten, die auch Ionen in bedeutender Menge an die Elektroden bringen, also bei Sättigungsstrom und bei ungesättigtem Strom. Dagegen wird im Verhältnis hierzu die an den Zerstreuungskörper transportierte Menge äußerst gering werden bei einem Strom, der keine merkliche Ionenmenge an die Elektrode führt, also bei freiem Strom.

Auf die Praxis luftelektrischer Messungen angewandt, heißt dies: *Eine Beeinflussung der Resultate luftelektrischer Messungen durch die radioaktiven Substanzen der Atmosphäre findet vornehmlich bei Apparaten statt, die mit ungesättigtem oder mit gesättigtem Strom arbeiten. Ein Apparat, der der Beeinflussung in für die Praxis nicht oder kaum merklicher Weise unterliegen soll, muß mit freiem Strom arbeiten.*

1) H. Gerdien, Physik. Zeitschr. 6. p. 465—472. 1905.

Das größte Interesse bieten daher von unserem Standpunkt aus Resultate, die mit dem einzigen zurzeit gebräuchlichen Apparate gewonnen sind, der lediglich mit freiem Strom arbeitet: der von Schering in seiner Dissertation vorgeschlagene Apparat für quantitative absolute Zerstreuungsmessungen.[1]) Berechnet wird hier der freie Strom in eine Kugel von 5 cm Radius. Der Apparat liefert daraus direkt die Zerstreuungskoeffizienten

$$a_- = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot n_p \cdot v_p,$$

$$a_+ = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot n_n \cdot v_n.$$

Für die gleiche Ionendichte würde der Ebertsche Apparat, da er den Sättigungsstrom mißt, bei gleichzeitiger Messung liefern das Produkt: $n_p \cdot \varepsilon$ bzw. $n_n \cdot \varepsilon$. Die von beiden Apparaten gelieferten Zahlenwerte verhalten sich also wie

$$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot v_p} = \text{ca. } \frac{1}{16}.$$

Nach den Überlegungen p. 922 und 923 käme, da für den Ebertschen Apparat die gesuchte Beeinflussung nach p. 914 im Durchschnitt ca. 4 Proz. beträgt, für den Scheringschen Apparat eine Beeinflussung der Resultate um ca. $^1/_4$ Proz. in Rechnung. Dieser in der Praxis luftelektrischer Messungen nicht zu konstatierende Fehler reduziert sich noch einmal nach p. 924 auf eine überhaupt unmerkliche Differenz, da die vom Strom transportierte Menge radioaktiver Träger bei freiem Strom unmerklich klein ist.

Daraus folgt, daß die Resultate des Scheringschen Apparates von der Beeinflussung durch die radioaktiven Substanzen der Atmosphäre praktisch frei sind, daß der Apparat also nach dieser Richtung hin vollkommen einwandsfreie Resultate liefert. „Berechnet man (am Scheringschen Apparat) den Zerstreuungskoeffizienten für die Sekunde als Zeiteinheit, und dividiert durch $4\pi$, so erhält man das unipolare spezifische Leitvermögen der Luft in absolutem Maß.“ [1]) Nach p. 896, 910 und 915 ist

$$\varepsilon \cdot n_p \cdot v_p = \varepsilon \cdot n_n \cdot v_n;$$

1) H. Schering, l. c.

daraus würde für den Scheringschen Apparat folgen:

$$4\pi \cdot \varepsilon \cdot n_p \cdot v_p = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot n_n \cdot v_n .$$

Dies aber sind die Schlußresultate des Scheringschen Apparates, die Größen $a_-$ und $a_+$; *d. h. der Scheringsche Apparat müßte direkt als Resultat liefern*

$$a_- = a_+ ,$$

*ohne daß eine Korrektion wegen der auf dem negativ geladenen Zerstreuungskörper sich auch hier absetzenden radioaktiven Substanzen angebracht werden müßte.*

*Dies ist tatsächlich der Fall.* In den drei Beobachtungssätzen vom 3., 4. und 9. März gibt Schering an:

| | | |
|---|---|---|
| | 3. März: | |
| vormittags: | $a_- = 0{,}086$ | $a_+ = 0{,}086$ |
| nachmittags: | $a_- = 0{,}055$ | $a_+ = 0{,}058$ |
| | $= 0{,}056$ | $= 0{,}052$ |
| | $= 0{,}049$ | $= 0{,}045$ |
| Mittelwert: | $a_- = 0{,}061$ | $a_+ = 0{,}060$ |
| | 4. März: | |
| | $a_- = 0{,}050$ | $a_+ = 0{,}048$ |
| | 9. März: | |
| | | $a_+ = 0{,}063$ |
| | $a_- = 0{,}077$ | $= 0{,}074$ |
| | $= 0{,}082$ | $= 0{,}084$ |
| | $= 0{,}092$ | $= 0{,}156$ [1]) |
| | $= 0{,}119$ | |
| Mittelwert: | $a_- = 0{,}093$ | $a_+ = 0{,}094$ |
| Hauptmittel: | $a_- = 0{,}068$ | $a_+ = 0{,}068$ |

d. h.

$$a_- = a_+ .$$

Die Übereinstimmung ist vollkommen.

Diese interessanten Tatsachen bilden gerade deshalb eine wesentliche und zwar experimentell gefundene Stütze des Satzes

1) Dieser stark abweichende Wert ist auch von Schering als fraglich bezeichnet.

von der Gleichheit der Leitfähigkeit der Atmosphäre für positive und negative Elektrizität, weil der Scheringsche Apparat nach durchaus anderen Voraussetzungen arbeitet als der Gerdiensche, an dem der Satz durch Anwendung einer Korrektion gefunden wurde, und als der Ebertsche, an dem er indirekt bestätigt wurde.

Schering hatte bei den obigen Versuchen zugleich eine Bestimmung der Ionenzahlen durchgeführt, da er durch Kombination der gefundenen Zerstreuungskoeffizienten und der Ionenzahlen die Ionengeschwindigkeiten bestimmen wollte. Die Eigentümlichkeit der Übereinstimmung der $a_-$ und $a_+$ war ihm bereits aufgefallen. Denn er sagt in der Zusammenfassung der Resultate: „Auffällig besonders bei 1 (Aufnahmen vom 3. März) ist, daß das Leitvermögen der positiven und negativen Ionen gleich ist, während die Dichte der mit geringerer Geschwindigkeit begabten positiven Ionen größer ist als die der negativen.“[1]) Doch geht Schering nicht weiter darauf ein, da er nach dem bis dahin vorliegenden Beobachtungsmaterial anderer Forscher, an dem die Beeinflussung durch die radioaktiven Substanzen nicht berücksichtigt ist, diese Übereinstimmung als eine zufällige ansehen mußte.

An der Hand des bei den Versuchen mit dem Ebertschen Apparat gewonnenen Zahlenmaterials ist dann eine Berechnung des Gehaltes der Luft an festen radioaktiven Substanzen durchgeführt worden. Raummangels wegen muß auf die Dissertation, Kap. 7, verwiesen werden. — Die radioaktiven Stoffe, die mit einem bei Sättigungsstrom arbeitenden Aspirationsapparat aus 1 cbm Luft abfangbar sind, vermögen in Gießen einen Sättigungsstrom von $7{,}16 \cdot 10^{-5}$ E.S.E. im cbm zu unterhalten.

Dem so bestimmten Sättigungsstrom fester radioaktiver Substanzen steht gegenüber der gleichzeitig bestimmte für dieselben Verhältnisse und Größen berechnete Ionengehalt der positiven Ionen von

$$J_1 = 2{,}6_2 \cdot 10^{-1} \text{ E.S.E. pro cbm}$$

(berechnet nach den Werten der Tab. 9 der Dissertation).

1) H. Schering, l. c. p. 45.

Daß bei solchen Unterschieden in den Größenordnungen trotzdem am selben Apparat, dem Ebertschen Ionenzähler, eine Beeinflussung des Resultates von ca. 4 Proz. eintreten kann, erklärt sich sehr einfach in folgender Weise: Bei der Bestimmung der Ionenzahl wirken immer die augenblicklich im Aspirationsrohr vorhandenen Ionen auf den Spannungsrückgang des Elektrometers ein, und zwar dadurch, daß sie vernichtet werden, indem sie auf die geladene Elektrode fallen und dabei ihre Ladung abgeben. Die auf die Elektrode fallenden radioaktiven Substanzen dagegen sind nach dem Auftreffen nicht vernichtet, sondern wirken weiter ionisierend. Nach einer längeren Aspirationszeit wirken also die sämtlichen bis dahin angesammelten radioaktiven Substanzen, soweit sie nicht zerfallen sind, neben der Zahl der augenblicklich im Aspirationsrohr vorhandenen Ionen auf den Spannungsrückgang des Elektrometers ein.

### C. Zusammenfassung.

Die Ergebnisse dieser Arbeit lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

1. Die Ergebnisse luftelektrischer Messungen, bei denen Blattelektrometer mit geladenen Zerstreuungskörpern verwandt werden, erfahren im allgemeinen eine Beeinflussung durch die festen radioaktiven Substanzen der Atmosphäre. Bei negativ geladenem Zerstreuungskörper findet auf diesem eine Anreicherung von festen radioaktiven Substanzen statt. Dies hat ein stärkeres als das durch die natürlichen Verhältnisse der positiven Ionen bedingte Wandern des Aluminiumblättchens zur Folge. Unter Umständen kann bei Röhrenkondensatoren auch bei positiv geladenem Zerstreuungskörper eine entsprechende Beeinflussung statthaben durch die nun auf der Innenseite des äußeren Zylinders sich absetzenden Substanzen.

Am Ebertschen Aspirationsapparat fällt in der Ebene die Zahl der Ionen um ca. 4 Proz. zu groß, die Geschwindigkeit um etwa denselben Betrag zu klein aus.

Am Gerdienschen Aspirationsapparat erhält man bei normalen Verhältnissen unter Berücksichtigung des obigen

Umstandes gleichen Spannungsrückgang für positiv und negativ geladenes Elektrometer.

Am Elster-Geitelschen Zerstreuungsapparat kann die Größe der vorhandenen Beeinflussung nicht zahlenmäßig angegeben werden.

Falls die mit dem Elster-Geitelschen Apparat erhaltenen Werte zur Berechnung der Unipolarität benutzt werden, fällt auch diese Größe etwas zu groß aus.

2. Der letzte Grund für eine merkbare derartige Beeinflussung ist vom Standpunkt der Ionentheorie aus darin zu suchen, daß die genannten Apparate mit gesättigtem bzw. ungesättigtem Strom arbeiten. Ein Apparat, bei dem lediglich freier Strom zur Wirkung kommt, ist praktisch frei von der Beeinflussung.

3. Unter Berücksichtigung dieser Beeinflussung liefern die untersuchten Apparate das gemeinsame Resultat:

Die Anteile der positiven und negativen freien Ionen an dem spezifischen elektrischen Leitvermögen der Atmosphäre, d. h. die Produkte $\varepsilon . v_p . n_p$ und $\varepsilon . v_n . n_n$, sind gleich.

In der Atmosphäre wird also, wie sich auch theoretisch ableiten läßt, ein stationärer Zustand in der Weise angestrebt, daß das Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten zugleich das reziproke Verhältnis der Ionenzahlen ist. Dieser Endzustand ist begründet in der verschiedenen Beeinflussung der positiven und negativen Ionen durch die Adsorption an Oberflächen, Staub, Rauch, Wasserdampf usw. Als regulierendes Prinzip für diesen Endzustand und damit für das Überwiegen der freien positiven Ionen über die freien negativen in der Atmosphäre ergibt sich dabei die verschiedene Beweglichkeit der positiven und negativen Ionen.

4. Aus der Menge der radioaktiven Substanzen, die mit einem bei Sättigungsstrom arbeitenden Aspirationsapparat abgefangen werden, läßt sich der Sättigungsstrom berechnen, den diese Substanzen pro cbm Luft zu unterhalten vermögen. Er berechnet sich in Gießen für die in einem Aspirationsapparat abgefangenen Substanzen zu $J = 7{,}16 . 10^{-5}$ E.S.E.

Die vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Gießen ausgeführt. Seinem Leiter, Hrn. Prof.

Dr. W. König, bin ich für das liebenswürdigste Entgegenkommen zu dauerndem Dank verpflichtet. Hr. Privatdozent Dr. H. W. Schmidt, der mich zuerst zu wissenschaftlichem Arbeiten anregte, hat mich auch bei dieser Arbeit in der Ausführung und Abfassung mit seinem Rate unterstützt. Es ist mir eine besondere Freude, Hrn. Dr. Schmidt auch an dieser Stelle für alles herzlich danken zu können.

München, Physik. Institut der Technischen Hochschule,
12. November 1907.

(Eingegangen 14. November 1907.)

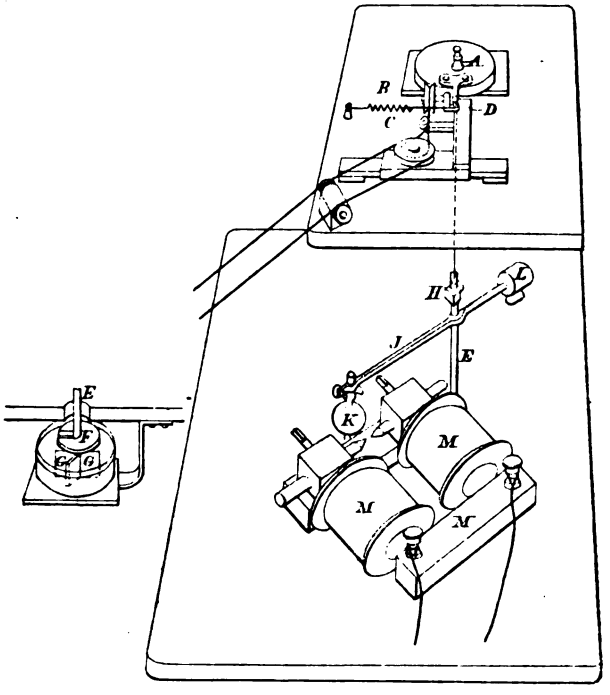
## 5. *Das magnetische Verhalten von Luft, Argon und Helium in Beziehung zu Sauerstoff;* von *Paul Tänzler.*

Auf freundliche Anregung des Hrn. Geh. Reg.-Rat. Prof. Dr. Dorn untersuchte ich im Physikalischen Institute der Universität Halle das magnetische Verhalten der Edelgase Argon und Helium. Die einzelnen Methoden, die bisher angewandt wurden, um über den Magnetismus der verschiedenen Körper, besonders der Gase, Aufschluß zu erhalten, sind in G. Wiedemann, „Die Lehre von der Elektrizität" Bd. III. p. 916ff. 1895 angegeben. Für mich kam in etwas abgeänderter Form ein Verfahren in Betracht, das G. Wiedemann benutzte, um Beziehungen des magnetischen Momentes der Körper zu ihrer chemischen Zusammensetzung festzustellen.

In Anlehnung an G. Wiedemann[1]) diente folgender Torsionsapparat: Eine Metallplatte mit dem Torsionskopf $A$ war auf ein dickes, in die Wand des Zimmers eingegipstes Holzbrett aufgeschraubt. Durch die Schraube $B$ und die ihr entgegenwirkende Feder $C$ konnte der Arm $D$ und damit auch der mit $D$ fest verbundene Torsionskopf $A$ in der einen oder anderen Richtung gedreht werden. Dieses Drehen geschah durch eine Schnur, die sich um die Schraube $B$ legte und durch geeignete Übertragung zu dem etwa 3 m entfernten Beobachter führte. An dem Torsionskopf war ein 0,84 m langer, 0,25 mm dicker vertikaler Draht aus Platin–Iridium angelötet. Dieser Draht trug weiterhin den aus Elektrolyt–Kupfer hergestellten Stab $E$ mit den Gewichten $F$ und den Flügeln $G$, die zur Dämpfung der Schwingungen in Paraffinum liquidum tauchten. An dem Stab $E$ war außerdem der horizontale Arm $J$ und der Spiegel $H$ befestigt, auf den ein Fern-

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. Nr. 9. 1865.

rohr mit Skala eingestellt war. Die Kugel *K* mit dem zu untersuchenden Gase wurde in die Fassung des Armes *J* gebracht. Eine Marke an dem Halse der Kugel ermöglichte, dieselbe stets genau an die gleiche Stelle des Magnetfeldes zu bringen. Das Gewicht der Kugel *K* war durch das Laufgewicht *L* kompensiert. Das Magnetfeld wurde durch den Elektromagneten *M* erzeugt, der derartig auf einem ebenfalls in der Wand eingegipsten starken Brett fixiert war, daß die




Kugel *K* sich in der Ruhelage des Apparates an einer möglichst wirksamen Stelle des Magnetfeldes (Stelle schnellsten Abfalles) befand. Der ganze Apparat befand sich in einem geschlossenen Gehäuse aus starker Pappe, welches ihn vor Luftströmungen vollkommen schützte und nur an der dem Fernrohr zugekehrten Seite eine kleine Öffnung hatte. Die Pappe war außerdem mit Goldpapier überzogen, und dieses wiederum zur Erde abgeleitet.

Von elastischer Nachwirkung war der Apparat merklich frei. Um dies festzustellen, wurde mehrere Male eine Ablenkung von 144—171 mm 20, 30 und 40 Min. lang erzeugt. Nach Aufhebung der ablenkenden Kraft kehrte der Apparat jedesmal wieder in die Ruhelage zurück. Die Differenzen betrugen nur Bruchteile eines Millimeters, lagen also innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler.

Der Gang der Versuche war nun folgender: Zunächst wurde der scharf evakuierte Ballon in die Fassung des Armes $J$ gebracht und die dazugehörige Ruhelage abgelesen.[1]) Darauf wurde ein Strom von 2 bzw. 3 Amp. durch die Wickelung des Elektromagneten gesendet; der Ballon erlitt wegen des Diamagnetismus von Glas eine Abstoßung. Nun wurde an der Schnur so lange der abstoßenden Kraft entgegengezogen, bis der Spiegel wieder genau die Ruhelage anzeigte. Der Strom wurde jetzt unterbrochen, und durch die Aufhebung der Drillung des Platin–Iridiumdrahtes ergab der Spiegel eine Ablenkung, die dem Diamagnetismus des Glases proportional sein mußte. Dieser Versuch, wie auch alle späteren, wurde mehrere Male wiederholt. Darauf wurde der Ballon mit Luft, später mit Sauerstoff, Argon, Helium und zum Schlusse noch einmal mit Luft unter gemessenem Druck gefüllt und dieselben Versuche durchgeführt. Da, wie schon erwähnt, der Ballon stets an dieselbe Stelle des Magnetfeldes gebracht wurde und auch stets der gleichstarke Strom zur Erregung des Feldes diente, so mußte eine Vergleichung der erreichten Ablenkungen einen Schluß auf den Para- bzw. Diamagnetismus der betreffenden Gase zulassen. Vor und nach jeder Beobachtungsreihe mit einem Gase wurde stets der evakuierte Ballon untersucht. Obwohl sich diese Untersuchungen auf einen Zeitraum von 4 Monaten erstreckten, ergaben die Beobachtungen doch stets bis auf Bruchteile eines Millimeters dieselben Resultate. Die erhaltenen Werte sind in den folgenden Tabellen enthalten.

---

1) Diese Ruhelage wurde allen Beobachtungen zu Grunde gelegt. Da einerseits der Spiegel $H$ und der Elektromagnet $M$, andererseits das Fernrohr mit Skala während sämtlicher Untersuchungen genau an denselben Stellen verblieben, so mußte also bei konstanter Ruhelage der Ballon stets sich an derselben Stelle des magnetischen Feldes befinden.

Tabelle I.

| a) Ballon luftleer. | | b) Ballon mit trockener kohlensäurefreier Luft. Druck = 754,9 mm. | | c) Ballon luftleer. |
|---|---|---|---|---|
| Ausschlag in mm bei | | Ausschlag in mm bei | | Ausschlag in mm bei |
| 3 Amp. | 2 Amp. | 3 Amp. | 2 Amp. | 2 Amp. |
| 138,0 | 58,7 | 111,0 | 47,8 | 57,9 |
| 138,0 | 57,9 | 110,9 | 47,0 | 58,0 |
| 138,5 | 57,5 | 110,7 | 47,1 | 58,1 |
| | | 110,1 | 47,9 | |
| Mittel: 138,17 | 58,03 | 110,8 | 47,4 | Mittel: 58,00 |
| ± 0,22 | ± 0,44 | Mittel: 110,70 | 47,44 | ± 0,07 |
| | | ± 0,24 | ± 0,33 | |

Vereinigt man aus Tab. I a) und c) die Versuche mit dem luftleeren Ballon, die vor und nach den Versuchen mit Luft angestellt wurden, zu einem Mittelwert und vergleicht diesen Mittelwert mit dem für Luft gefundenen, so ergibt sich *für Luft ein Paramagnetismus*, der bei einer Stromstärke von 3 Amp. 138,17 — 110,70 = 27,47 mm, bei einer Stromstärke von 2 Amp. 58,02 — 47,44 = 10,58 mm Ausschlag verursachte. Durch Reduktion auf 760 mm Druck und 0° erhält man 28,49 mm bzw. 10,97 mm Ausschlag.

Tabelle II.

| a) Ballon mit Sauerstoff. Druck = 762,2 mm. | | b) Ballon luftleer. | |
|---|---|---|---|
| Ausschlag in mm bei | | Ausschlag in mm bei | |
| 3 Amp. | 2 Amp. | 3 Amp. | 2 Amp. |
| 26,2 | 9,1 | 137,0 | 58,1 |
| 26,5 | 9,7 | 137,0 | 58,5 |
| 26,0 | 9,5 | Mittel: 137,00 | 58,30 |
| 26,9 | 9,1 | ± 0,00 | ± 0,20 |
| 26,1 | 9,0 | | |
| 27,0 | 9,4 | | |
| 26,9 | 9,1 | | |
| Mittel: 26,51 | 9,27 | | |
| ± 0,36 | ± 0,22 | | |

Aus Tab. I c) und II b) bekommt man für den evakuierten Ballon die Mittelwerte 137,00 für 3 Amp. und 58,15 für 2 Amp.

Diese Werte mit denen der Tab. II a) vereinigt, geben *für Sauerstoff einen Paramagnetismus*, der für die Stromstärke von 3 Amp. 137,00 — 26,51 = 110,49 mm und für die Stromstärke von 2 Amp. 58,15 — 9,27 = 48,88 mm Ausschlag erzeugt. Reduziert man diese Beträge auf 760 mm Druck und 0°, so erhält man 113,61 mm und 50,26 mm Ausschlag. Das Verhältnis von Luft zu Sauerstoff würde also nach den Resultaten der Tabellen I und II für 3 Amp. 0,251 und für 2 Amp. 0,218 betragen. Zur Aufklärung der Differenz dieser Werte wurden am Schlusse der Arbeit noch einmal Luft und Sauerstoff untersucht. Hierbei wurden übereinstimmende Resultate erhalten; die diesbezüglichen Angaben finden sich auf p. 937.

Die nach den Versuchen mit Sauerstoff angestellten Beobachtungen mit *Helium* ergaben bei einem Druck von etwa 1 Atm. eine Andeutung diamagnetischen Verhaltens. Daher wurde später der Druck auf etwa 2 Atm. gesteigert.

Zunächst wurden jedoch Versuche mit Argon angestellt; die betreffenden Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Tabelle III.

| a) Ballon luftleer. | | b) Ballon mit Argon. Druck = 763,6 mm. | | c) Ballon luftleer. | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ausschlag in mm bei | | Ausschlag in mm bei | | Ausschlag in mm bei | |
| 3 Amp. | 2 Amp. | 3 Amp. | 2 Amp. | 3 Amp. | 2 Amp. |
| 137,0 | 58,0 | 145,0 | 61,9 | 137,5 | 58,0 |
| 137,0 | 57,8 | 146,5 | 61,8 | 137,0 | 58,0 |
| Mittel: 137,00 | 58,1 | 145,0 | 61,9 | Mittel: 137,25 | 58,00 |
| ± 0,00 | 57,97 | 145,1 | 61,4 | ± 0,25 | ± 0,00 |
| | ± 0,11 | 147,0 | 61,9 | | |
| | | 145,4 | 61,8 | | |
| | | Mittel: 145,67 | 61,0 | | |
| | | ± 0,72 | 61,8 | | |
| | | | 61,5 | | |
| | | | 61,67 | | |
| | | | ± 0,24 | | |

Der *Diamagnetismus*, der sich *für Argon* aus der Tab. III ergibt, beträgt also für 3 Amp. 145,67 — 137,13 = 8,54 mm Ausschlag und für 2 Amp. 61,67 — 57,99 = 3,68 mm Aus-

schlag, oder auf 760 mm Druck und 0° reduziert: 8,91 mm bzw. 3,84 mm. Aus den Tabellen II und III ergibt sich für die Wirkungen auf Argon und Sauerstoff das Verhältnis 0,0784 aus den Werten für 3 Amp. und 0,0764 aus den Werten für 2 Amp.

Nach diesen Versuchen wurde nun Helium unter dem Drucke von 1574,2 mm, also etwa 2 Atm., in den Ballon gebracht und von neuem untersucht.

Tabelle IV.

| a) Ballon mit Helium. Druck = 1574,2 mm. Ausschlag in mm bei | | b) Ballon luftleer. Ausschlag in mm bei | |
|---|---|---|---|
| 3 Amp. | 2 Amp. | 3 Amp. | 2 Amp. |
| 140,3 | 59,1 | 137,20 | 58,00 |
| 140,3 | 59,7 | | |
| 139,7 | 60,0 | | |
| 140,0 | 60,0 | | |
| 140,0 | 60,0 | | |
| 139,0 | 59,0 | | |
| 140,0 | 59,6 | | |
| 139,8 | 59,1 | | |
| | 59,7 | | |
| Mittel: 139,89 | | | |
| ± 0,29 | 59,58 | | |
| | ± 0,34 | | |

Vereinigt man die Tabellen III c) und IV a) und b), so bekommen wir *für Helium* unter nahezu 2 Atm. Druck einen *Diamagnetismus*, der für 3 Amp. 139,89 — 137,23 = 2,66 mm und für 2 Amp. 59,58 — 58,00 = 1,58 mm Ausschlag beträgt, oder auf 760 mm Druck und 0° reduziert: 1,37 mm bzw. 0,82 mm. Für das magnetische Verhalten von Helium und Sauerstoff ergibt sich das Verhältnis 0,0121 bzw. 0,0163.

Wie schon auf p. 933 und 935 erwähnt, wurde der Ballon zum Schlusse noch einmal mit Luft gefüllt, um durch Kontrollversuche die Differenz in den Angaben auf p. 935 zu beseitigen. Da aber der Ballon bei diesen Beobachtungen sich an einer anderen Stelle des Magnetfeldes befand, mußte zum Vergleich auch noch einmal Sauerstoff untersucht werden. Die diesbezüglichen Resultate sind in den folgenden Tabellen enthalten.

Tabelle V.

| a) Ballon luftleer. | | b) Ballon mit Sauerstoff. Druck = 758,3 mm. | | c) Ballon luftleer. | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ausschlag in mm bei | | Ausschlag in mm bei | | Ausschlag in mm bei | |
| 3 Amp. | 2 Amp. | 3 Amp. | 2 Amp. | 3 Amp. | 2 Amp. |
| 128,00 | 54,50 | 30,0 | 12,5 | 128,0 | 53,7 |
| | | 30,0 | 12,4 | 128,5 | 54,1 |
| | | 30,1 | 11,5 | Mittel: 128,25 | 53,90 |
| | | 30,4 | 11,5 | ± 0,18 | ± 0,20 |
| | | 27,5 | 11,9 | | |
| | | 26,9 | 11,7 | | |
| | | 28,0 | 11,5 | | |
| | | Mittel: 28,99 | 11,86 | | |
| | | ± 1,30 | ± 0,35 | | |

Die Tab. V ergibt für 3 Amp. einen Ausschlag von 100,76 mm und für 2 Amp. einen Ausschlag von 45,32 mm. (Reduziert auf 760 mm Druck und 0°.)

Tabelle VI.

| a) Ballon mit Luft. Druck = 747,6 mm. | | b) Ballon luftleer. | |
|---|---|---|---|
| Ausschlag in mm bei | | Ausschlag in mm bei | |
| 3 Amp. | 2 Amp. | 3 Amp. | 2 Amp. |
| 103,0 | 45,6 | 123,2 | 53,8 |
| 102,8 | 45,0 | 123,0 | 54,0 |
| 102,0 | 45,0 | Mittel: 123,10 | 53,90 |
| 103,0 | 44,8 | ± 0,10 | ± 0,10 |
| 103,2 | 45,0 | | |
| Mittel: 102,80 | 45,08 | | |
| ± 0,32 | ± 0,21 | | |

Vereinigt man in analoger Weise wie früher die Tab. Vc) mit VIa) und b), so bekommt man für 3 Amp. einen Ausschlag von 22,06 mm und für 2 Amp. einen Ausschlag von 9,55 mm (reduziert auf 760 mm Druck und 0°). Das Verhältnis der Ausschläge von Luft zu Sauerstoff ergibt sich nun nach diesen Resultaten als 0,219 bzw. 0,211. Die auf p. 935 sich findende Differenz ist also beseitigt. Der Grund zu der Differenz auf p. 935 dürfte wohl darin zu suchen sein, daß die in der Tab. I enthaltenen Versuche mit Luft zeitlich die

ersten waren, die mit dem Torsionsapparat angestellt wurden, die Übung also noch nicht gewonnen war.

Erwähnt sei noch, daß der luftleere Ballon jedesmal unmittelbar kurz vor und nach den Hauptversuchen mit den betreffenden Gasen beobachtet wurde, so daß ein Einfluß wegen Änderung der Luftdichte (analog dem archimedischen Prinzip) ausgeschlossen ist.

Zur Umrechnung der erhaltenen Resultate auf absolutes Maß wurden die Werte benutzt, die Henning, Du Bois und Quincke für $10^6 \varkappa_{vol}$ (die für 1 ccm berechnete Suszeptibilität) für Sauerstoff durch Rechnung finden. $10^6 \varkappa_{vol}$ beträgt nach Henning[1]) 0,122, nach Du Bois[1]) 0,117, nach Quincke[1]) 0,129; der Mittelwert aus diesen Angaben ist $0{,}123 \pm 0{,}004$. Legt man diesen Mittelwert der Umrechnung zu Grunde, so ergibt sich:

für *Luft* $10^6 \varkappa_{vol} = + 0{,}0269$, berechnet aus den Werten für 3 Amp.
und $10^6 \varkappa_{vol} = + 0{,}0259$ „ „ „ „ „ 2 „
Mittel: $+ 0{,}0264$

Dementsprechend wird:

für *Argon* $10^6 \varkappa_{vol} = - 0{,}00965$
und $10^6 \varkappa_{vol} = - 0{,}00940$
Mittel: $- 0{,}00953$

für *Helium* schließlich
$10^6 \varkappa_{vol} = - 0{,}00148$
und $10^6 \varkappa_{vol} = - 0{,}00201$
Mittel: $- 0{,}00175$.

Halle a. S., Physikalisches Institut 1907.

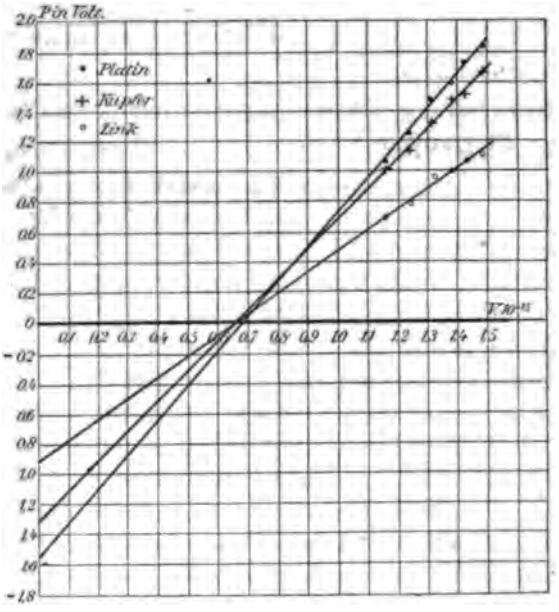
1) Vgl. Landolt-Börnstein, Physik.-chem. Tabellen, 1905. p. 788.

(Eingegangen 7. November 1907.)

## 6. *Eine Bemerkung zu der Arbeit von E. Ladenburg: „Über Anfangsgeschwindigkeit und Menge der photoelektrischen Elektronen usw.“*[1]*; von A. Joffé.*

(Aus den Sitzungsberichten der k. Bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physik. Kl. 37. Heft III. 1907.)

Die Ergebnisse der von Hrn. E. Ladenburg veröffentlichten Arbeit bestätigen in einigen wesentlichen Punkten die Voraussagungen, die Hr. A. Einstein[2]) aus der atomistischen




Hypothese der Strahlungsenergie gezogen hat. Stellt man nämlich die Beobachtungen der Tabb. 3 oder 2 im Koordinatensystem $P$, $\nu$ dar, so kommt man zu der von A. Einstein

1) E. Ladenburg, Physik. Zeitschr. 8. p. 590. 1907.
2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 132. 1905; 20. p. 199. 1906.

geforderten linearen Beziehung für alle drei untersuchten Metalle (vgl. die Figur). Nur ist nach den vorliegenden Messungen die Neigung dieser Geraden nicht universell, wie es die Einsteinsche Theorie fordert, sondern variiert etwas mit der Substanz. Andererseits wird die Unabhängigkeit der Geschwindigkeit der Elektronen von der Lichtstärke bestätigt. Berechnet man aus diesen Geschwindigkeiten das Plancksche Wirkungsquantum $h$, so kommt man zu Zahlen, die zwischen $2{,}2 \cdot 10^{-27}$ und $3{,}5 \cdot 10^{-27}$ liegen, während die Strahlungstheorie $6{,}5 \cdot 10^{-27}$ ergibt. Das Kontaktpotential liegt für die drei Metalle zwischen $+0{,}9$ und $+1{,}6$ Volt.

Hr. E. Ladenburg gelangt zu der Beziehung $v = a\sqrt{P}$, die seine Beobachtungen fast ebensogut wiedergibt, mit der Strahlungstheorie aber in keiner Beziehung steht. Es wäre für die Einsteinsche Theorie von großem Interesse, die Beobachtungen auf ein größeres Gebiet und besonders auf lange Wellen auszudehnen.

St. Petersburg, Physik. Laboratorium d. Polytechnikums,
23. Oktober 1907.

(Eingegangen 17. November 1907.)

## 7. *Messung induktiver Widerstände mit hochfrequenten Wechselströmen. Methode zur Messung kleiner Selbstinduktionskoeffizienten;* von *E. Giebe.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die beiden Größen, aus denen sich die Impedanz eines Leiters zusammensetzt, nämlich Widerstand und Selbstinduktionskoeffizient, sind in vielen Fällen nicht unabhängig von der Frequenz des durch den Leiter geschickten Wechselstromes. Induktionsströme (Wirbelströme), die in benachbarten Metallmassen, z. B. im Bleimantel von Kabeln, entstehen, sowie die Hysteresis in der Nähe befindlichen Eisens können die Ursache dieser Erscheinung sein.

Aber auch bei Abwesenheit von Eisen und anderer sekundärer Leiter kann Widerstand und Selbstinduktionskoeffizient eines Leiters eine Funktion der Frequenz sein. Die Erscheinung ist dann auf eine ungleichmäßige Verteilung der Stromlinien über den Querschnitt des Leiters, auf den sogenannten „Skineffekt" zurückzuführen, in einzelnen Fällen, z. B. bei Spulen mit vielen Windungen, auch auf eine gewisse Eigenkapazität des Leiters. Der Skineffekt wird, wie Dolezalek[1]) gezeigt hat, bei Selbstinduktionsspulen, die mit massivem Kupferdraht bewickelt sind, bei hoher Wechselstromfrequenz recht erheblich, kann aber durch Verwendung von Drahtlitze, d. h. eines Seiles dünner voneinander isolierter Drähte an Stelle des massiven Drahtes, stark herabgedrückt werden.

Fließt durch einen von Skineffekt und Eigenkapazität beeinflußten Leiter ein Wechselstrom vom Effektivwert $J$, so kann man den gesamten Energieverbrauch

$$Q = J^2 \varrho$$

setzen. $Q/J^2 = \varrho$ heiße „wirksamer" Widerstand des Leiters. Der Ohmsche Widerstand $w$ des Leiters erscheint also durch

1) F. Dolezalek, Ann. d. Phys. 12. p. 1142. 1903.

Skineffekt und Eigenkapazität um den Betrag $\varrho - w$ vergrößert. Der durch die gleichen Erscheinungen modifizierte Selbstinduktionskoeffizient kann entsprechend „wirksamer" Selbstinduktionskoeffizient genannt werden.

Aus der Differenz zwischen wirksamem und Ohmschem Widerstand läßt sich in einfacher Weise der durch die besprochenen Ursachen bedingte Energieverbrauch berechnen. Die Ermittelung des wirksamen Widerstandes bei verschiedenen Frequenzen ist daher neben der Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von besonderer Wichtigkeit.

Am einfachsten lassen sich solche Messungen durch Vergleich mit einem Drahtlitzennormal der Selbstinduktion nach der bekannten Maxwellschen Brückenmethode[1]) ausführen.

Es soll im folgenden auf eine Fehlerquelle aufmerksam gemacht werden, die sich bei der Bestimmung des Widerstandes (wirksamen oder Ohmschen) induktiver Leiter unter Umständen geltend macht und weiter gezeigt werden, wie man die Ursache dieser Fehlerquelle benutzen kann, um kleine Selbstinduktionskoeffizienten auch bei hohem Ohmschen Widerstande zu messen.

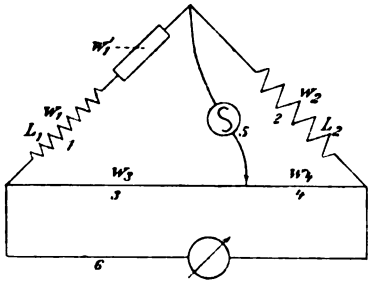


Fig. 1.

Die Zweige 1 und 2 einer Wheatstoneschen Brücke (Fig. 1) mögen die zu vergleichenden Selbstinduktionen $L_1$ und $L_2$ mit den Ohmschen Widerständen $w_1$ und $w_2$ enthalten. Beide Spulen seien mit Drahtlitze bewickelt. Die Zweige 3 und 4 mögen „reine", d. h. selbstinduktions- und kapazitätsfreie Widerstände $w_3$ und $w_4$, die Zweige 5 und 6 Wechselstromquelle bzw. Telephon enthalten. Zum Zwecke der Abgleichung hat man im allgemeinen zu einer der Selbstinduktionsspulen, etwa $L_1$, einen reinen Widerstand $w_1'$

1) J. Cl. Maxwell, Electr. II, Art. 757. Maxwell benutzte statt Wechselstrom und Telephon Induktionsstöße und ballistisches Galvanometer.

hinzuzuschalten. Die Brücke ist stromlos, wenn die Bedingungen

$$(1) \qquad w_1 + w_1' : w_2 = w_3 : w_4 ,$$

$$(2) \qquad L_1 : L_2 = w_3 : w_4$$

erfüllt sind. Die Gleichungen enthalten nicht die Frequenz. Gleichung (1) gilt auch bei Gleichstrom. Ist nun zur Abgleichung der Brücke bei Wechselstrom je nach der Frequenz ein anderer Widerstand $w_1'$ zu $w_1$ hinzuzuschalten als bei Gleichstrom, so muß man auf Eigenkapazität der Spulen oder auf eine trotz Verwendung von Drahtlitze noch vorhandene Widerstandserhöhung durch Skineffekt schließen.

In der üblichen Maßanordnung werden die Zweige 3 und 4 durch einen ausgespannten Schleifdraht gebildet, wobei in der Regel zur Erhöhung der Empfindlichkeit auf jeder Seite des Drahtes bifilare Zusatzwiderstände vorgeschaltet werden. Dabei wird zumeist angenommen, daß wenigstens bei großen Werten der zu vergleichenden Selbstinduktionen die geringe Selbstinduktion des geraden Drahtes und der bifilaren Zusatzwiderstände vernachlässigt werden kann, daß also die Beziehungen (1) und (2), die völlig selbstinduktionsfreie Widerstände $w_3$ und $w_4$ voraussetzen, gültig bleiben. Diese Annahme trifft, wie im folgenden gezeigt werden soll, zwar für die Beziehung (2) zu, dagegen nicht für die Beziehung (1), sobald die Messungen in unsymmetrischer Brücke mit Wechselströmen hoher Frequenz (einige Tausend) ausgeführt werden.

Seien $L_3$ und $L_4$ die Selbstinduktionskoeffizienten der Widerstände $w_3$ und $w_4$, dann lautet, wenn man sinusförmige Wechselströme voraussetzt, unter Anwendung der symbolischen Methode die Bedingung für Stromlosigkeit im Brückenzweige

$$(3) \qquad \frac{w_1 + w_1' + i\,\omega\,L_1}{w_2 + i\,\omega\,L_2} = \frac{w_3 + i\,\omega\,L_3}{w_4 + i\,\omega\,L_4} ,$$

wo $\omega = 2\,\pi\,n$, $n$ die Frequenz, $i = \sqrt{-1}$ ist. Durch Trennung der reellen und imaginären Bestandteile dieser Gleichung ergeben sich die beiden folgenden:

$$(w_1 + w_1')\,w_4 - \omega^2\,L_1\,L_4 = w_2\,w_3 - \omega^2\,L_2\,L_3 ,$$

$$L_1\,w_4 + L_4\,(w_1 + w_1') = L_2\,w_3 + L_3\,w_2 ,$$

oder anders geordnet

$$(4) \qquad \frac{w_1 + w_1'}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} + \frac{\omega^2 L_1}{w_2 w_4}\left(L_4 - \frac{L_2}{L_1} L_3\right) = \frac{w_3}{w_4} + k_1,$$

$$(5) \qquad \frac{L_1}{L_2} = \frac{w_3}{w_4} - \frac{w_2}{L_2 w_4}\left(\frac{w_1 + w_1'}{w_2} \cdot L_4 - L_3\right) = \frac{w_3}{w_4} - k_2.$$

Zu den einfachen Gleichungen (1) und (2) treten die Korrektionsglieder $k_1$ und $k_2$ hinzu. $k_1$ enthält $\omega^2$ als Faktor, wächst also mit dem Quadrat der Frequenz; für $k_2$ kommt die Änderung von $w_1 + w_1'/w_2$ mit der Frequenz in Betracht, diese Abhängigkeit ist aber von zweiter Ordnung. Die Gleichungen (4) und (5) gehen in die einfachen Gleichungen (1) und (2) über, wenn die Beziehung

$$(6) \qquad \frac{L_3}{L_4} = \frac{w_3}{w_4}$$

erfüllt ist. Setzt man nämlich (6) in (4) und (5) ein, so erhält man die Gleichungen

$$(4a) \qquad \frac{w_1 + w_1'}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} + \frac{\omega^2 L_2 L_4}{w_2 w_4}\left(\frac{L_1}{L_2} - \frac{w_3}{w_4}\right),$$

$$(5a) \qquad \frac{L_1}{L_2} = \frac{w_3}{w_4} - \frac{w_2 L_4}{w_4 L_2}\left(\frac{w_1 + w_1'}{w_2} - \frac{w_3}{w_4}\right),$$

aus welchen sich durch Elimination von

$$\frac{L_1}{L_2} - \frac{w_3}{w_4} \quad \text{bzw.} \quad \frac{w_1 + w_1'}{w_2} - \frac{w_3}{w_4}$$

die Gleichungen (1) und (2) ergeben. Bei gleicher Größe der zu vergleichenden Selbstinduktionen $L_1$ und $L_2$ ist auch $L_3/L_4$ gleich 1, sofern nur die Widerstände $w_3$ und $w_4$ völlig gleich konstruiert sind. In symmetrischer Brücke kommt es also auf die Größe von $L_3$ und $L_4$ nicht an, da hier im allgemeinen die Beziehung (6) erfüllt sein wird. In unsymmetrischer Brücke dagegen wird die Beziehung (6) in der Regel nicht gelten. Dann werden die Korrektionsglieder $k_1$ und $k_2$ nicht gleich Null. Daß das vom Quadrat der Frequenz abhängende $k_1$ unter Umständen einen keineswegs vernachlässigbaren Betrag annehmen kann, soll an einem Beispiel gezeigt werden.

Zwei Normalspulen von den Sollwerten $L_1 = 10^8$ cm, $L_2 = 10^7$ cm wurden in der Wheatstoneschen Brücke Fig. 1 verglichen. Beide Spulen waren mit Drahtlitze bewickelt, ihr Widerstand konnte also nach den Untersuchungen von

Dolezalek[1]) als unabhängig von der Frequenz angesehen werden. $w_1$ war 18,8 Ohm, $w_2 = 2{,}83$ Ohm. Die Zweige 3 und 4 enthielten Teile eines 1000 mm langen, gerade ausgespannten Manganindrahtes von 3,84 Ohm Widerstand. Zu Zweig 3 war ein bifilar gewickelter Widerstand von $7 \times 3{,}84 = 26{,}9$ Ohm hinzugeschaltet. Bei der Frequenz 50 ergab sich $w_3/w_4 = 10{,}00$. Um der Bedingung (1) (p. 943) zu genügen, mußte bei der Frequenz 50 und bei Gleichstrom ein Widerstand

$$w_1' = 9{,}5 \text{ Ohm}$$

zu $w_1$ hinzugeschaltet werden. Als die Messung mit Wechselstrom von etwa 2000 Perioden[2]) wiederholt wurde, ergab sich die Einstellung auf dem Schleifdraht nahezu unverändert, aber im Zweig 1 mußte jetzt ein Widerstand von

$$w_1' = 13 \text{ Ohm}$$

hinzugeschaltet werden, um das Telephon zum Schweigen zu bringen. Bei der Frequenz 2000 ergibt sich also, wenn man nach der einfachen Formel (1) rechnet,

$$\frac{w_1 + w_1'}{w_2} = \frac{18{,}8 + 13}{2{,}83} = 11{,}2$$

statt 10, d. h. um 12 Proz. größer als bei 50 Perioden und bei Gleichstrom.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß diese Differenz nicht annähernd durch Kapazität der Spulen zu erklären ist. Die Differenz, die eine Widerstandserhöhung durch Skineffekt vortäuscht, erklärt sich jedoch vollständig durch die Selbstinduktion der Zweige 3 und 4.

Daß schon sehr geringe Selbstinduktionen $L_3$ und $L_4$ einen großen Einfluß ausüben, davon konnte man sich durch absichtliches Zuschalten einer kleinen Selbstinduktion in einem der Zweige 3 oder 4 überzeugen. Wurde bei dem angeführten Versuche im Zweige 4 eine Spule von ungefähr $10^3$ cm eingeschaltet, so mußte bei nahezu unverändertem $w_3/w_4$ und bei derselben Frequenz von etwa 2000 ein Widerstand

$$w_1' = 15{,}8 \text{ Ohm statt } 13 \text{ Ohm}$$

in den Zweig 1 eingeschaltet werden.

---

1) F. Dolezalek, l. c.

2) Als Stromquelle diente eine Wechselstrommaschine Dolezalekscher Konstruktion (Zeitschr. f. Instrumentenk. 23. p. 240. 1903.

Die zahlenmäßige Berechnung der Korrektionsglieder $k_1$ und $k_2$ erfordert die Kenntnis der Selbstinduktionen $L_3$ und $L_4$. Der Widerstand $w_4$ bestand in dem angeführten Versuche aus einem geraden Drahte, dessen Selbstinduktionskoeffizient sich nach der bekannten Formel berechnen läßt. Für den bifilar gewickelten Widerstand $w_3$ ist dies nicht möglich. Auch die experimentale Bestimmung so kleiner Selbstinduktionen bei hohem Ohmschen Widerstande ist schwierig. Es wurde daher eine Brücke konstruiert, für welche sich beide Selbstinduktionen $L_3$ und $L_4$ theoretisch berechnen ließen.

Bei der Konstruktion dieser, für Messungen mit hochfrequenten Wechselströmen recht zweckmäßigen Brücke, die schematisch in Fig. 2 dargestellt ist, wurde zur Vermeidung

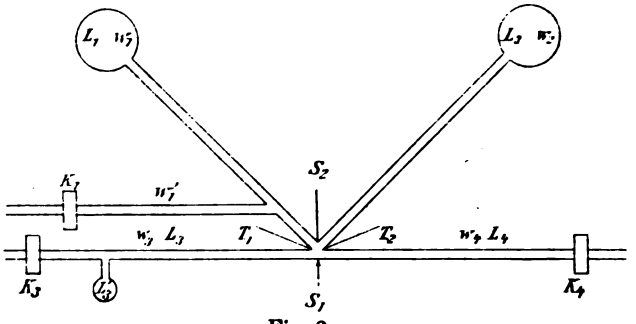


Fig. 2.

von gegenseitiger Induktion zwischen den einzelnen Zweigen besonderer Wert auf völlig bifilare Führung sämtlicher Zuleitungen gelegt. Die vier Eckpunkte $S_1$, $S_2$, $T_1$, $T_2$ sind daher möglichst nahe beieinander angeordnet. Die Zweige 3 und 4 liegen zwischen den Eckpunkten $T_1$ $S_1$ bzw. $T_2$ $S_1$ und bestehen aus je zwei langen, mit geringem Abstande parallel zueinander ausgespannten Drähten, die durch kleine verstellbare Klemmen $K_3$ und $K_4$ zu einer Schleife verbunden werden. Die Zweige 1 und 2 zwischen den Eckpunkten $T_1$ $S_2$ bzw. $T_2$ $S_2$ enthalten die beiden erwähnten Normale von $10^8$ cm und $10^7$ cm nebst ihren etwa 1 m langen bifilaren Zuleitungen. Zu $w_1$ ist ein bifilar ausgespannter Manganindrahtwiderstand $w_1'$ hinzugeschaltet. Ein neben einer Skala verschiebbarer Gleitkontakt $K_1$ gestattet ein mehr oder weniger langes Stück des ausgespannten Draht-

paares einzuschalten. Von $S_1$ $S_2$ führen bifilar zwei Drähte bezüglich der Ebene der Figur senkrecht nach oben, von $T_1$ $T_2$ senkrecht nach unten. An $S_1$ $S_2$ liegt die Stromquelle (Zweig 5), an $T_1$ $T_2$ das Telephon (Zweig 6). Die Verbindungen an den Eckpunkten $S_2$ $T_1$ $T_2$, die durch drei in ein Hartgummistück eingelassene Stifte in unveränderlicher Lage erhalten werden, sind durch Lötung hergestellt. Die Stromzuführung am Eckpunkt $S_1$ geschieht durch einen Gleitkontakt. Dieser Kontakt schleift auf einem etwa 2 cm langen, 0,36 mm dicken Schleifdraht aus Manganin, welcher die dünneren Drähte der Zweige 3 und 4 miteinander verbindet. Durch die an einer Skala ablesbare Verschiebung des Schleifkontaktes ließ sich das Verhältnis $w_3/w_4$ nur um einige Promille ändern. Größere Änderungen konnten leicht durch Verstellen der Klemmen $K_3$ oder $K_4$ erreicht werden. Der Schleifkontakt diente also nur zur Feineinstellung.

Die Selbstinduktion $L$ der Bifilardrähte $w_3$ und $w_4$ läßt sich nach der Formel[1])

$$L = \left[4 \log \text{nat} \left(\frac{a}{r}\right) + 1\right] l \tag{7}$$

berechnen, wo $a$ den gegenseitigen Abstand der Drahtachsen, $r$ den Radius der Drähte und $l$ die Länge des Doppeldrahtes bedeutet. Beide Drahtpaare waren aus Manganin, ihre Abmessungen waren die folgenden:

| für $w_3$ | für $w_4$ |
|---|---|
| $r$ = 0,025 mm | $r$ = 0,075 mm |
| $l$ = 102$_4$ „ | $l$ = 87$_1$ „ |
| $a$ etwa 1,3 „ | $a$ etwa 1,3 „ |
| $w_3$ etwa 390 Ohm | $w_4$ etwa 39 Ohm |

Die Brücke ist bei diesen Abmessungen nur für Messungen im Verhältnis 1 : 10 bestimmt.

Um das Korrektionsglied $k_1$ (Formel (4)) klein zu machen, wurden die Radien $r$ der Widerstandsdrähte möglichst klein gewählt; denn die Vermehrung von $w_4$, die hierdurch eintritt, verkleinert den Wert von $k_1$ viel stärker, als das nach Formel (7) erfolgende logarithmische Anwachsen von $L_3$ und $L_4$ ihn vergrößert. Ferner wurde, um die Beziehung (6), p. 944, möglichst

1) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. 10. Aufl. 1905. p. 605.

zu erfüllen, in den Zweig 3 eine Selbstinduktionsspule $L_3'$ von 9870 cm und sehr geringem Kupferwiderstande eingeschaltet.

Die Berechnung ergab für $L_3$ 1720 cm, für $L_4$ 1080 cm, somit für die gesamte Selbstinduktion im Zweige 3

$$L_3 + L_3' = 11590 \text{ cm}.$$

In der beschriebenen Brücke wurden Messungen bei drei verschiedenen Wechselstromfrequenzen ausgeführt.[1]) Unmittelbar nach den Wechselstrommessungen wurde die Brücke mit Gleichstrom geeicht, außerdem wurden mit Gleichstrom die Widerstände $w_1$ und $w_2$ der beiden Spulen und der Widerstand $w_1'$ bestimmt. Die Resultate sind in der folgenden Tab. I enthalten.

Für alle drei Versuche ist:

$$L_1 = 10^8 \text{ cm}, \quad L_2 = 10^7 \text{ cm}, \quad L_3 + L_3' = 11590 \text{ cm}, \quad L_4 = 1080 \text{ cm},$$

$$w_3 = 390 \text{ Ohm}, \quad w_4 = 39 \text{ Ohm},$$

$$k_2 = \frac{w_2}{L_2 w_4}\left(\frac{w_1 + w_1'}{w_2} L_4 - (L_3 + L_3')\right) = 0{,}000006\,.$$

Tabelle I.

| $n$ | $\frac{w_3}{w_4}$ | $w_1'$ Ohm | $w_1$ Ohm | $w_2$ Ohm | $k_1 = \frac{\omega^2 L_1}{w_2 w_4}\left(L_4 - \frac{L_2}{L_1}(L_3 + L_3')\right)$ | $\frac{w_1 + w_1'}{w_2}$ | $\frac{w_3}{w_4} + k_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 10,000 | $9{,}6_3$ | 18,77 | 2,84 | 0 | 10,00 | 10,00 |
| 2040 | 10,026 | $9{,}6_9$ | 18,77 | 2,84 | $-0{,}01_2$ | 10,02 | $10{,}01_4$ |
| 8035 | 10,053 | $9{,}5_0$ | 18,81 | 2,84 | $-0{,}02_6$ | 9,97 | $10{,}02_7$ |

Die früher gefundene Differenz von 12 Proz. ist, wie die letzten beiden Vertikalreihen der Tabelle zeigen, verschwunden.

Da das Korrektionsglied $k_2$ gegen $w_3/w_4$ nicht in Betracht kommt, so ist statt der Gleichung (5), p. 944, die einfache

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{w_3}{w_4}$$

zu setzen. Die Zahlen der Tabelle zeigen, daß $w_3/w_4$, also $L_1/L_2$, mit wachsender Frequenz zunimmt. Die Zunahme ist

1) Über die Ausführung solcher Messungen bei hoher Frequenz und dabei zu beachtende Vorsichtsmaßregeln, wird besonders berichtet werden. Vgl. auch Tätigkeitsber. d. Physikalisch-Technischen Reichsanstalt 1905; Zeitschr. f. Instrumentenk. 1906. p. 150.

auf Eigenkapazität der Spule $L_1 = 10^8$ cm zurückzuführen. Diese Kapazität $c_1$ ist der Spule parallel geschaltet zu denken. Der Operator der Spule ist daher nicht wie auf p. 943 gleich $w_1 + i\omega L_1$, sondern gleich

$$\frac{(w_1 + i\omega L_1)\frac{1}{i\omega c_1}}{w_1 + i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega c_1}}$$

zu setzen. Die Zerlegung dieses Ausdruckes in einen reellen und einen imaginären Teil, ergibt für den „wirksamen" Widerstand $\varrho_1$ und den „wirksamen" Selbstinduktionskoeffizienten $\lambda_1$ die Näherungsgleichungen [1])

$$\varrho_1 = w_1(1 + 2\omega^2 L_1 c_1), \tag{8}$$

$$\lambda_1 = L_1(1 + \omega^2 L_1 c_1), \tag{9}$$

$L_1$ bedeutet darin den Selbstinduktionskoeffizienten bei sehr niedriger Frequenz (50). Die Formeln (4) und (5) nehmen dann die folgende Gestalt an

$$\frac{\lambda_1}{L_2} = \frac{w_3}{w_4} = \frac{L_1(1 + \omega^2 L_1 c_1)}{L_2}, \tag{10}$$

$$\frac{\varrho_1 + w_1'}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} + k_1 = \frac{w_1(1 + 2\omega^2 L_1 c_1) + w_1'}{w_2}, \tag{11}$$

wobei

$$k_1 = \frac{\omega^2 \lambda_1}{w_2 w_4}\left(L_4 - \frac{L_2}{\lambda_1}(L_3 + L_3')\right)$$

ist.

Die Kapazität $c_1$ ist, wenn man $L_3$ genau seinem Sollwerte $10^7$ cm gleich setzt, aus den Werten $w_3/w_4$ der ersten Vertikalreihe der Tabelle zu berechnen und ergibt sich zu

$$c_1 = 0{,}0001_5 \text{ Mikrof.}$$

Mit Hilfe dieses Wertes erhält man für den wirksamen Widerstand

$$\varrho_1 = 18{,}86 \text{ Ohm bei } n = 2040$$
$$\varrho_1 = 19{,}02 \quad „ \quad „ \quad n = 3035$$

und somit

$$\frac{\varrho_1 + w_1'}{w_2} = 10{,}05, \quad \frac{w_3}{w_4} + k_1 = 10{,}01_4 \text{ bei } n = 2040,$$

$$\frac{\varrho_1 + w_1'}{w_2} = 10{,}04, \quad \frac{w_3}{w_4} + k_1 = 10{,}02_7 \text{ bei } n = 3035.$$

1) Vgl. F. Dolezalek, l. c. p. 1151; E. Orlich, Elektrotechn. Zeitschr. 26. p. 505. 1903.

Die Übereinstimmung zwischen den Werten $\varrho_1 + w_1'/w_2$ und $w_3/w_4 + k_1$ ist zwar bei $n = 2040$ nach Anbringung der Kapazitätskorrektion etwas schlechter als vorhin, aber immer noch so gut, wie man bei solchen Messungen nur erwarten kann. Der Fehler von 12 Proz. ist jedenfalls auf Bruchteile eines Prozentes herabgesetzt. Die Differenzen finden in der Ungenauigkeit der Widerstandseinstellung bei Wechselstrom und in dem großen Temperaturkoeffizienten des Kupfers ihre hinreichende Erklärung.

Der Widerstand der beiden Selbstinduktionsnormale [1]) kann demnach bis zu 3000 Perioden innerhalb einiger Promille als unabhängig von der Frequenz angesehen werden. Bei dem zuerst (p. 945) angeführten Versuche mit der alten Brücke ist also die Differenz von 12 Proz. zwischen den Werten $w_1 + w_1'/w_2$ und $w_3/w_4$ ausschließlich auf die geringe Selbstinduktion der Vergleichswiderstände zurückzuführen.

Aus dem vorhergehenden ergibt sich eine Methode, um sehr kleine Selbstinduktionskoeffizienten auch von Leitern mit großem Ohmschen Widerstande, z. B. von bifilar gewickelten Spulen aus Manganindraht zu bestimmen. Für Selbstinduktionen dieser Art versagt die einfache Maxwellsche Methode. Der Grund hierfür ist aus der Gleichung (3) (p. 943) ersichtlich, die wir auf die folgende komplexe Form bringen:

$$(12)\quad \begin{cases} (w_1 + w_1')\, w_4 + i\omega\,(L_4(w_1 + w_1') + L_1 w_4) - \omega^2 L_1 L_4 \\ \qquad = w_2 w_3 + i\omega\,(L_3 w_2 + L_2 w_3) - \omega^2 L_2 L_3. \end{cases}$$

Da es völlig induktionsfreie Widerstände in Wirklichkeit nicht gibt, so ist die Gleichung (12) streng genommen allen Induktionsvergleichungen zugrunde zu legen.

Ist $L_1$ und $L_2$ sehr klein, von annähernd der gleichen Größenordnung wie $L_3$ und $L_4$, so ist offenbar die Maxwellsche Methode zur Bestimmung von $L_1/L_2$ nur dann anwendbar, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. $L_4(w_1 + w_1')$ und $L_3 w_2$ muß gegen $L_1 w_4$ bzw. $L_2 w_3$ verschwinden, d. h. die Widerstände $w_1$ und $w_2$ der Selbstinduktionen müssen sehr klein sein.

---

1) Über die Konstruktion dieser Normale vgl. Tätigkeitsber. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 1906; Zeitschr. f. Instrumentenk. p. 154. 1907.

2. Die Produkte $\omega L_1$ und $\omega L_2$ müssen in Betracht kommen gegen $w_1$ bzw. $w_2$, weil sonst auch für $L_3 = L_4 = 0$ der imaginäre Teil der Gleichung gegenüber dem reellen verschwindet, also keinen Einfluß auf die Brückeneinstellung haben kann, d. h. wiederum die Widerstände $w_1$ und $w_2$ müssen klein sein.

Beide Bedingungen sind auch bei sehr hohen Frequenzen für bifilar gewickelte Spulen aus Manganindraht nicht annähernd erfüllt. Für solche Spulen ist also die Maxwellsche Methode nicht anwendbar.

Sind andererseits $L_1$ und $L_2$ groß, so sind die Bedingungen 1. und 2. erfüllt. Die aus dem imaginären Teil der Gleichung (12) folgende Beziehung $L_1/L_2 = w_3/w_4$ ist streng richtig. Im reellen Teil der Gleichung wird aber jetzt, wie wir an einem Beispiel gesehen haben, $\omega^2 L_1 L_4$ und $\omega^2 L_2 L_3$ merklich gegenüber $(w_1 + w_1')w_4$ bzw. $w_2 w_3$.

Hierauf beruht die Möglichkeit, die kleinen Selbstinduktionen $L_3$ und $L_4$ zu bestimmen, obwohl ihre Widerstände $w_3$ und $w_4$ sehr groß sind gegen $\omega L_3$ bzw. $\omega L_4$. An Stelle der Vergleichswiderstände treten also bei dieser Methode zwei große Selbstinduktionen von bekannten Werten; außerdem ist noch eine dritte bekannte Selbstinduktion geringer Größe, etwa ein Widerstand von berechenbarer Selbstinduktion oder ein völlig induktionsfreier Widerstand erforderlich.

Zur Ausführung von Messungen nach dieser Methode wurden wieder die beiden Normalspulen von $10^7$ und $10^8$ cm benutzt und in die Zweige 1 und 2 einer Brücke in der Anordnung der Fig. 2 eingeschaltet. Einer der Zweige 3 und 4 enthielt einen Widerstand von berechenbarer Selbstinduktion, während in dem anderen der Widerstand lag, dessen Selbstinduktion bestimmt werden sollte.

Der Gang einer Messung gestaltet sich folgendermaßen: Zunächst wird für Wechselstrom einer bestimmten gemessenen Frequenz $n$ durch Verschieben der beiden Schleifkontakte $w_3/w_4$ und $w_1'$ bis zum Schweigen des Telephons verändert. Hierauf wird bei unverändertem $w_3/w_4$ der Wechselstrom durch einen Gleichstrom, das Telephon durch ein Galvanometer ersetzt. Dann muß ein anderer Widerstand, $w_1''$, im Zweige 1 eingeschaltet werden, um den Brückenzweig wieder stromlos zu machen.

Für Wechselstrom gilt die Beziehung (vgl. die Formeln (8) bis (11) p. 949)

$$\frac{\varrho_1 + w_1'}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} + \frac{\omega^2 \lambda_1}{w_2 w_4}\left(L_4 - \frac{L_2}{\lambda_1} L_3\right), \tag{13}$$

wo

$$\varrho_1 = w_1 (1 + 2\,\omega^2 L_1 c_1)$$
$$\lambda_1 = L_1 (1 + \omega^2 L_1 c_1)$$

ist, für Gleichstrom

$$\frac{w_1 + w_1''}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}. \tag{14}$$

Subtrahiert man (14) von (13), so erhält man

$$\varrho_1 + w_1' - w_1 - w_1'' = \frac{\omega^2 \lambda_1}{w_4}\left(L_4 - \frac{L_2}{\lambda_1} L_3\right)$$

und wenn man für $\varrho_1$ seinen Wert einsetzt

$$L_4 - \frac{L_2}{\lambda_1} L_3 = \frac{w_4 [w_1' - w_1'' + 2\,\omega^2 L_1 c_1 w_1]}{\omega^2 \lambda_1}. \tag{15}$$

$w_1'$ und $w_1''$ können unmittelbar an der Skale des geeichten bifilaren Schleifdrahtes abgelesen werden. $w_4$ wird durch eine besondere Gleichstrommessung bestimmt. Eine genaue Ermittelung der von der Temperatur abhängigen Kupferwiderstände $w_1$ und $w_2$, sowie eine Eichung des Brückendrahtes ist nicht notwendig.

Für $L_1$ bzw. $L_2$ ist bei der Berechnung der folgenden Messungen der Sollwert $10^8$ bzw. $10^7$ cm eingesetzt. Die Abweichungen der wahren Werte von den Sollwerten sind nicht größer als 0,1 Proz. Sämtliche Messungen sind mit Wechselstrom von 2000 Perioden ausgeführt. Für diese Frequenz ist der wirksame Selbstinduktionskoeffizient $\lambda_1 = 1{,}0017 \cdot 10^8$ cm in der p. 946—947 beschriebenen Brücke bestimmt. Die Differenz dieses Wertes gegen den früher angegebenen $1{,}0026 \cdot 10^8$ cm ist auf die Benutzung anderer Spulenzuleitungen zurückzuführen.

Verdrillte Zuleitungen erwiesen sich wegen ihrer Kapazität, die gegenüber der Eigenkapazität $c_1$ in Betracht kommt, als unzweckmäßig und wurden daher durch zwei in unveränderlichem Abstand von etwa 1 cm geführte Drähte ersetzt. Die Kapazität der Spule $L_1$ inklusive Zuleitungen ist dadurch von $0{,}0001_5$ Mikrof. auf $0{,}0001_0$ Mikrof. herabgedrückt. Der letztere Wert ist daher der Berechnung von $\varrho_1$ zugrunde gelegt. Da alle Messungen bei derselben Frequenz 2000 aus-

geführt wurden, so hatte die Korrektion $2\omega^2 L_1 c_1 w_1$ in (15) stets denselben Wert 0,06.

**Messung Nr. 1.**

Beide Widerstände $w_3$ und $w_4$ bestanden aus bifilar ausgespannten Manganindrähten, so daß sich ihre Selbstinduktionskoeffizienten nach Formel (7) berechnen ließen. Die Abmessungen waren folgende:

| für $w_3$ | für $w_4$ |
|---|---|
| $r$ = 0,08 mm | $r$ = 0,2 mm |
| $l$ = 495 „ | $l$ = 297 „ |
| $a$ etwa 2,1 „ | $a$ etwa 2,8 mm |
| $w_3$ = 20,1 Ohm | $w_4$ = 2,01 Ohm |

Dazu kamen noch kurze bifilare Anschlußdrähte für jeden der Widerstände von folgenden Abmessungen:

| Bifilare Zuleitungen zu $w_3$ | Bifilare Zuleitungen zu $w_4$ |
|---|---|
| $r$ = 0,2 mm | $r$ = 0,2 mm |
| $l$ = 46 „ | $l$ = 38 „ |
| $a$ etwa 2 mm | $a$ etwa 1,8 mm |

Formel (7) ergibt:

| S.I.K. von Zweig 3 | S.I.K. von Zweig 4 |
|---|---|
| 697 cm | 343 cm |
| Zuleitungen 47 „ | Zuleitungen 37 „ |
| $L_3$ = 744 cm | $L_4$ = 380 cm |

und somit

$$L_4 - \frac{L_1}{\lambda_1} L_3 = 306 \text{ cm}.$$

Die Messung ergab

$$n = 2016, \quad w_1' = 11{,}95 \text{ Ohm}, \quad w_1'' = 9{,}59 \text{ Ohm},$$

woraus sich nach Formel (15) berechnet:

$$L_4 - \frac{L_3}{\lambda_1} L_3 = 303 \text{ cm},$$

welcher Wert mit dem theoretischen gut übereinstimmt. Die Differenz von 1 Proz. liegt innerhalb der Fehlergrenze.

Ein ebenso gutes Resultat ergab eine

**Messung Nr. 2,**

bei welcher dieselben bifilaren Drähte in den Zweigen 3 und 4 benutzt wurden. Nur die Länge der Drähte wurde etwa halb so groß gewählt, so daß

$$w_3 = 10{,}1 \text{ Ohm}, \quad w_4 = 1{,}01 \text{ Ohm} \quad \text{war.}$$

Mit Formel (7) wurde berechnet:

| S.I.K. von Zweig 3 | | S.I.K. von Zweig 4 | |
|---|---|---|---|
| | 334 cm | | 158 cm |
| Zuleitungen | 46 „ | Zuleitungen | 36 „ |
| $L_3$ | = 380 cm | $L_4$ | = 194 cm |

$$L_4 - \frac{L_2}{\lambda_1} L_3 = 156 \text{ cm}.$$

Die Messung ergab

$$n = 2006, \quad w_1' = 12{,}02 \text{ Ohm}, \quad w_1'' = 9{,}58 \text{ Ohm},$$

$$L_4 - \frac{L_2}{\lambda_1} L_3 = 159 \text{ cm}.$$

Die Methode wurde nun zur Bestimmung der Selbstinduktionskoeffizienten bifilar gewickelter Manganinwiderstände aus einem Präzisionswiderstandskasten mit Kurbelkontakten von O. Wolff benutzt. Die Einschaltung der einzelnen Rollen in einen der Zweige 3 oder 4 der Brücke geschah unter Verwendung möglichst kurzer Zuleitungen, die bis an die Kontaktklötze der betreffenden Rolle heran bifilar geführt wurden. Der andere Zweig enthielt wieder einen bifilar ausgespannten Drahtwiderstand als Vergleichsselbstinduktion. Die Resultate sind in der folgenden Tab. II enthalten.

Tabelle II.

| Messung Nr. | Bezeichnung der Rolle | $n$ | $w_1'$ | $w_1''$ ($w_1 = 19$ Ohm) | $w_4$ | $L_4 - \frac{L_2}{\lambda_1} L_3$ | $L_3$ inkl. Zuleit. | $L_4$ inkl. Zuleit. | S.I.K. der Zuleit. (ber.) zu $L_3$ | S.I.K. der Zuleit. (ber.) zu $L_4$ | S.I.K. der Rolle |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Ohm | Ohm | Ohm | cm | cm | cm | cm | cm | cm |
| 3 | 10 Ohm *A* | 1988 | 10,74 | 9,43 | 1,01 | 89 | 1070 | 196 | 60 | 36 | 1010 |
| 4 | 10 Ohm *B* | 1964 | 10,66 | „ | 1,01 | 85 | 1110 | 196 | 60 | 36 | 1050 |
| 5 | 20 Ohm *A*+*B* | 1981 | 10,70 | „ | 2,01 | 172 | 2060 | 378 | 60 | 36 | 2000 |
| 6 | 1 Ohm | 2024 | 16,77 | 9,55 | 1,01 | 454 | 405 | 495 | 44 | 65 | 430 |
| 7 | 10 Rollen zu je 0,1 Ohm = 1 Ohm | 1974 | 30,76 | 9,58 | 1,01 | $139_2$ | 410 | $143_8$ | 44 | 52 | 1380 |

Die Selbstinduktion der bifilar gewickelten Rollen eines solchen Widerstandskastens ist also, insbesondere für die kleineren Rollen im Verhältnis zu den größeren recht beträchtlich. Für die Selbstinduktion des gesamten Kastens, der neun Rollen zu je 10 Ohm, neun zu je 1 Ohm, zehn zu je 0,1 Ohm enthielt, ergibt sich etwa 14 500 cm bei 100 Ohm Widerstand.

Bei den Messungen 3—5 befand sich die unbekannte Selbstinduktion im Zweige 3, bei den Messungen 6 und 7 im Zweige 4; im ersteren Falle ist also $L_4$, im letzteren $L_3$ aus den geometrischen Abmessungen berechnet. Da von $L_3$ nur der zehnte Teil für die Größe der Differenz $w_1' - w_1''$ maßgebend ist, und da außerdem $w_1 - w_1''$ bei den Messungen 3—5 nur 1,3 Ohm, bei Nr. 6 und 7 aber 7,2 bzw. 21,2 Ohm beträgt, so sind 6 und 7 wesentlich genauer als 3—5. Immerhin stimmt die zur Kontrolle ausgeführte Messung 5, welche die Summe des Selbstinduktionskoeffizienten der Rollen $A$ und $B$ zu 2000 cm ergibt, mit der Summe der einzeln gemessenen Werte, 2060 cm auf 3 Proz. überein.

Der Widerstand $w_1'$ ließ sich in der benutzten Brückenanordnung bei $n = 2000$ auf etwa 1—2 Promille bestimmen. Demnach kann eine Differenz $w_1' - w_1''$ von 1,3 Ohm (Messung Nr 3), d. h. ein Selbstinduktionskoeffizient von nur 89 cm bei 1 Ohm Widerstand auf einige Prozent gemessen werden.

Eine Fehlerquelle liegt darin, daß die Selbstinduktion der Zuleitungen und eine Vergleichsselbstinduktion aus den geometrischen Abmessungen berechnet werden muß. Unter Umständen z. B. bei Messung 7 ist der hierdurch entstehende Fehler nur sehr gering; die Vergleichsselbstinduktion $L_3$ bedingt hier nur eine Korrektion von 3 Proz., braucht also nur der Größenordnung nach bekannt zu sein.

Die Methode läßt sich mit Vorteil auch auf die Bestimmung kleiner Selbstinduktionskoeffizienten von sehr geringem Ohmschen Widerstand anwenden. Eine mit Kupferdrahtlitze unifilar gewickelte Spule von etwa $10^4$ cm wurde, wie bei den p. 948 besprochenen Versuchen die Rolle $L_3'$, in den Zweig 3 eingeschaltet, der außerdem ebenso wie Zweig 4 einen bifilar ausgespannten Manganindraht enthielt. In Zweig 1 und 2 lagen wieder die Normalspulen $L_1 = 10^6$ cm, $L_2 = 10^7$ cm.

Ist auf Verschwinden des Telephontones eingestellt, so gilt die Beziehung

$$(16) \qquad \frac{\varrho_1 + w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} + \frac{\omega^2 \lambda_1}{w_2 w_4}\left(L_4 - (L_3 + L_3')\frac{L_2}{\lambda_1}\right),$$

aus welcher sich $L_3'$ in derselben Weise wie vorher bestimmen ließe, wenn $L_3$ und $L_4$ berechnet sind. Man kann jedoch die Berechnung von $L_3$ und $L_4$ umgehen und gewinnt an Genauigkeit, wenn man bei einer zweiten Messung bei gleicher Frequenz in einer im übrigen vollkommen gleichen Anordnung die Rolle $L_3'$ entfernt und an ihre Stelle einen Kurzschluß setzt. Ist nämlich der Widerstand von $L_3'$ verschwindend gegenüber dem Gesamtwiderstande des Zweiges 3, so bleibt, bei Entfernung der Rolle $L_3'$, $w_3$ und $w_4$ sowie $L_3$ und $L_4$ ungeändert. Die einzige vorzunehmende Änderung besteht in einer Verschiebung des Gleitkontaktes am Widerstand $w_1'$, der auf einen Betrag $w_1''$ vergrößert werden muß, um das Telephon wieder zum Schweigen zu bringen. Für diesen zweiten Versuch gilt dann die Beziehung

$$(17) \qquad \frac{\varrho_1 + w_1''}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} + \frac{\omega^2 \lambda_1}{w_2 w_4}\left(L_4 - L_3 \frac{L_2}{\lambda_1}\right).$$

Subtrahiert man (16) von (17), so erhält man

$$w_1'' - w_1' = \frac{\omega^2 L_2 L_3'}{w_4}$$

oder

$$(18) \qquad L_3' = \frac{(w_1'' - w_1')\, w_4}{\omega^2 L_2}.$$

Die Messung ergab:

bei eingeschalteter Spule $L_3'$

$n = 2004$, $w_1' = 1{,}25$ Ohm, $w_4 = 1{,}454$ Ohm;

bei ausgeschalteter Spule $L_3'$

$n = 2009$, $w_1'' = 12{,}05$ Ohm, $w_4 = 1{,}450$ Ohm.

Setzt man für $n$ und $w_4$ die Mittelwerte aus beiden Messungen ein, so berechnet sich

$$L_3' = 986_3 \text{ cm}.$$

Die Voraussetzungen, unter denen die Formel (18) gilt, waren bei den Messungen nicht streng erfüllt. Erstens war die Frequenz in beiden Fällen um 2 Promille verschieden, zweitens war auch der Widerstand $w_3' = {}^4/_{100}$ Ohm der Rolle $L_3'$ nicht

völlig zu vernachlässigen gegenüber $w_3 = 14{,}5$. Die Rechnung wurde deshalb für jeden Versuch gesondert durchgeführt und ergab

$$L_4 - \frac{L_2}{l_1} L_3 = 222 \text{ cm},$$

$$(L_3 + L_3') \frac{L_2}{l_1} - L_4 = 765 \text{ cm},$$

$$L_3' = 985_3 \text{ cm}.$$

Aus den geometrischen Abmessungen der Widerstände $w_3$ und $w_4$ berechnete sich

$$L_4 - \frac{L_2}{l_1} L_3 = 226 \text{ cm}.$$

Die Spule $L_3'$ erfüllt die für die Anwendung der Maxwellschen Methode notwendigen Bedingungen (p. 950), sie wurde daher zur Kontrolle nach dieser Methode durch sukzessive Vergleichung an ein absolut gemessenes Normal von $10^8$ cm angeschlossen. Das Resultat war

$$L_3' = 987_3 \text{ cm} \quad \text{bei} \quad n = 435.$$

Gegenüber der Maxwellschen hat die hier beschriebene Methode zur Messung kleiner Selbstinduktionskoeffizienten gewisse Vorzüge, deren hauptsächlichster darin besteht, daß sie auf Selbstinduktionskoeffizienten von hohem Ohmschen Widerstande anwendbar ist. Prerauer[1]) und M. Wien[2]) haben gezeigt, daß sich nach der Maxwellschen Methode Selbstinduktionskoeffizienten von der Größenordnung von 500 cm bis auf 1 Proz. messen lassen, bei Leitern, deren Zeitkonstante (Verhältnis vom Selbstinduktionskoeffizienten zum Widerstand) zwischen $10^{-3}$ und $3 \cdot 10^{-5}$ sec liegt. Dabei lagen die Ohmschen Widerstände zwischen $5 \cdot 10^{-4}$ und $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Ohm. Die Angaben beziehen sich auf Messungen mit Wechselstrom von 256 Perioden.

Wir wollen untersuchen, bis zu welchen Grenzen die hier beschriebene Methode anwendbar ist. Wir benutzen dazu die beiden Formeln (15) und (18). Wenn man das Brückenverhältnis 1 : 10 beibehält, so ist es zweckmäßig, wie schon oben (p. 955) bemerkt, die unbekannte Selbstinduktion in den

1) O. Prerauer, Wied. Ann. **53**. p. 784. 1894.
2) M. Wien, Wied. Ann. **53**. p. 928. 1894.

Zweig mit dem kleineren Widerstand zu legen. Diesem Falle entsprechend schreiben wir Formel (18) ($L_1 = \lambda_1$ gesetzt)

$$\frac{L_4'}{w_4} = \frac{w_1' - w_1''}{\omega^2 L_1}, \tag{19}$$

wobei, wenn $L_4' = L_3'$, $w_1' - w_1''$ 10 mal größer als in Formel (18) ist.

Dieselbe Form hat, abgesehen von der Kapazitätskorrektion, die Formel (15), nur tritt an Stelle von $L_4'$ die Differenz $L_4 - (L_2/L_1) L_3$. $w_1' - w_1''/\omega^2 L_1$ gibt also in beiden Fällen den Wert der Zeitkonstanten $t$, die gemessen wird.

Setzen wir $w_1' - w_1'' = 1$ Ohm, eine Differenz, die sich noch auf einige Prozent (vgl. p. 955) bestimmen läßt, ferner $L_1 = 0{,}1$ Henry, $n = 2000$, so ergibt sich die Zeitkonstante

$$t = 6{,}3 \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Bei einem Widerstand von $w_4 = 1$ Ohm entspricht diesem $t$ ein Selbstinduktionskoeffizient $L_4' = 63$ cm. Nun läßt sich die Messung, wie diesbezügliche Versuche gezeigt haben, auch bei noch höheren Frequenzen ausführen. Für $n = 4000$, $w_1' - w_1'' = 1$ Ohm, $L_1 = 0{,}1$ Henry ergibt sich

$$t = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

und für $w_4 = 1$ Ohm als Grenzwert der Selbstinduktion

$$L_4' = 16 \text{ cm.}$$

Dem Wert $t = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ entspricht bei $n = 4000$ ein Phasenverschiebungswinkel von etwa 1,5 Min.

Setzt man $L_4' = 500$ cm $= 5 \cdot 10^{-7}$ Henry, so folgt aus $t = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ sec

$$w_4 \text{ etwa } 30 \text{ Ohm.}$$

Die hier angewandte Methode gestattet also bei etwa 1000 mal kleineren Zeitkonstanten zu messen, als dem von Prerauer angegebenen Grenzwert $3 \cdot 10^{-5}$ sec entspricht, und für Selbstinduktionskoeffizienten von etwa 500 cm, auf welche sich die Angaben Prerauers beziehen, bei etwa 1000 mal größeren Widerständen.

Es ist jedoch zu beachten, daß sich für Selbstinduktionskoeffizienten mit hohem Ohmschen Widerstande (Formel (15)) nur die Differenz $L_4 - (L_2/L_1) L_3$ ergibt. Es ist also im allgemeinen eine bekannte Vergleichsselbstinduktion von an-

nähernd derselben Größenordnung wie die zu messende notwendig. Das letztere gilt auch für die Maxwellsche Methode. Unabhängig von einer solchen Vergleichsselbstinduktion ergibt sich jedoch nach Formeln (18) und (19) der Selbstinduktionskoeffizient eines Leiters von sehr kleinem Widerstande. Da diese Formel die Größen $L_3$ und $L_4$ nicht enthält, so können diese wesentlich höhere Werte haben als der zu messende Selbstinduktionskoeffizient, ohne die Genauigkeit zu beeinträchtigen. Formeln (18) und (19) sind auch unabhängig von Widerstandserhöhungen der beiden Spulen $L_1$ und $L_3$ infolge Skineffektes und Eigenkapazität. Formel (15) bleibt dagegen nur gültig, wenn die Spule $L_1$ frei von Skineffekt ist.

Die Selbstinduktionskoeffizienten $L_1$ bzw. $L_3$, deren Wert bekannt sein muß, können beliebig groß sein, sie müssen mindestens mehrere Zehnerpotenzen größer als der zu messende Selbstinduktionskoeffizient sein. Die Genauigkeit der Methode ist von der Größe von $L_1$ und $L_3$ ziemlich unabhängig. Be 10fach größerem $L_1$ wird zwar nach Formel (18) und (19) die Differenz $w_1' - w_1''$ 10 mal größer, da aber eine 10fach größere Selbstinduktionsspule auch einen entsprechend größeren Widerstand hat, so ist die 10 mal größere Differenz $w_1' - w_1''$ prozentisch doch der gleiche Teil des Gesamtwiderstandes.

Die Methode ist natürlich nicht an das Brückenverhältnis 1:10 gebunden. Dies Verhältnis kann Vorteile bieten (vgl. die Bemerkungen zu Nr. 7, p. 955). Demgegenüber stehen aber die Nachteile, die besonders bei hoher Wechselstromfrequenz eine unsymmetrische Brücke mit sich bringt.

Charlottenburg, November 1907.

(Eingegangen 27. November 1907.)

## 8. *Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden;* von *B. Strasser.*

Hr. N. Umow war so freundlich, auf einen Druckfehler in meiner Arbeit „Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden“ [1]) aufmerksam zu machen, welcher zu einer Mißdeutung der Formel Anlaß geben kann. In der Arbeit steht für das Selbstpotential eines Solenoides die Formel:

$$L = 4\pi r\left\{n\left(\ln\frac{r}{\varrho}+0{,}333\right)+n.(n-1)\cdot\left(\ln\frac{8r}{g}-2\right)-A + \frac{g^2}{8r^2}\left[\left(3\ln\frac{8r}{g}-1\right)\cdot\left(\frac{n^2(n^2-1)}{12}-B\right]\right\}.$$

Im vorletzten Gliede muß die runde Klammer entweder *vor* $-B$ geschlossen werden oder ganz fortfallen, so daß der Ausdruck schließlich lautet:

$$L = 4\pi r.\left\{n\left(\ln\frac{r}{\varrho}+0{,}333\right)+n.(n-1)\left(\ln\frac{8r}{g}-2\right)-A + \frac{g^2}{8r^2}\cdot\left[\left(3\ln\frac{8r}{g}-1\right)\cdot\frac{n^2(n^2-1)}{12}-B\right]\right\}.$$

Danzig, Physikal. Institut der Technischen Hochschule, 11. Dezember 1907.

1) B. Strasser, Ann. d. Phys. 17. p. 763. 1905.

(Eingegangen 14. Dezember 1907.)

# Namenregister zum Jahrgang 1907.


A.

Adler, F. W., Über die Mach-Lippmannsche Analogie zum zweiten Hauptsatz 22, 587. — Über die Formulierung des ersten Hauptsatzes für Gase 22, 782. — Bemerkung zur Abhandlung „Der Inhalt der Gleichung $p v = R T$“ 23, 975.

Altberg, W., Über kurze akustische Wellen bei Funkenentladungen von Kondensatoren 23, 267.

Angerer, E., Ursprung der Wärmeentwickelung bei Absorption von Röntgenstrahlen 24, 370.

Argyropoulos, T., Sprechender Kondensator 23, 397.

Arons, L., Eine Amalgamlampe mit reichem Linienspektrum 23, 176.

Athanasiadis, G., Bestimmung des Widerstandes und der Kapazität mit Gleichstrom und Telephon 23, 392.

B.

Bädeker, K., Über die elektrische Leitfähigkeit und die thermoelektrische Kraft einiger Schwermetallverbindungen 22, 749.

Baerwald, H., Über die Adsorption von Gasen durch Holzkohle bei tiefen Temperaturen 23, 84.

Bakker, G., Theorie der gekrümmten Kapillarschicht 23, 532. — Zur Mechanik der Kapillarschicht; Antwort an K. Fuchs 24, 191. — Bemerkung zu der Arbeit von K. Fuchs: „Direkte Ableitung einiger Kapillaritätsfunktionen“ 24, 381.

Barkow, E., Versuche über Entstehung von Nebel bei Wasserdampf und einigen anderen Dämpfen 23, 317.

Barus, C., Über die Verteilung der Kondensationskerne in staubfreier gesättigter Luft, und über ihre Beobachtungsmethoden 24, 225.

Baumgardt, L., Über die Möglichkeit einer Nutzanwendung des Wilsoneffektes 23, 986.

Becker, A., Über die innere Reibung und Dichte der Bunsenflamme 24, 823. — Über den Luftwiderstand 24, 863.

Berndt, G. W., Über Stromschwankungen an Gleichstromdynamos 23, 805. — Über den Einfluß des Magnetfeldes auf den Widerstand von Elektrolyten 23, 932.

Bestelmeyer, A., Spezifische Ladung und Geschwindigkeit der durch Röntgenstrahlen erzeugten Kathodenstrahlen 22, 429.

Block, W., Untersuchungen am stromliefernden Daniellelement 22, 505.

Boedke, P., Über den Durchgang des Lichtes durch eine planparallelc inhomogene Schicht 24, 357.

Brandes, H., Über die Dämpfung und Energieausnutzung einiger Senderanordnungen der drahtlosen Telegraphie 22, 640.

van den Broek, A., Das $\alpha$-Teilchen und das periodische System der Elemente 23, 199.

C.

Cantor, M., Zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau und akustische Analogien 24, 439.

Cermak, P., Der Peltiereffekt Eisen–Konstantan und Nickel–Kupfer zwischen 0° und 560° C. 24, 351.

Conrat, F., Über Messung des Strahlungsdekrementes stabförmiger Leiter 22, 659.

D.

Déguisne, C., Die Aufzeichnung von akustischen Schwebungen 23, 308.

Dember, H., Versuche über das lichtelektrische Verhalten von Metallen beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand 23, 957.

Dieckmann, M., Über zeitliche Beziehungen von Schwingungen in Kondensatorkreisen 24, 771.

Disch, J., vgl. Koenigsberger.

Dobler, P., Über die Sekundärstrahlung, welche entsteht, wenn die $\beta$-Strahlen des Radiums dünne Metallschichten treffen und den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit der primären Strahlen, Schichtdicke und Intensität der Sekundärstrahlen 22, 227.

Dolezalek, F. u. Möller, H. G., Über Beseitigung der ungleichmäßigen Stromverteilung in Wechselstromleitern 22, 559.

Dvořák, V., Bemerkung zu der Arbeit von W. Zernov: „Über absolute Messungen der Schallintensität 22, 606.

E.

Ehrenfest, P., Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz 23, 204.

Einstein, A., Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme 22, 180. — Über die Gültigkeitsgrenze des Satzes vom thermodynamischen Gleichgewicht und über die Möglichkeit einer neuen Bestimmung der Elementarquanta 22, 569. — Berichtigung zu meiner Arbeit: „Die Plancksche Theorie der Strahlung etc.“ 22, 800. — Über die Möglichkeit einer neuen Prüfung des Relativitätsprinzipes 23, 197. — Bemerkungen zu der Notiz von Hrn. Paul Ehrenfest: „Die Translation deformierbarer Elektronen und der Flächensatz“ 23, 206. — Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie 23, 371.

Ekman, V. W., Über Resonanz durch Strahlung 24, 267. — Über die Bedeutung der Resonanz in der Theorie der Spektrallinien 24, 579.

Erfle, H., Berechnung der Loschmidtschen Zahl aus den Konstanten der Dispersionsformel 23, 594. — Optische Eigenschaften und Elektronentheorie 24, 672. — Nachtrag zur Berechnung der Loschmidtschen Zahl aus den Konstanten der Dispersionsformel 24, 709.

Eykman, P. H. und Trivelli, A. P. H., Über die Lichteinwirkung auf photographische Platten 22, 199.

F.

**Falk**, K. G., Die Entzündungstemperaturen von Gasgemischen 24, 450.

**Fischer**, C., Experimentelle Untersuchung gekoppelter Kondensatorkreise 22, 265.

**Franklin**, E. C., Über den Siedepunkt des flüssigen Ammoniaks 24, 867.

**Fuchs**, K., Über die van der Waalssche Formel 23, 885. — Zur Mechanik der Kapillarschicht 23, 807.

**Füchtbauer**, Chr., Über Sekundärstrahlen 23, 801.

G.

**Gans**, R., Zur Theorie des Ferromagnetismus. 1. Mitteilung: Gibt es wahren Magnetismus? 22, 481. — Berichtigung zu der Arbeit: „Über die Theorie des Ferromagnetismus" 23, 399. — Zur Cohnschen Elektrodynamik 24, 397.

**Gehlhoff**, G., Über Kathodengefälle und Spektren einiger zusammengesetzter Gase 24, 553.

**Gehrcke**, E. u. **Reichenheim**, O., Interferenzen planparalleler Platten im kontinuierlichen Spektrum 23, 745.

**Geiger**, H., Strahlungs-, Temperatur- und Potentialmessungen in Entladungsröhren bei starken Strömen 22, 973.

**Geiger**, L., Über die Begleiterscheinungen des inversen longitudinalen Zeemaneffektes 23, 758; 24, 597.

**Geitler**, J. R. von, Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertzsche Wellen 22, 246.

**Giebe**, E., Messung induktiver Widerstände mit hochfrequenten Wechselströmen. Methode zur Messung kleiner Selbstinduktionskoeffizienten 24, 941.

**Giesing**, E., Untersuchungen ebener Reflexionsbeugungsgitter mit Rücksicht auf ihre Brauchbarkeit zur absoluten Messung von Lichtwellenlängen 22, 838. — Berichtigung zu meiner Abhandlung: „Untersuchungen ebener Reflexionsbeugungsgitter etc." 22, 798.

**Gildemeister**, M., Über das Verschwinden der Magnetisierung 23, 401.

**Glaser**, H., Über die innere Reibung zäher und plastisch-fester Körper und die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes 22, 694.

**Greinacher**, H., Über die thermische Bestimmung der Radioaktivität gewöhnlicher Substanzen 24, 79.

**Grotrian**, O., Die magnetische Induktion in Rotationskörpern bei homogenem Felde, behandelt nach einem Näherungsverfahren auf experimentell-geometrischer Grundlage 23, 575.

**Grüneisen**, E., Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen. I. Der dynamisch und statisch gemessene Elastizitätsmodul 22, 801.

**Gruner**, P., Bemerkungen zu der Arbeit: „Über den Zerfall von Radium *A*, *B* and *C*, II. Mitteilung", von Hrn. H. W. Schmidt 22, 899.

**Grunmach**, L., Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung von verflüssigtem Sauerstoff und verflüssigtem Stickstoff 22, 107. — Über den Einfluß transversaler Magnetisierung auf die elektrische Leitungsfähigkeit der Metalle (nach gemeinsam mit Hrn. Dr. Franz Weidert ausgeführten Versuchen 22, 141.

**Gulik**, D. van, Über das Absorptionsspektrum des Chlorophylls 23, 277.

H.

Haga, H., Über die Polarisation der Röntgenstrahlen und der Sekundärstrahlen 23, 439. — Über einen merkwürdigen Fall von selektiver Absorption bei Röntgenstrahlen 23, 445.

Hallwachs, W., Über die lichtelektrische Ermüdung 23, 459.

Harms, F., Elektromagnetische Wellen an einem Draht mit isolierender zylindrischer Hülle 23, 44.

Hasenöhrl, F., Zur Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraume 22, 791.

Henning, F., Über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes 22, 609. — Über die Ausdehnung fester Körper bei tiefer Temperatur 22, 631; vgl. Holborn.

Herrmann-Goldap, E., Über die Klangfarbe einiger Orchesterinstrumente 23, 979.

Herweg, J., Über die Herabsetzung des Funkenpotentials durch Bestrahlung der Funkenstrecke mit Kathodenstrahlen 24, 826.

Holborn, L. u. Henning, F., Über die spezifische Wärme von Stickstoff, Kohlensäure und Wasserdampf bis 1400° 23, 809.

Holborn, L. u. Valentiner, S., Eine Vergleichung der optischen Temperaturskale mit dem Stickstoffthermometer bis 1600° 22, 1.

I.

Ignatowsky, W. v., Diffraktion und Reflexion, abgeleitet aus den Maxwellschen Gleichungen 23, 875. — Berechnung des Widerstandes eines Drahtes bei der Reflexion von elektromagnetischen Wellen 23, 905.

J.

Jäger, G., Die Zustandsgleichung (zur Richtigstellung) 24, 607.

Joffé, A., Eine Bemerkung zu der Arbeit von E. Ladenburg: „Über Anfangsgeschwindigkeit u. Menge der photoelektrischen Elektronen usw." 24, 939.

Johansen, E., vgl. Warburg.

Jollos, A., Über Hochfrequenzladung 23, 719.

K.

Kiebitz, F., Interferenzversuche mit freien Hertzschen Wellen 22, 943.

Kinoshita, S., vgl. Voigt.

Koenigsberger, J. u. Disch, J., Bestimmung der Veränderlichkeit des Koeffizienten der Differentialgleichung von Fourier und experimentelle Anwendung auf Wärmeleitung von Isolatoren 23, 655.

Kohl, E., Über die dielektrischen Verschiebungsgleichungen für schnelle Schwingungen in ruhenden Mitteln 22, 401.

Kohlrausch, F., Über Kapillarität und Tropfengröße; Nachtrag 22, 191.

Koláček, F., Zur Theorie der elektromagnetischen Gleichungen in bewegten Medien 23, 698.

Küch, R. u. Retschinsky, T., Temperaturmessungen im Quecksilberlichtbogen der Quarzlampe 22, 595. — Untersuchung über selektive Absorption im Quecksilberlichtbogen 22, 852.

Kurz, K., Die Beeinflussung der Ergebnisse luftelektrischer Messungen durch die festen radioaktiven Stoffe der Atmosphäre 24, 890.

Kynast, R., Über die bei der Reflexion an isotropen, durchsichtigen Medien auftretenden Phasenverschiebungen 22, 726; vgl. auch Lummer.

L.

Ladenburg, R., Über die innere Reibung zäher Flüssigkeiten und

ihre Abhängigkeit vom Druck 22, 287. — Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit 23, 447.

Laemmel, R., Bemerkungen über die spezifischen Wärmen fester Grundstoffe 23, 61. — Der Inhalt der Gleichung $p.v = R.T$ 23, 591.

Lasareff, P., Über das Ausbleichen von Farbstoffen im sichtbaren Spektrum 24, 661.

Laub, J., Über sekundäre Kathodenstrahlen 23, 285. — Zur Optik der bewegten Körper 23, 738.

Laue, M., Die Entropie von partiell kohärenten Strahlenbündeln 23, 1. — Die Entropie von partiell kohärenten Strahlenbündeln. Nachtrag 23, 795. — Die Mitführung des Lichtes durch bewegte Körper nach dem Relativitätsprinzip 23, 989. — Zur Cohnschen Elektrodynamik 23, 991.

Laugwitz, M., Über den Durchgang elektrischer Wellen durch nicht-metallische Gitter 23, 148; vgl. Schaefer.

Leder, F., Über die absolute Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Grund der Alkalimetallspektren, über die Strahlung der Hefnerlampe und des Osmiums 24, 305.

Lehmann, O., Über die van der Waalssche Formel und die Kontinuität der Aggregatzustände, Erwiderung an K. Fuchs 22, 469.

Leithäuser, G., vgl. Warburg.

Lippmann, G., Über die Analogie zwischen absoluter Temperatur und elektrischem Potential (Erwiderung an F. W. Adler) 23, 994.

Löffler, B., Wann und auf welchem Wege beeinflussen suspendierte Teilchen Gewicht und Auftrieb einer Flüssigkeit? 23, 517.

Lohmann, H., Beobachtungen zur Herstellung und Messung hoher Spannungen 22, 1008.

Lohnstein, Th., Weiteres zur Theorie der fallenden Tropfen, nebst einem Rückblick auf ältere theoretische Versuche 22, 767.

Lummer, O., Die „Interferenzkurven gleicher Neigung" im polarisierten Lichte 22, 49.

Lummer, O. und Kynast, R., Spektralapparat für Polarisations- und Phasendifferenzmessungen 22, 721.

## M.

Mache, H., Zur Physik der Flamme. Zweite Mitteilung 24, 527.

Mandelstam, L., Über optisch homogene und trübe Medien 23, 626.

Miller, W., Zeemaneffekt an Magnesium, Calcium, Strontium, Zink, Kadmium, Mangan und Chrom 24, 105.

Möller, H. G., vgl. Dolezalek.

Monasch, B., Über den Energieverlust im Dielektrikum in wechselnden elektrischen Feldern 22, 905.

Mosengeil, K. von †, Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum 22, 867.

Müller, E., Das optische Verhalten der kolloidalen Metalle 24, 1.

## P.

Paschen, F., Über den Dopplereffekt im Spektrum der Kanalstrahlen des Wasserstoffs 23, 247. — Über den Dopplereffekt im Spektrum der Kanalstrahlen des Sauerstoffs 23, 261. — Erwiderung auf Bemerkungen des Hrn. Stark zu meinen Arbeiten über den Dopplereffekt 23, 997.

Pauli, E., Über die Abhängigkeit der Wärmeleitung einiger Gase und Dämpfe von der Temperatur **23**, 907.

Pflüger, A., Über Absorption in lumineszierenden Gasen **24**, 515.

Pringsheim, P., Versuche über das Minimumpotential von Spitzenentladungen und über den Einfluß erhöhter Temperaturen auf dasselbe **24**, 145.

R.

Reichenheim, vgl. Gehrcke.

Retschinsky, J., vgl. Küch.

S.

Sachs, J. S., Elektrische Schwingungen in Spulen mit metallischen Kernen **22**, 310.

Schaefer, Cl., Über die Wirkung dielektrischer Zylinder auf elektrische Wellen **23**, 168.

Schaefer, Cl. u. Laugwitz, M., Zur Lambschen Gittertheorie **23**, 599. — Abhängigkeit des Verhaltens Hertzscher Gitter vom Leitvermögen **23**, 951.

Schames, L., Über die Abhängigkeit der Hysteresiswärme und der Permeabilität des Eisens von der Frequenz des Wechselfeldes **22**, 448.

Schiller, L., Über die Poissonsche Konstante des Kautschuks **22**, 204.

Schiller, N., Eine Bemerkung über die Beziehung zwischen der absoluten Temperatur und der kinetischen Energie eines thermodynamischen Systems **22**, 573.

Schmidt, H. W., Über Reflexion und Absorption von $\beta$-Strahlen **23**, 671.

Schönrock, O., Zur Abhängigkeit der Breite der Spektrallinien vom Druck **22**, 209.

Schott, G. A., Über die Strahlung von Elektronengruppen **24**, 685.

Schulze, F. A., Einige neue Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen höchster hörbarer und unhörbarer Töne. — Anwendung auf die Töne der Galtonpfeife und die Bestimmung der oberen Hörgrenze **24**, 785.

Schulze, G., Spannungsgefälle an Aluminiumanoden **22**, 543. — Über das Verhalten von Tantalelektroden **23**, 226. — Über die elektrolytische Ventilwirkung der Metalle Magnesium, Antimon und Wismut **24**, 43.

Schweidler, E. Ritter v., Studien über die Anomalien im Verhalten der Dielektrika **24**, 711.

Silberstein, L., Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung **22**, 579. — Nachtrag zur Abhandlung über „Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung“ **24**, 783.

Sommerfeld, A., Über den Wechselstromwiderstand der Spulen **24**, 609.

Stark, J., Bemerkung zu Hrn. Paschens Mitteilung über den Doppler-Effekt bei den Kanalstrahlen **23**, 798.

Stettenheimer, A., Eine absolute Messung des Zeemanphänomens **24**, 884.

Strasser, B., Der Fizeausche Versuch über die Änderung des Polarisationsazimuts eines gebrochenen Strahles durch die Bewegung der Erde **24**, 187. — Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden **24**, 960.

Struycken, H. J. L., Die Schwingungsart einer Stimmgabel und ihr Dekrement **23**, 643.

Szarvassi, A., Über die unipolare Induktion **23**, 73.

Szivessy, G., Über die Widerstandsänderung von Metalldrähten durch Sauerstoffokklusion **23**, 968.

T.

Tänzler, P., Das magnetische Verhalten von Luft, Argon und Helium in Beziehung zu Sauerstoff **24**, 981.

Tangl, K., Über die Dielektrizitätskonstante der Luft bei hohem Druck **23**, 559.

Thiesen, M., Zur Theorie des geschlossenen Resonators **24**, 401.

Thomson, G. H., Über den Durchgang Hertzscher Wellen durch Gitter **22**, 865.

Toepler, M., Über Funkenspannungen (Nachtrag) **22**, 119. — Gleitfunken auf sehr dünnen (Glimmer-)Platten **23**, 867.

Traube, J., Volumen und Valenz. Atom und Elektron **22**, 519.

Trivelli, A., vgl. Eykman.

U.

Uller, K., Über den Verdrängungswiderstand fester Körper in Gasen und Flüssigkeiten. Erste Mitteilung **23**, 179.

V.

Valentiner, S., vgl. Holborn.

Voigt, W., Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Eisenglanz **22**, 129. — Betrachtungen über die komplizierteren Formen des Zeemaneffektes **24**, 193. — Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Aragonit **24**, 290.

Voigt, W. und Kinoshita, S., Bestimmung absoluter Werte von Magnetisierungszahlen, insbesondere für Kristalle **24**, 492.

W.

van der Waals jr., J. D., Zur Frage der Wellenlänge der Röntgenstrahlen **22**, 603. — Zur Frage der Wellenlänge der Röntgenstrahlen, II. **23**, 395.

Waetzmann, E., Zur Theorie der Kombinationstöne **24**, 68.

Walter, B., Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. H. Schnell: Untersuchungen am Funkeninduktor mit Quecksilberunterbrecher **22**, 397.

Warburg, E. u. Leithäuser, G., Über die Oxydation des Stickstoffs bei der Wirkung der stillen Entladung auf atmosphärische Luft **23**, 209.

Warburg, E., Leithäuser, G. u. Johansen, Ed., Über das Vakuumbolometer **24**, 25.

Weigert, F., Über chemische Lichtwirkungen. I. Das Phosgengleichgewicht unter dem Einfluß der Bestrahlung **24**, 55. — Über chemische Lichtwirkungen. II. Photochemisch sensibilisierte Gasreaktionen und eine Theorie der katalytischen Lichtwirkung **24**, 243.

Weinberg, B., Über die innere Reibung des Eises. II. **22**, 321.

Werner, A., Quantitative Messungen der An- und Abklingung getrennter Phosphoreszenzbanden **24**, 164.

White, W. P., Bemerkungen über die Juliussche Galvanometeraufhängung **22**, 195.

Wien, W., Über die Berechnung der Impulsbreite der Röntgenstrahlen aus ihrer Energie **22**, 793. — Über die absolute, von positiven Ionen ausgestrahlte Energie und die Entropie der Spektrallinien **23**, 415.

Wigand, A., Über spezifische Wärme und spezifisches Gewicht der allotropen Modifikationen fester Elemente **22**, 64. — Über Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme fester Elemente **22**, 99. — Zum Gesetze von Dulong und Petit (Erwiderung auf die Bemerkungen von R. Laemmel) **24**, 601.

Wilson, W., Lichtelektrische Entladung und durch Bestrahlung erzeugtes Leitvermögen **23**, 107.

Wogau, M. v., Die Diffusion von Metallen in Quecksilber **23**, 345.

Wommelsdorf, H., Über die Abhängigkeit von Polarisatorwiderstand, Scheibendicke und Scheibenabstand der Influenzmaschinen **23**, 601. — Eine neue Art von Influenzmaschinen mit allseits in festes Isolationsmaterial eingebetteten Sektoren **23**, 609. — Eine neue Art von Influenzmaschinen mit allseits in festes Isolationsmaterial eingebetteten Sektoren. Zweite Mitteilung **24**, 488.

## Z.

Zahn, H., Über adiabatischen und isothermen Halleffekt in Wismut **23**, 131.

Zemplén, G., Über die Oberflächenspannungen wässeriger Lösungen. II. **22**, 891.

Zenneck, J., Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie **23**, 846.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1907. № 11.

# ANNALEN
DER
# PHYSIK.

28 154 Stanford

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 24. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 329. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

LEIPZIG, 1907.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

*Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.*

*(Ausgegeben am 8. Oktober 1907.)*

# Inhalt.


| | | Seite |
|---|---|---|
| 1. | Ernst Müller. Das optische Verhalten der kolloidalen Metalle | 1 |
| 2. | E. Warburg, G. Leithäuser und Ed. Johansen. Über das Vakuumbolometer | 25 |
| 3. | Günther Schulze. Über die elektrolytische Ventilwirkung der Metalle Magnesium, Antimon und Wismut | 43 |
| 4 | Fritz Weigert. Über chemische Lichtwirkungen. I. Das Phosgengleichgewicht unter dem Einfluß der Bestrahlung | 55 |
| 5. | E. Waetzmann. Zur Theorie der Kombinationstöne | 68 |
| 6. | H. Greinacher. Über die thermische Bestimmung der Radioaktivität gewöhnlicher Substanzen | 79 |
| 7. | William Miller. Zeemaneffekt an Magnesium, Calcium, Strontium, Zink, Kadmium, Mangan und Chrom | 105 |
| 8. | B. Strasser. Der Fizeausche Versuch über die Änderung des Polarisationsazimuts eines gebrochenen Strahles durch die Bewegung der Erde | 137 |
| 9. | P. Pringsheim. Versuche über das Minimumpotential von Spitzenentladungen und über den Einfluß erhöhter Temperaturen auf dasselbe | 145 |
| 10. | A. Werner. Quantitative Messungen der An- und Abklingung getrennter Phosphorescenzbanden | 164 |
| 11. | G. Bakker. Zur Mechanik der Kapillarschicht; Antwort an K. Fuchs | 191 |



Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.**

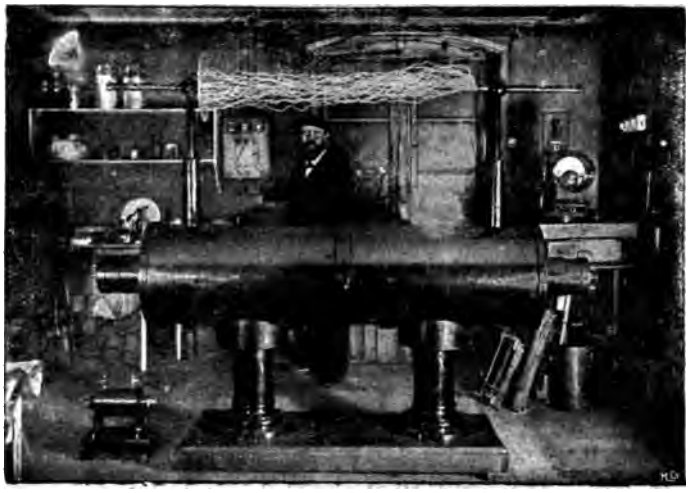
Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



Induktorium 120 cm Funkenlänge, betätigt mit unserm Collektor-Unterbrecher, Expositionsdauer 1 Sekunde. Links unten: Induktorium 10 cm Funkenlänge.

**Unsere Induktorien eignen sich hervorragend zum Laden großer Kapazitäten, sowohl mit Wechselstrom ohne Unterbrecher, als mit unterbrochenem Gleichstrom.**

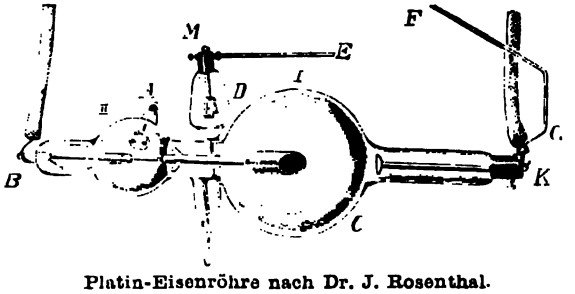
# Fr. Klingelfuss & Co., Basel.

## Polyphos Elektrizitäts-Gesellschaft m. b. H. München

**Schillerstraße 16**

## Röntgenröhren

für Röntgen-Photographie, -Durchleuchtung und -Therapie.




**Platin-Eisenröhre nach Dr. J. Rosenthal.**

Preis der Platin-Eisenröhre mit Kugel I von ca. 14 cm Durchmesser M. 60.—.
" " " " " I " " 16 " " " 65.—.

### Einige Urteile über die Platin-Eisenröhre nach Dr. J. Rosenthal:

*Kgl. Chirurgische Klinik, München.* Die von der hiesigen Polyphos E. G. gelieferten „Platin-Eisenröhren" haben sich seit längerer Zeit im Röntgenlaboratorium der Kgl. Chirurgischen Klinik durch Erzielung scharfer, kontrastreicher Bilder und langsame Abnutzung aufs beste bewährt.

sign. i. A. Dr. R. Grashey, Assistenzarzt.

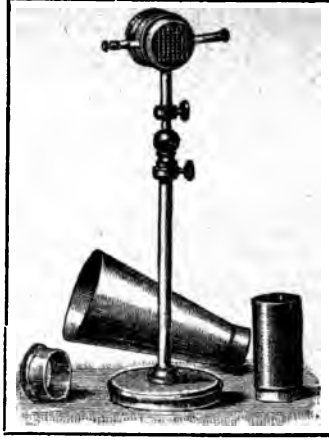
*G. Gaiffe*, Instruments de Précision, Paris. Ayant été très satisfait des derniers tubes*, que vous nous avez livrés, je vous prie de m'en expédier deux autres semblables de toute urgence . . . .

*) Große Platin-Eisenröhren nach Dr. Rosenthal.

# SIEMENS & HALSKE A.-G.

**Wernerwerk, Berlin-Nonnendamm.**

Meßeinrichtungen zur Bestimmung der Induktionskonstanten und des Energieverlustes von Wechselstromapparaten. - - Präzisionsnormale der Selbstinduktion. - Präzisions-Wattmeter für Drehstrom bei ungleicher Belastung der 3 Zweige. - Präzisions-Wattmeter, - Voltmeter und - Amperemeter für Wechselstrom. - Zeiger-, Spiegel- u. Panzergalvanometer. Meßbrücken, Kompensationsapparate, Zweigwiderstände, Dekadenwiderstände, Kondensatoren.



**Leppin & Masche**

**Berlin SO. Engelufer 17.**

Fabrik

wissenschaftlicher Instrumente.

**Spezialität:**

Anfertigung sämtlicher physikalischer und chemischer Apparate, sowie Ausrüstung kompletter Laboratorien.


Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in Leipzig.

## Über die bisherigen Beobachtungen im ultraroten Spektrum.

von **Dr. Wilh. Beetz,** Breslau.

8°. 45 Seiten mit 15 Figuren. M. 1.—.

Diese zusammenfassende und die neuesten Forschungen berücksichtigende Darstellung dürfte nicht nur die auf optischem Gebiete arbeitenden Physiker, sondern alle, die sich für die Strahlungs-Phänomen interessieren, in die Materie einführen. Sind doch die Strahlungs-Phämonen die aktuellsten physikalischen Erscheinungen.


**Emil Gundelach,**

**Gehlberg in Thüringen.**

Glasinstrumente
für wissenschaftliche Zwecke.

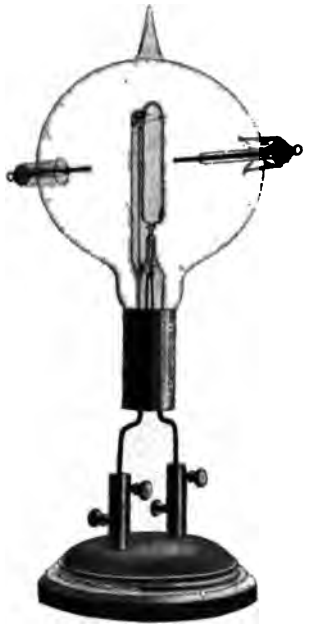
Vakuumröhren aller Art.

Röntgenröhren.

Schutzmarke

Gegründet 1852.

Letzte Auszeichnung:
**Weltausstellung St. Louis 1904:**
**Grand Prix.**



Vakuumrohr mit Oxydkathode (Ventil) nach Prof. Dr. Wehnelt für Dauerbetrieb. Belastung bis 0,5 Amp.

# E. DUCRETET

PARIS — 75, rue Claude-Bernard — PARIS.

**Grands-Prix** { Paris 1889 — Anvers 1894 / Bruxelles 1897 — Paris 1900 / St. Louis 1904 — Liège 1905

Expositions Universelles

**Cabinets de Physique complets** (Catalogues illustrés).

Appareils de Mesures électriques.

**Télégraphie sans fil** Popoff-Ducretet garantie pour les grandes distances. **Téléphone haut-parleur R. Gaillard**, type 1906, R. G. et E. D. Matériels complets Rayons X Röntgen, et courants de haute fréquence.

**Photothéodolites de M. le Colonel Laussedat.**

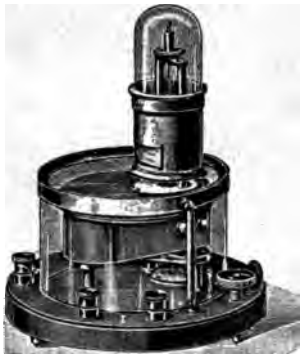
**Transformateur électrolytique de Faria**, redresseur des Courants alternatifs.

# Hartmann & Braun, A.-G.,

## Frankfurt a. M.

**Elektrische und magnetische Meßinstrumente und Hilfsapparate.**

*Königl. Preufsische Goldene Staatsmedaille.*



**Drehspul-Spiegelgalvanometer.**

**Galvanometer**
verschiedener Systeme.

**Meſsbrücken und Rheostate.**

**Normalien**
nach den Modellen der
**Phys.-Techn. Reichsanstalt.**

**Phasenmesser.**

**Resonanzapparate.**

**Photometer.**

# Präcisions-Reisszeuge

**Astronomische Uhren, Compensationspendel.**

**Grand Prix:** Paris 1900 St. Louis 1904

Illustrierte Preislisten gratis.

**Clemens Riefler**
Fabrik mathemat. Instrumente
**Nesselwang u. München.**
*Gegründet 1845.*

# Land- und Seekabelwerke A.G.

## CÖLN-NIPPES.

Abteilung

## Apparatebau.

*Drehspulen-, Spiegel- und Zeiger-Galvanometer.*

**Compensatoren** *nach Franke.*

*Technische Laboratoriums-Instrumente.*

---

*Selbstinduktions-Normale auf Serpentin oder Marmor gewickelt.*

---

*Selbstinduktions-Messbrücken,*
*Selbstinduktions-Variatoren,*
*Vibrations-Galvanometer.*

Weltausstellung Lüttich 1905: Grand Prix.
Weltausstellung Mailand 1906: Grand Prix u. Ehrendiplom.

# Meiser & Mertig, Dresden-N. e.

Werkstätten für Präzisionsmechanik.

**Physikalische Apparate**

jeder Art, in praktischer, solider und eleganter Ausführung.

**Funkeninduktoren. — Hochspannungsapparate. — Apparate für drahtlose Telegraphie. — Röntgenapparate. — Chemische Geräte.**

Viele Empfehlungen und Anerkennungen.

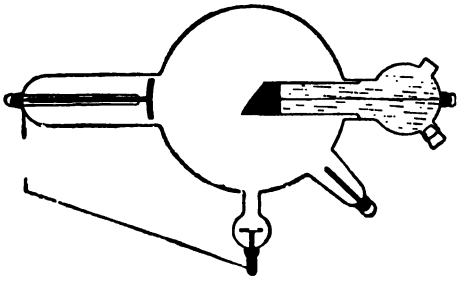
*Neue Preisliste kostenlos.*

# C. H. F. MÜLLER, Hamburg

**Bremerreihe 24.**

**Telegr.-Adr.: Florensius Hamburg.** **Fernsprecher Amt III, 687.**

## Spezial-Fabrik für Röntgenröhren



Neukonstruktion:

**Wasser-kühlröhre**

**No. 14 L**

nach Prof. **Dr. Walter.**

**D.R.-P. 113430, 176003, 161514**

**U. S. P. u. Engl. Pat.**

In **allen Stellungen** verwendbar! Geeignet für Durchleuchtungen **von unten** für operative und diagnostische Zwecke.

(Albers-Schönberg: Die Röntgentechnik. II. Auflage.)

**Illustrierte Preisliste, enthaltend verschiedene Neuerungen, bitte einzufordern!**

# Dr. H. Geissler Nachf. Franz Müller, Bonn

Fabrik und Lager chem. Apparate und Utensilien.

**Spezialitäten:**

**Elektrische Röhren** (Röntgen-, Braunsche-, Tesla-, Spektral-Röhren).

**Quecksilberluftpumpen,** einfache und automatisch wirkende, nach Boltwood, Geißler, Gaede, Jaumann, Kaufmann, Schou, Sprengel, Schuller, Töpler-Hagen u. a.

**Gas-Untersuchungs-Apparate** nach Bunsen, Bunte, Fischer, Hempel, Lunge, Orsat, Pettersson u. a.

**Normal-Thermometer, Aräometer, Maßanalytische Geräte.**

Kataloge auf Verlangen.

# Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0.

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und -Optik.

Gegründet 1890.

## Gröfste Spezial-Fabrik für Luftpumpen

zu wissenschaftlichen Zwecken.

**Neu!** Rotierende **Neu!**

## Quecksilberpumpe höchster Leistung

neuester eigener Konstruktion, System Pfeiffer.

**Ohne Glas, ohne Porzellan, vollkommen unzerbrechlich!**

Leistung: Röntgenröhre (samt Trockenröhre usw.) von ca. 2 l Inhalt wurde in **70 Sekunden** von 5 mm Hg-Druck auf **hartes Röntgenvakuum** (15 cm Parallelfunkenstrecke setzt ein!)
und **130 Sekunden** von **Atmosphärendruck** auf **hartes Röntgenvakuum** (15 cm Parallelfunkenstrecke setzt ein!) evakuiert.

**Vollkommenste** und **widerstandsfähigste** Pumpe für

## höchste Verdünnungen!

*Komplette Pump-Einrichtung für Hand- und Motorbetrieb auf fahrbarem Tisch (1/4 P.S.).*

**Alleinvertrieb und Alleinberechtigung**

zur Fabrikation der

## Geryk-Öl-Luftpumpen

Patent Fleuss, D.R.P.

in Deutschland.

## Neu! Präzisions- o o o o o Vakuummeter

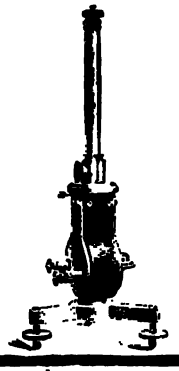
D.R.G.M. nach Reiff.

**Ohne Gummi! Ganz aus Glas!**

(Physik. Zeitschr. 8, p. 124, 1907.)

## KEISER & SCHMIDT, Berlin N.,

Johannisstrafse 20.



**Neues hochempfindliches Spiegelgalvanometer, Präzisionswiderstände, Meßbrücken, Kompensationsapparate, Präzisions-Ampère- und Voltmeter** für Laboratorien und Schalttafeln, **Galvanometer, Funkeninduktoren, Kondensatoren, Rubenssche Thermosäulen, Pyrometer** bis 1600° C., **Elemente, Kohlensäurebestimmungsapparate.**

## Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber: K. Friedrichs.)

**Darmstadt.**

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer Apparate und Gerätschaften.

Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparate. Brutschränke. Resistenzglas. Weber'sches Glas. Jenaer und Böhmische Glaswaren.

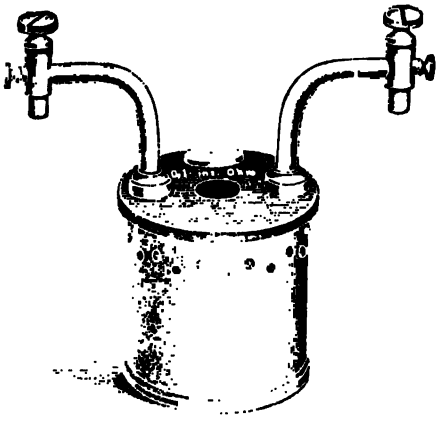
**Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.**

**Mechanische Werkstätten. Tischlerei.**

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vielfache Auszeichnungen. — Export nach allen Weltteilen.

## Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente.



**Berlin W., Carlsbad 15.**

Spezialität seit 1890

**Präzisions-Widerstände a. Manganin**

nach der Methode der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

(Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1889, Januar 1890, Nov.-Dezember 1895.)

Normalwiderstände von 10,000—0,0001 Ohm für genaue Widerstandsvergleichungen und für Strommessungen bis 10000 Amp. **Rheostaten, Wheatstonesche Brücken, Thomsensche Doppelbrücken** für alle Messbereiche mit Stöpsel- od. Kurbelschaltung, **Kompensationsapparate** für genaue Spannungsmessungen. — **Kompensationsapparat** nach Wolff-Diesselhorst. — **Normalelemente**, geeicht von der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch als Präzisionswiderstände beglaubigt. — Vertretungslager von Manganin-Draht und -Blech von der Isabellenhütte in Dillenburg.

*Illustrierte Preisliste.*

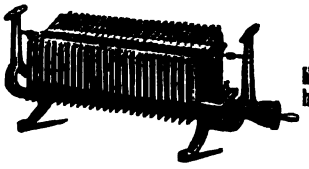
# Gülcher's Thermosäulen mit Gasheizung.

**Vorteilhafter Ersatz für galvanische Elemente.**

**Konstante elektromotorische Kraft.**

**Geringer Gasverbrauch.**

**Hoher Nutzeffekt.**



**Keine Dämpfe kein Geruch.**

**Keine Polarisation, daher keine Erschöpfung.**

**Betriebsstörungen ausgeschlossen.**

Alleinige Fabrikanten:

**Julius Pintsch, Aktiengesellschaft, Berlin O., Andreasstr. 71/73.**



## Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

**LORENTZ, H. A., Lehrbuch der Physik** zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen. Nach der vierten, von H. A. Lorentz und L. H. Siertsema bearbeiteten Auflage und unter Mitwirkung des Verfassers aus dem Holländischen übersetzt von G. Siebert.

Bd. I. 8°. V, 482 S. mit 236 Abbild. 1906. M. 8 —, geb. M. 9.—
Bd. II. 8°. 621 S. mit 257 Abbild. 1907. M. 10.—, geb. M. 11.—

***Beiblätter zu den Annalen der Physik:*** Die deutsche Übersetzung dieses Buches scheint dem Referenten trotz der übermäßigen Konkurrenz wahrlich kein überflüssiges Unternehmen zu sein, nicht nur, weil das Buch von einem so hervorragenden Physiker wie Herrn Lorentz verfaßt ist, sondern vor allem, weil es sich von andern Lehrbüchern in Ziel und Ausgestaltung doch wesentlich unterscheidet. Die Darstellung ist von einer außerordentlichen Klarheit und Einfachheit und macht das Buch höchst empfehlenswert für alle, die von der Experimentalphysik mehr als die Vorführung von Versuchen verlangen. Besonders geeignet dürfte das Buch auch als Grundlage oder Leitfaden für die sich allmählich einbürgernde Vorlesung über elementar-mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik sein. W. K.

***Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie:*** Die Darstellung ist stets klar und äußerst originell und interessant, so daß auch der Fachmann das Buch mit Interesse lesen wird. Es ist wohl vergleichbar mit den Vorlesungen von Helmholtz, in denen ja auch bereits Bekanntes oft von einem ganz eigenartigen originellen Standpunkt, mit Ausblicken auf andere Gebiete, Andeutungen auf Verallgemeinerungen usw. gebracht wird. F. A. Schulze.

***Journal of physikal Chemistry:*** The book should prove extremely interesting and suggestive to teachers of the subject or of any part of it, and indeed to students who are able to read the German. The translation has been made with great care. J. E. Trevor.



## Günther & Tegetmeyer, Braunschweig.

**Werkstatt für wissenschaftliche und technische Präzisions-Instrumente.**

***Weltausstellung St. Louis 1904 Goldene Medaille.***

Transportable Apparate zur Beobachtung der atmosphärischen Elektrizität nach **Exner.** Elektroskope mit innerer Isolation aus Bernstein, Natriumtrocknung und Einrichtung zum parallaxefreien Ablesen (D.R.G.M.). Apparate zur Messung der Elektrizitätszerstreuung in der Luft. Zambonische Säulen. Hochspannungs-Trockensäulen (D.R.G.M.). Instrumentarien zur Bestimmung der Radioaktivität von Luft- und Bodenproben. Quadrantenelektrometer. Aktinometer (Neukonstruktion). Wasserstrahlduplikatoren nach **Elster** und **Geitel.** Hochspannungselektroskope (**Braun**sches Prinzip; mit innerer Isolation und Natriumtrocknung nach **Elster** und **Geitel.** Transportable Elektronen-Aspirationsapparate nach **Ebert** nebst Zusatzkondensatoren zur Bestimmung der Ionengeschwindigkeiten und des elektrischen Leitvermögens der Luft nach der Methode **Mache.** Kondensatoren nach **Harms** zur Bestimmung der Kapazitäten von Elektrometern.

# Wilh. Spoerhase vorm. C. Staudinger & Co.

**Giessen, Hessen.**

*Gegründet 1842.*

## Präzisionswagen und Gewichte

**zu physikalischen, chemischen und technischen Zwecken.**

Mit höchsten Preisen ausgezeichnet auf sämtlichen beschickten Ausstellungen.

**Spezialität:**

**Analysenwagen, Probierwagen.**

**Neuheit!** **Ungleicharmige Präzisionstarirwage**

nach Dr. Mach, für rasch auszuführende Wägungen.

Nach kurzer Übung sehr beschleunigtes Arbeiten.

Siehe auch Chemiker-Ztg. 1903. S. 22.

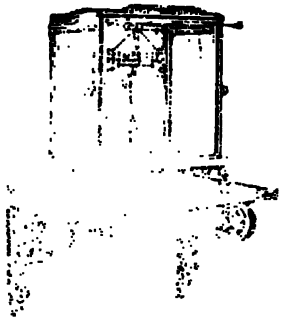
*Illustrierte Kataloge in deutsch, französisch und englisch kostenfrei.*

# F. SARTORIUS

**Vereinigte Werkstätten für wissenschaftliche Instrumente**

von **F. Sartorius, A. Becker** und **Ludwig Tesdorpf**

**Göttingen**



**Wagen und Gewichte**

für wissenschaftliche, chemische und technische Zwecke.

**Analysenwagen**

nur eigener bewährtester **Konstruktion.**

Man verlange ausdrücklich Original Sartorius-Wagen, da Nachahmungen in den Handel gebracht werden.

Auf allen beschickten Ausstellungen [illegible] Preis

St. Louis Grand Prix und **Goldene Medaille.**

[illegible] gratis und franko. **Vertreter in allen Ländern.**

# Ferdinand Ernecke.

Hoflieferant Sr. Majestät des Deutschen Kaisers und Königs.

**Mechanische Präzisionswerkstätten.**

Eigene Maschinentischlerei, Schlosserei, Lackiererei, Façondreherei usw.
Begründet 1859. mit Elektromotorenbetrieb. Begründet 1859.
Seit August 1905 im eigenen Fabrikneubau.

Ringbahnstr. 4. **Berlin-Tempelhof** Ringbahnstr. 4.

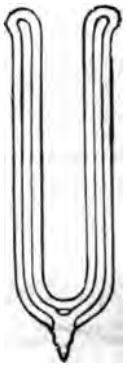
**Älteste Spezialfabrik**
zur Herstellung physikalischer Unterrichts-Apparate.

**Bau-Abteilung:**
Vollständige Einrichtung physikalischer und chemischer Lehrsäle, Laboratorien, Vorbereitungs- und Sammlungszimmer.

**Preisliste Nr. 19**
über Einrichtungsgegenstände, sowie ausführliche Voranschläge auf Wunsch kostenlos.

Durch geschultes Personal und jahrelange Erfahrung bin ich in der Lage, auch auf diesem Gebiete das denkbar Vollkommenste zu leisten.

# R. Burger & Co., Berlin N. 4.



Chausseestrasse 8.

Telephon: Amt III 171.
Telegramm-Adr.: Vakuumglas Berlin.

**Spezialfabrik**

für physikalische Glasapparate und Instrumente.

**Vierwandige Glasgefäße** nach Weinhold

**Preisliste gratis und franko.**

# MAX KOHL, Chemnitz i. S.

liefert als langjährige Spezialität:

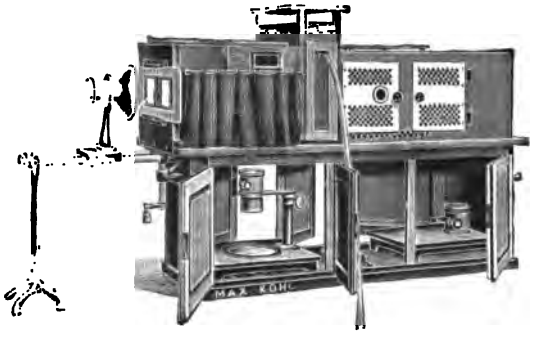
**Physikalische** und **chemische Einrichtungsgegenstände** für Schulen, wie z. B. **Experimentiertische** nach Prof. Dr. Weinhold und Prof. Arendt, **Fensterverdunkelung Oberlichtverdunkelungen** für Elektromotor- und Handbetrieb, **Abzugsnischen** mit Gas- und Wasserleitungseinbau, **Wandtafelgestelle. Projektionsrollschirm** mit oder ohne Elektromotorbetrieb.

## Vollständige Einrichtungen von physikalischen und chemischen Auditorien

in gediegener, zweckmäßiger Ausführung.

Derartige komplette Einrichtungen wurden jetzt u. a. für das *I. Chemische Institut der Universität Berlin, Hofmann-Haus Berlin, Laborat. f. angew. Chem. der Universität Leipzig, Phys. Institut der Universität Leipzig, Ecole d. Mines du Hainaut, Mons (Belgien), Kommerzschule Riga (Rußland), Technolog. Instit. Tomsk (Sibirien), höhere Maschinen-Bauschule Stettin u. v. a. m. geliefert.*

**Im Auftrage des Reichs-Kommissars habe ich den Hörsaal der Deutschen Unterrichts-Ausstellung St. Louis für das Preuß. kultus-Ministerium ausgestattet. Prämiert mit dem Grand Prix.**




**Neu! Neu!**

**Kohl's**

**Megadiaskop**

D.R.G.M.

*Apparat zur Projektion im auffallenden u. durchfallenden Licht, zur Mikroprojektion, zur Projektion mikroskop. Präparate, Polarisation, Spektralanalyse, Interferenz und Beugung des Lichts*

Vollkommenster Apparat der Gegenwart. ☞ Man verlange Spezial-Prospekt

# MAX KOHL, Chemnitz i. S.

## s-(Praktikanten-)Tische

iglichen Ausführungen, ganz den je-örtlichen Verhältnissen angepaßt.

## Experimentier-Schalttafeln

für Lehranstalten u. Laboratorien, als Wandtableau und in Form fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten die Verwendung des Stromes städtischer Centralen bis 110, 160, 220 Volt u. 20 oder 30 Amp. für alle im Experimentalunterricht vorkommende Arbeiten. Die Schalttafeln sind für kleine und grofse Stromstärken bei beliebigen Spannungen von 0,3 bis 110 resp. 220 Volt zu verwenden. Höhere Spannungen als wie eingestellt, treten auch bei Stromunterbrechung nicht auf. — Es ist damit also einem wirklichen, langgefühlten Bedürfnis abgeholfen.

la. Referenzen. *Man verlange Spezial-Prospekt!*

## D. D. Thermoskope nach Kolbe

in neuester, verbesserter Ausführung.

*Neu!*

# Öl-Luftpumpen

**System Kohl,** D.R.P. 169180.

**Allein-Vertrieb**

**und Alleinberechtigung zur Fabrikation.**

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0006 mm und **verspritzt während des Pumpens kein Öl! Sie eignet sich vorzüglich zum Auspumpen von Röntgen-Röhren**

*Man verlange Spezial-Prospekt!*

## Neue rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede, D.R.P. angemeldet.

Einfachste Konstruktion, sehr hohes Vakuum, geringe Wartung, einfachste Handhabung.

**Hochvakuum-Pumpen** liefern Vakua bis zu 0,000 15 mm in 14 Minuten in einem Raum von 300 ccm.

**bromid** von überraschender — Wirkung; — isch rein. Preis auf Anfrage.

**Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!**

**tellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille,**

r der Sonderausstellung des Königl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaales, letztere in der deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung: wissenschaftliche Instrumente.

**n Diplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898.**

**goldene Medaillen Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Aussig 1903, Athen 1904.**

# E. Leybold's Nachfolger

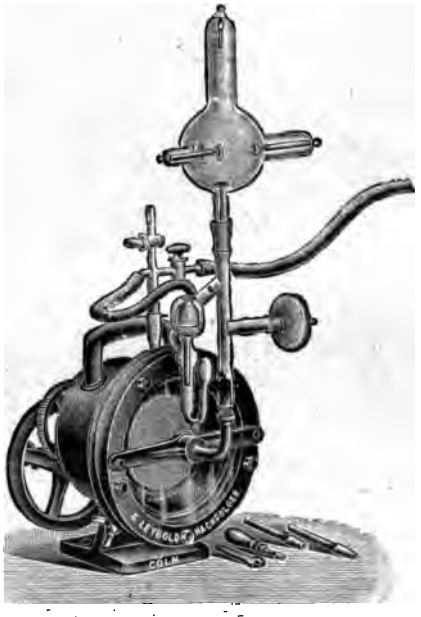
**Cöln a. Rh.**

Alleinvertrieb und alleinige Berechtigung zur Fabrikation der

## Neuen Hoch-Vakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede.

D. R. P. angemeldet. D. R. P. angemeldet.



**Garantiertes Vakuum: 0,00004 mm.**

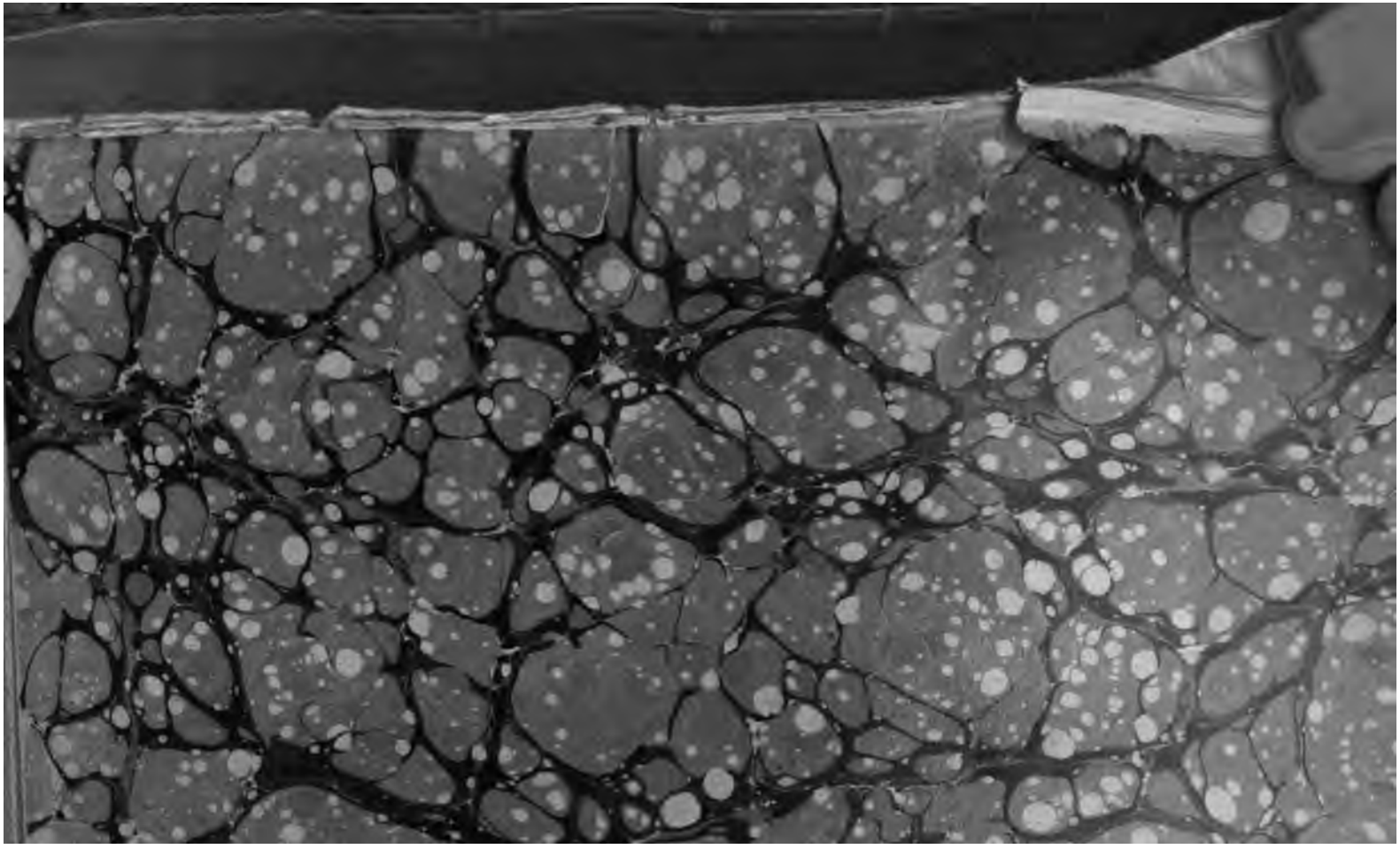
Die Pumpe evakuiert in $2^1/_2$ Minuten eine Röntgenröhre von Atmosphärendruck auf Röntgenvakuum und ermöglicht in kürzester Zeit die höchsten bisher erreichten Verdünnungen zu erzielen.

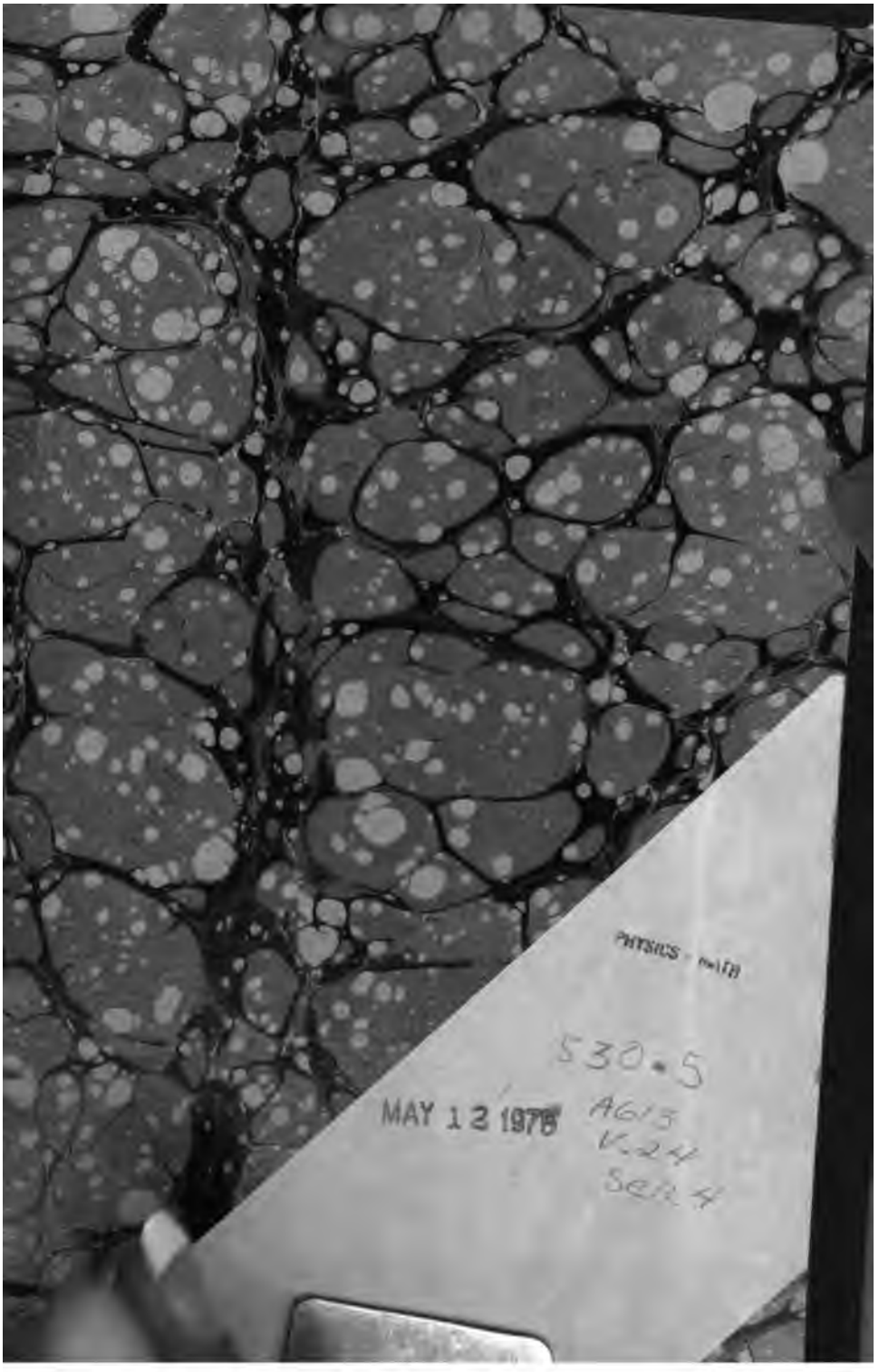
**Preis ohne Quecksilber M. 330.—.**



Alleinige Inseratenannahme durch: **Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr.**
Mit einer Beilage von **B. G. Teubner, Leipzig.**

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.




PHYSICS - MATH
530.5
MAY 12 1978
AG13
V.24
SER 4